Operációkutatás I.

Szegedi Tudományegyetem
Informatikai Intézet
Számítógépes Optimalizálás Tanszék

1. Előadás

Követelmények, teljesítés feltételei

- **Vizsga anyaga**
  - Előadásokhoz tartozó diasor
  - Az előadásokon elhangzott anyag
  - Egyszerű ismétlő kérdések a gyakorlati anyagból
- **Vizsga menete**:
  - A gyakorlatot sikeresen teljesítő hallgatók vizsgázhatnak
  - 1. rész: beugró teszt (coospace-en, igaz-hamis, feleletválasztás) - elérendő min. 60%
  - 2. rész: írásbeli vizsga (modellalkotás, 1-2 kifejtős kérdés) -
  - Jegy: „szokásos” ponthatárok 80%- jeles, 70-79%- jó, stb.
- Plusz pontszerzési lehetőség: utolsó előadások egyikén rövid (elméleti) coospace teszt; legfeljebb 10%-nyi pont szerezhető a vizsgapontszámhoz (csak sikeres beugró esetén)

Követelmények – gyakorlat

- A gyakorlathoz **2 db dolgozat** lesz, ezek alapján alakul ki a jegy
  - **március 17., május 5. (péntek!) 15-17 idősávban**
  - az utolsó két héten a gyakorlatok látogatása nem kötelező (csak konzultáció lesz)
- **A teljesítés feltétele**:
  - A 2 dolgozatból elérhető összpontszám legalább 50%-a
  - Jegyek alakulása a „szokásos” módón: 80%- jeles, 70-79%- jó, stb.
- Javító dolgozat a szorgalmi időszak utolsó hetében lesz, az egész féléves anyagból

Részletes követelmények: ld. coospace, neptun, honlap

További ajánlott irodalom

- Bajalinov Erik, Imreh Balázs: Operációkutatás. Polygon, 2001.
- Pluhár András: Operációkutatás I. kézirat
  http://www.inf.u-szeged.hu/~pluhar/oktatas/lp.pdf
- Wayne L. Winston: Operációkutatás. Módszerek és alkalmazások I., Aula Kiadó, Bp., 2003.

Fontos jelölések a diasorban

- **Definíció vastag kék**
- **Tétel vastag piros**

Valós problémák matematikai modelljei

Hogyan válasszunk albérletet ?

1. Legyen olcsó, a többi mindegy...
2. ... na jó, legyen jó helyen is.
3. jó lenne saját szoba is.
4. ... na jó, de ez így már túl drága.
5. További igények ?!

Amit valójában szeretnénk : **minimális ár – adott feltételek mellett !**

Ár $= f$ (lokáció, lakók száma, emelet, fűtés típusa, ...) $\to$ min

Feltéve, hogy

lokáció $\in \{\text{Belváros, Alsóváros, Újszeged...}\}$;

lakók száma ≤ 3 ;

...

Valós problémák matematikai modelljei

Hogyan válasszunk albérletet?

- Persze a valóságban az ár adott, „csak” a feltételeket kell kielégíteni.
- De ha több lakás megfelel a kritériumoknak, akkor optimalizálási probléma.
- Ha ki akarnánk adni egy lakást, hogyan áraznánk? („duális” probléma)
- „Megtanulhatók” az árak ≈ mi az f függvény?

Egy egyszerű modell:

f(lokáció, lakók száma, emelet, fűtés típusa, ...) $=$
$c_1 \times \text{TIK-től vett távolság 100m-ben} + c_2 \times \text{lakók száma} + c_3 \times$
$\times \text{ emelet száma} + \dots$

Valós problémák matematikai modelljei

Általában is, tipikus optimalizálandó mennyiségek

Minimalizálás	Maximalizálás
kiadás	bevétel
gyártási költség	profit
hiba (error fv.)	nyereség
...	...

Gyakori modell:

1. Írjuk fel a fenti fenti fogalmakat (a releváns) változók (többváltozós) **függvényeként**
2. Írjuk fel milyen (korlátozó) **feltételeknek** kell (akarunk) eleget tenni
3. Keressük meg a függvény **minimumát/maximumát** azok között a **lehetséges megoldások** között, amelyek eleget tesznek a feltételeknek

Optimalizálás - Gépi tanulás

Albérlet árak meghatározása A (lineáris) modellünk:

f (lokáció, lakók száma, emelet, fűtés típusa, ...) $=$
$c_1 \times \text{TIK-től vett távolság 100m-ben} + c_2 \times \text{lakók száma} + c_3 \times$
$\times \text{ emelet száma} + \dots$

De mi $c_1, c_2, \dots$?

„Tanuljuk” meg a függvényt valós adatokból:

	lokáció	lakók száma	emelet	...	Ár / hó
Lakás 1	Belváros	2	1	...	80000
Lakás 2	Alsóváros	3	2	...	60000
Lakás 3	Belváros	3	3	...	50000
...	...	...	...	...	...

Legkisebb négyzetek módszere:

$$\sum_{\text{lakás}} (\text{ár}[\text{lakás}] - f(\text{lokáció, lakók száma, emelet, ...})[\text{lakás}])^2 \to \min$$

Újabb optimalizálási feladat...

Optimalizálás - absztrakt (ne ijedjen meg senki!)

Feltétel nélküli optimalizálás

$$\max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$

ahol $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

Feltételes optimalizálás

$$\begin{array}{lll} \max & f(\mathbf{x}) & \\ \text{f.h} & g_i(\mathbf{x}) \leq 0 & i = 1,2,\ldots \\ & h_j(\mathbf{x}) = 0 & j = 1,2,\ldots \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n & \end{array}$$

- f és g_i függvények lehetnek lineárisak (LP), vagy nemlineárisak is,
- általában feltesszük, hogy folytonosak

Mi az operációkutatás?

- **Problémamegoldási technikák** és módszerek, melyek **valós** életben felmerülő **feladatok megoldására** dolgoztak (és dolgoznak) ki, például
  - optimalizálási eljárások
  - szimulációk
  - sztochasztikus modellek
  - döntés- és játékelméleti modellek
  - adatelemzés
- Elnevezés: a II. világháború idején az USA hadserege egy speciális kutatócsoportot hozott létre → katonai operációk matematikai megalapozása, döntéstámogatás
  - Meghatározó tagja George Dantzig
  - **lineáris programozás (LP)** (újra) megalkotása és
  - hatékony algoritmus az LP feladat megoldására → **szimplex módszer**

Miért fontos a lineáris programozás?

- **Számos probléma formalizálható** lineáris programozási feladatként.
- **Hatékony megoldási módszerek** léteznek a megoldására...
- vagy legalábbis **jó közelítését** adják a megoldásnak.
- **Bonyolult problémákat** tud kezelni.

Néhány sikertörténet

- Dutch Delta Program: vegyes egészértékű nemlineáris modell a gátak megerősítésre – 8 milliárd eurós költségcsökkentés (2013)
- TNT Express: új logisztikai modellek, ellátási lánc optimalizálás (200 ország, 2600 telephely, 30000 jármű, 50 teherszállító repülőgép) – 207 millió $ költségcsökkentés és jelentős CO2 kibocsátás csökkentés (2008-2012)
- Midwest Independent Transmission System: vegyes egészértékű programozási modell erőművek működtetésére (13 USA tagállamban) – 2 milliárd $ megtakarítás (2007-2010)
- Motorola: vegyes egészértékű programozási modell alkufolyamatok online menedzselésre (e-aukciók, online licitek) – 600 millió $ megtakarítás

Mennyire aktuális mindez?

businesswire
A BERKSHIRE HATHAWAY COMPANY

HOME SERVICES NEWS EDUCATION ABOUT US

Search

o9 Partners with Gurobi to Deliver State-of-the-Art Mathematical Optimization Software Solutions to Enterprises

With the Gurobi Optimizer as a component of o9's AI-powered platform, customers will be able to use mathematical optimization to address their most challenging business problems and achieve improved productivity and profitability

December 22, 2020 12:00 PM Eastern Standard Time

BEAVERTON, Ore. & DALLAS--(BUSINESS WIRE)--Gurobi Optimization, LLC – which produces the world's fastest mathematical optimization solver, the Gurobi Optimizer – and o9 Solutions, Inc. – a premier AI-driven integrated planning and operations solution provider – today announced that they are partnering to deliver state-of-the-art mathematical optimization software solutions to enterprises across a broad range of industries including manufacturing, retail, and logistics.

o9 will offer the Gurobi Optimizer as a component of its AI-powered platform, thereby giving companies the capability to leverage this data-driven, prescriptive analytics technology to solve their complex business problems and make decisions that improve resource utilization, minimize operating costs, and maximize productivity.

Dr. Narasimha Kamath, Vice President of Research & Development at o9 Solutions, commented: "This partnership with Gurobi demonstrates o9's commitment to providing our customers with best-of-breed AI technologies that they can use to solve their most challenging business problems. With the integration of Gurobi's mathematical optimization solver into o9's platform, our joint customers now have the capability to rapidly develop and deploy state-of-the-art mathematical optimization applications, which they can use to get better solutions, faster, and achieve greater revenue growth and profitability."

Mivel foglalkozunk a félév során?

- Lineáris programozás (LP) – szimplex módszer
- Egészértékű programozás (IP)
- A nemlineáris optimalizálás alapjai
- Valós problémák matematikai modelljei

Erőforrás allokáció – product mix

Kiindulás:

- Egy kis játékgyártó cég kétféle terméket gyárt: katonákat és vonatokat. Mindkét termék gyártása két fázisból áll: fafaragás, majd lakkozás-festés

Költségek:

- Egy katona előállítási költsége: \$10 anyagköltség, \$14 munkadíj; 1 óra fafaragás, 2 óra lakkozás-festés
- Egy vonat előállítási költsége: \$9 anyagköltség, \$10 munkadíj; 1 óra fafaragás, 1 óra lakkozás-festés

Erőforrások:

- Fafaragó műhely: 80 munkaóra
- Lakkozás-festés: 100 munkaóra

Erőforrás allokáció – product mix

Ár:

- 1 db katona ára \$27
- 1db vonat ára \$21

További megkötés: A katonára való keresletcsökkenés miatt a cég legfeljebb 40 katonát akar gyártani.

Kérdés: Mi az optimális (legjobb) gyártási stratégia (azaz melyik termékből mennyit gyártsunk), hogy a cég profitját maximalizáljuk?

Terminológia

döntési változók	$x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$
változók értelmezési tartománya	$x_1, x_2 \geq 0$
cél	max/min probléma
célfüggvény (max/min)	$2x_1 + 5x_2$
korlátozások (egyenletek, egyenlőtlenségek)	$3x_1 + 2x_2 \leq 10$

Erőforrás allokáció – product mix

Döntési változók:

- x_1: a gyártandó katonák száma
- x_2: a gyártandó vonatok száma

Cél: a profit maximalizálása

- $\$27 - \$10 - \$14 = \$3$: a profit, ha eladunk egy katonát $\Rightarrow 3x_1$ a profit, ha x_1 db katonát adunk el
- $\$21 - \$9 - \$10 = \$2$: a profit, ha eladunk egy vonatot $\Rightarrow 2x_2$ a profit, ha x_2 db vonatot adunk el

Célfüggvény:

- $z = 3x_1 + 2x_2$: a profit, ha eladunk x_1 katonát és x_2 vonatot

Erőforrás allokáció – product mix

Korlátozások:

- x_1 katona és x_2 vonat gyártásához
  - $1x_1 + 1x_2$ óra fafaragás szükséges; összesen 80 óra áll rendelkezésre
  - $2x_1 + 1x_2$ óra lakkozás-festés kell; összesen 100 óra áll rendelkezésre
- a gyártott katonák száma, x_1, nem lehet több, mint 40

Változókra vonatkozó korlátozások: x_1 és x_2 nemnegatív (*és egész...*).

$$\boxed{\begin{array}{lrrl} \text{Max} & z = 3x_1 + 2x_2 & & \\ & x_1 & + x_2 & \leq 80 \\ & 2x_1 & + x_2 & \leq 100 \\ & x_1 & & \leq 40 \\ & & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}}$$

Ezt a rendszert **programnak** hívjuk. **Lineáris**, mert

- a célfüggvény a döntési változók lineáris függvénye
- a korlátozó feltételek lineáris egyenlőtlenségek

Keverés probléma – blending

Kiindulás:

- Egy gyár olyan ötvözetet gyárt, ami 30% ólmot, 30% cinket és 40% ónt tartalmaz.
- Ezt már létező ötvözetek keverésével gyártják le. A létező ötvözetek összetételét és árát a következő táblázat tartalmazza:

Ötvözet	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Keverék
Ólom (%)	20	50	30	30	30	60	40	10	10	30
Cink (%)	30	40	20	40	30	30	50	30	10	30
Ón (%)	50	10	50	30	40	10	10	60	80	40
Ár ($ / kg)	7.3	6.9	7.3	7.5	7.6	6.0	5.8	4.3	4.1	min

Feladat: Minimalizáljuk a gyártási költséget.

Keverés probléma – blending

Döntési változók: $x_1, x_2, \ldots, x_9$, ahol

- x_i: az i-edik létező ötvözetből használt mennyiség egy egységnyi keverékhez

A döntési változókra $x_1 + x_2 + \cdots + x_9 = 1$ kell, hogy teljesüljön.

A következő lineáris programot írhatjuk fel:

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrl}
\text{Min} & z = 7.3x_1 & + 6.9x_2 & + 7.3x_3 & + 7.5x_4 & + 7.6x_5 & + 6.0x_6 & + 5.8x_7 & + 4.3x_8 & + 4.1x_9 & \\
 & x_1 & + x_2 & + x_3 & + x_4 & + x_5 & + x_6 & + x_7 & + x_8 & + x_9 & = 1 \\
 & 0.2x_1 & + 0.5x_2 & + 0.3x_3 & + 0.3x_4 & + 0.3x_5 & + 0.6x_6 & + 0.4x_7 & + 0.1x_8 & + 0.1x_9 & = 0.3 \\
 & 0.3x_1 & + 0.4x_2 & + 0.2x_3 & + 0.4x_4 & + 0.3x_5 & + 0.3x_6 & + 0.5x_7 & + 0.3x_8 & + 0.1x_9 & = 0.3 \\
 & 0.5x_1 & + 0.1x_2 & + 0.5x_3 & + 0.3x_4 & + 0.4x_5 & + 0.1x_6 & + 0.1x_7 & + 0.6x_8 & + 0.8x_9 & = 0.4 \\
 & & & & & & & & & x_1, \ldots, x_9 & \geq 0
\end{array}
$$

Tényleg szükségünk van minden egyenletre?

Erőforrás allokáció - második példa

Kiindulás:

- Egy bútorgyártó cég 4 különböző típusú széket gyárt.
- Minden székhez fára és acélra van szükség.
- Az egyes székek gyártáshoz szükséges mennyiségeket, az egy-egy szék eladásából származó profitot és a rendelkezésre álló anyagmennyiségeket a következő táblázat mutatja:

	Szék1	Szék2	Szék3	Szék4	Elérhető mennyiség
Acél	1	1	3	9	4400 (kg)
Fa	4	9	7	2	600 (kg)
Profit	\$12	\$20	\$18	\$40	max

Feladat: Melyik termékből mennyit gyártsunk, hogy a profit maximalizáljuk (feltéve, hogy minden legyártott terméket el tudunk adni)?

Erőforrás allokáció - második példa

Döntési változók: x_1, x_2, x_3, x_4

- x_i: az i-edik székből gyártandó darabszám; $x_i \geq 0$ $(i = 1,2,3,4)$

Cél: a profit maximalizálása

Célfüggvény:

- $z = 12x_1 + 20x_2 + 18x_3 + 40x_4$

Korlátozó feltételek:

- legfeljebb 4400 kg acél áll rendelkezésre: $x_1 + x_2 + 3x_3 + 9x_4 \leq 4400$
- legfeljebb 600 kg fa áll rendelkezésre: $4x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 2x_4 \leq 600$

Összegezve, a lineáris programunk:

$$\boxed{\begin{array}{lrrrrl} \text{Max} & z = 12x_1 & + 20x_2 & + 18x_3 & + 40x_4 & \\ & x_1 & + x_2 & + 3x_3 & + 9x_4 & \leq 4400 \\ & 4x_1 & + 9x_2 & + 7x_3 & + 2x_4 & \leq 600 \\ & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq 0 \end{array}}$$

A lineáris programozás alapfeladata

A lineáris programozás (LP) alapfeladata **standard formában**

$$
\begin{array}{llllll}
\text{Max} & c_1x_1 & + c_2x_2 + \dots & + c_nx_n & = z & \\
\text{Felt.} & a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 + \dots & + a_{1n}x_n & \leq b_1 \\
 & a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 + \dots & + a_{2n}x_n & \leq b_2 \\
 & \vdots & & & \\
 & a_{m1}x_1 & + a_{m2}x_2 + \dots & + a_{mn}x_n & \leq b_m \\
 & & & x_1, \dots, x_n & \geq 0
\end{array}
$$

Lineáris programozási feladat: keressük meg adott lineáris, $\mathbb{R}^n$ értelmezési tartományú függvény (célfüggvény) szélsőértékét (minimumát vagy maximumát) értelmezési tartományának adott lineáris korlátokkal (feltételekkel) meghatározott részében.

Lehetséges megoldás: olyan $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ vektor, hogy p_i-t x_i-be helyettesítve ($\forall i = 1, \dots, n$) kielégíti a feladat feltételrendszerét.

Lehetséges megoldási tartomány: az összes lehetséges megoldás (vektor) halmaza.

Optimális megoldás: olyan lehetséges megoldás, ahol a célfüggvény felveszi maximumát/minimumát.