Operációkutatás I.

Szegedi Tudományegyetem
Informatikai Intézet
Számítógépes Optimalizálás Tanszék

6. Előadás

Áttekintés

Kezdjük újra a klasszikus erőforrás allokációs problémával (katonák, vonatok...)

Az eredeti probléma LP formában:

$$\begin{array}{rcrll}
\max\ z = 3x_1 & + & 2x_2 & & \\
\hline
x_1 & + & x_2 & \leq 80 & \text{[fafaragás]} \\
2x_1 & + & x_2 & \leq 100 & \text{[festés]} \\
x_1 & & & \leq 40 & \text{[kereslet]} \\
x_1, & & x_2 & \geq 0 &
\end{array}$$

A kezdő szótár:

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x_3 & = & 80 & - & x_1 & - & x_2 \\
x_4 & = & 100 & - & 2x_1 & - & x_2 \\
x_5 & = & 40 & - & x_1 & & \\
\hline
z & = & 0 & + & 3x_1 & + & 2x_2
\end{array}$$

Áttekintés

Optimális szótár:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & 20 & + & x_3 & - & x_4 \\ x_2 & = & 60 & - & 2x_3 & + & x_4 \\ x_5 & = & 20 & - & x_3 & + & x_4 \\ \hline z & = & 180 & - & x_3 & - & x_4 \end{array}$$

Vegyünk hozzá egy új termék gyártását: **játékautót is gyártunk**, 0.5 óra fafaragás, 1 óra festés, 1$-os ár, a keresletkorlátunk is változik $\rightarrow x_6$ a gyártandó játékautók száma

Az új feladat:

$$\begin{array}{rcrcrcl} \max z = 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_6 & & \\ x_1 & + & x_2 & + & 0.5x_6 & \leq & 80 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_6 & \leq & 100 \\ x_1 & & & + & x_6 & \leq & 40 \\ & & & x_1, & x_2, x_6 & \geq & 0 \end{array}$$

Áttekintés

Az új feladat kezdő szótára:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_3 & = & 80 & - & x_1 & - & x_2 & - & 0.5x_6 \\ x_4 & = & 100 & - & 2x_1 & - & x_2 & - & x_6 \\ x_5 & = & 40 & - & x_1 & & & - & x_6 \\ \hline z & = & 0 & + & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_6 \end{array}$$

Az új feladat optimális szótára?

Rendezzük át a szótárunkat:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_3 + 0.5x_6 & = & 80 & - & x_1 & - & x_2 \\ x_4 + x_6 & = & 100 & - & 2x_1 & - & x_2 \\ x_5 + x_6 & = & 40 & - & x_1 & & \\ \hline z - x_6 & = & 0 & + & 3x_1 & + & 2x_2 \end{array}$$

Legyen $x_3' = x_3 + 0.5x_6, x_4' = x_4 + x_6, x_5' = x_5 + x_6, z' = z - x_6$

Áttekintés

Az új feladat egy lehetséges módosított kezdő szótára:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_3' & = & 80 & - & x_1 & - & x_2 \\ x_4' & = & 100 & - & 2x_1 & - & x_2 \\ x_5' & = & 40 & - & x_1 & & \\ \hline z' & = & 0 & + & 3x_1 & + & 2x_2 \end{array}$$

Ebből az optimális szótár (mint előbb):

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & 20 & + & x_3' & - & x_4' \\ x_2 & = & 60 & - & 2x_3' & + & x_4' \\ x_5' & = & 20 & - & x_3' & + & x_4' \\ \hline z' & = & 180 & - & x_3' & - & x_4' \end{array}$$

Áttekintés

Helyettesítsünk vissza:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & 20 & + & (x_3+0.5x_6) & - & (x_4+x_6) \\ x_2 & = & 60 & - & 2(x_3+0.5x_6) & + & (x_4+x_6) \\ x_5+x_6 & = & 20 & - & (x_3+0.5x_6) & + & (x_4+x_6) \\ \hline z' & = & 180 & - & (x_3+0.5x_6) & - & (x_4+x_6) \end{array}$$

amiből

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & = & 20 & + & x_3 & - & x_4 & - & 0.5x_6 \\ x_2 & = & 60 & - & 2x_3 & + & x_4 & & \\ x_5 & = & 20 & - & x_3 & + & x_4 & - & 0.5x_6 \\ \hline z & = & 180 & - & x_3 & - & x_4 & - & 1.5x_6 \end{array}$$

Azaz lényegében nem (éri meg) fogunk gyártani egyetlen kisautót sem ilyen feltételek mellett ($x_6 = 0$ az optimális megoldásban).

Áttekintés

Vegyünk egy újabb feltételt: csomagoljuk be a játékokat → 250 egység **karton** áll rendelkezésre, a katonához 3, a vonathoz 4, a kisautóhoz 1 egység kell.

Az új feladat:

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
\text{Max } z = 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_6 & & \\
x_1 & + & x_2 & + & 0.5x_6 & \leq & 80 \\
2x_1 & + & x_2 & + & x_6 & \leq & 100 \\
x_1 & & & + & x_6 & \leq & 40 \\
3x_1 & + & 4x_2 & + & x_6 & \leq & 250 \\
 & & & x_1, & x_2, x_6 & \geq & 0
\end{array}
$$

Áttekintés

Az új feladat kezdőszótára ($\rightarrow x_7$ új mesterséges változó)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_3 & = & 80 & - & x_1 & - & x_2 & - & 0.5x_6 \\
x_4 & = & 100 & - & 2x_1 & - & x_2 & - & x_6 \\
x_5 & = & 40 & - & x_1 & & & - & x_6 \\
x_7 & = & 250 & - & 3x_1 & - & 4x_2 & - & x_6 \\
\hline
z & = & 0 & + & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_6
\end{array}$$

Tegyük x_7-et bázisváltozóvá $\rightarrow$ fejezzük ki x_7-et az eredeti szótár bázisa segítségével (ld. 6. dia):

$$x_7 = 250 - 3x_1 - 4x_2 - x_6 =$$

$$250 - 3(20 + x_3 - x_4 - 0.5x_6) - 4(60 - 2x_3 + x_4) - x_6 =$$

$$-50 + 5x_3 - x_4 + 0.5x_6$$

Áttekintés

Az új szótár:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & = & 20 & + & x_3 & - & x_4 & - & 0.5x_6 \\
x_2 & = & 60 & - & 2x_3 & + & x_4 & & \\
x_5 & = & 20 & - & x_3 & + & x_4 & - & 0.5x_6 \\
x_7 & = & -50 & + & 5x_3 & - & x_4 & + & 0.5x_6 \\
\hline
z & = & 180 & - & x_3 & - & x_4 & - & 0.5x_6
\end{array}$$

Vegyük észre, hogyha a kapott szótár lehetséges lenne, akkor a megoldás optimális.

Viszont ez nem egy lehetséges kezdőszótár, mivel a bázismegoldásban $x_7 < 0$ $\rightarrow$ Mehet a **kétfázisú szimplex módszer**.

Geometriai alapfogalmak

- A lineáris programozás szoros kapcsolatban áll a **konvex geometriával**
- Az eddig tárgyalt fogalmaknak, mint a bázismegoldás, lineáris feltétel, lehetséges megoldások halmaza, stb., mind megfeleltethető egy-egy geometriai objektum

R^n : n-dimenziós **lineáris tér** a valós számok felett – Elemei az n elemű valós **vektorok**

E^n : n-dimenziós **euklideszi tér**, olyan lineáris tér, amelyben értelmezett egy **belső szorzat**és egy **távolság** függvény a következő módon

- $\langle x, y \rangle = x^T y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$, $||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ norma
- $d(x, y) = ||x - y||_2 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$

Geometriai alapfogalmak

Pont: egy $x \in E^n$ vektor

Lehetséges megoldások $\leftrightarrow$ Pontok az E^n térben

$x_1, x_2 \in E^n$ **különböző pontokat összekötő szakasz**:

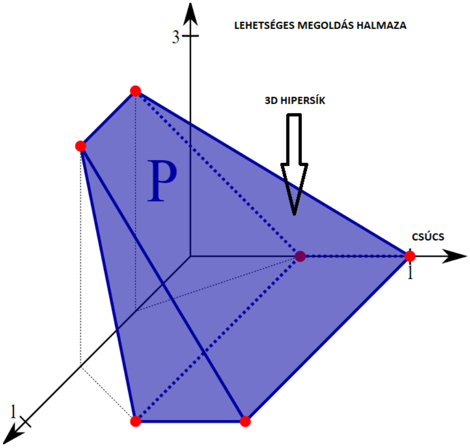
$$\{x \ : \ x \in E^n, \ x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \},$$

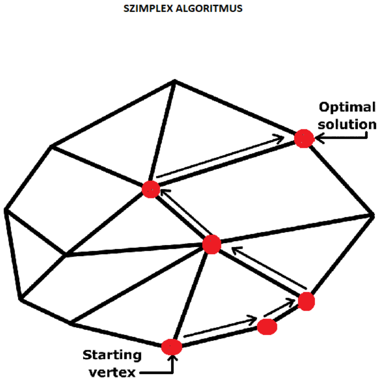
ahol $\lambda \in [0{,}1]$ tetszőleges

x_1,x_2 végpontú **szakasz felezőpontja**: $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$ pont

Ponthalmaz **csúcspontja**: olyan pont, amely nem áll elő egyetlen ponthalmazbeli szakasz felezőpontjaként sem

Geometriai alapfogalmak : példa





Geometriai alapfogalmak

n**-dimenziós sík**:

$$\{\ x\ :\ x \in E^n,\ a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b\ \},$$

ahol $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$ rögzített számok

n**-dimenziós zárt féltér**:

$$\{\ x\ :\ x \in E^n,\ a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leq b\ \},$$

ahol $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$ rögzített számok

Lineáris feltételek $\leftrightarrow$ Zárt félterek ('$\leq$') és síkok ('$=$')

Lehetséges megoldások halmaza $\leftrightarrow$ Zárt félterek (és síkok) metszete

Konvex poliéderek

Konvex ponthalmaz: olyan ponthalmaz, amely tartalmazza bármely két pontját összekötő szakasz pontjait is

Zárt ponthalmaz: olyan ponthalmaz, amely tartalmazza a pontjaiból képezhető tetszőleges konvergens sorozat határértékét is

Korlátos ponthalmaz: olyan ponthalmaz, amelynek minden x pontjára teljesül, hogy $d(0, x) \leq K$, ahol K egy rögzített valós szám (inkább használatos: komplementere nyílt)

Poliéder: zárt, véges sok csúcsponttal rendelkező ponthalmaz

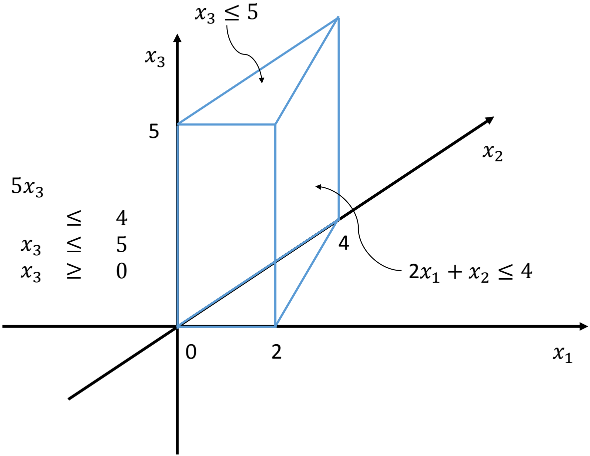
A lehetséges megoldások halmaza egy konvex poliéder

Politóp: korlátos poliéder

Konvex poliéderek

Példa.

$$
\begin{array}{lccccccc}
max & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & & \\
 & 2x_1 & + & x_2 & & & \leq & 4 \\
 & & & & & x_3 & \leq & 5 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$



LP és Konvex poliéderek

- Feltételek (egyenletek) $\leftrightarrow$ Poliéder lapok
- Egy **lineáris célfüggvény a poliéder valamelyik csúcsában veszi fel a maximumát**
  - Belső pontban van olyan irány amerre elmozdulva nő a célfüggvény
  - Élre eső pont esetében valamely csúcs felé mozdulva nem csökkenhet a célfüggvény
- Egy $n + m$ elemű bázismegoldásban n változó értékét (nembázis változók) 0-ra állítjuk; ez meghatározza a többi értékét is
- Az n dimenziós térben n hipersík metszete meghatároz egy pontot
- **Bázismegoldások** $\leftrightarrow$ **Poliéder csúcsok**

Szimplex algoritmus és geometria

$$\begin{array}{lccccccc} max & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & & \\ & 2x_1 & + & x_2 & & & \leq & 4 \\ & & & & & x_3 & \leq & 5 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

A példán végrehajtva a szimplex algoritmust a klasszikus pivot stratégiával

$$[0 \quad 0 \quad 0| \quad 4 \quad 5] \to [0 \quad 0 \quad 5| \quad 4 \quad 0] \to [2 \quad 0 \quad 5| \quad 0 \quad 0] \to [0 \quad 4 \quad 5| \quad 0 \quad 0]$$

bázismegoldások adódnak (*hf: ellenőrizzük*)

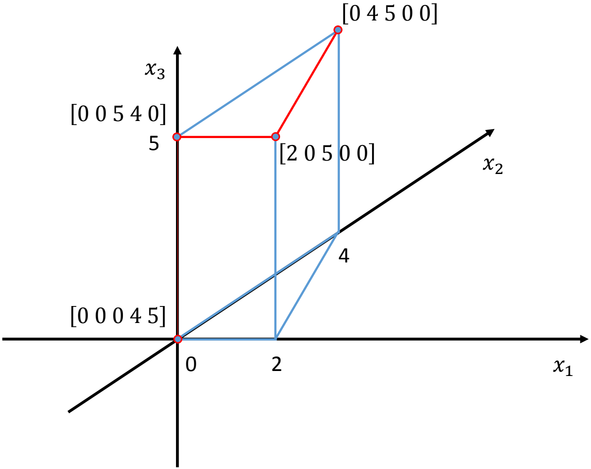
A **bázismegoldások** rendre a

$$[0 \quad 0 \quad 0] \to [0 \quad 0 \quad 5] \to [2 \quad 0 \quad 5] \to [0 \quad 4 \quad 5]$$

poliéder csúcsoknak felelnek meg

Egy pivot lépés az aktuális bázismegoldásból induló valamelyik él mentén történő ellépés egy „szomszédos” bázismegoldásba (azaz csúcsba)

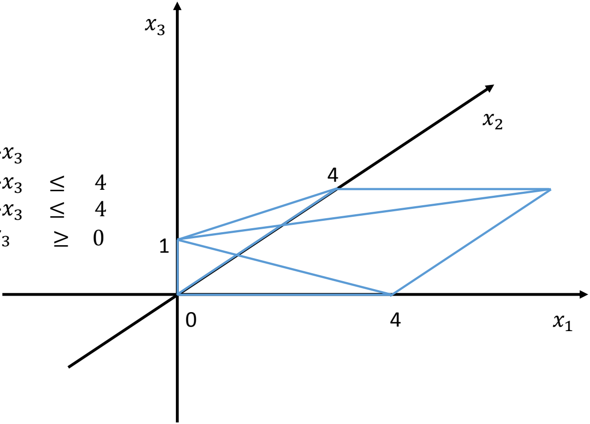
Szimplex algoritmus



Ciklizáció és geometria

Tekintsük a következő feladatot:

$$
\begin{array}{lcccccccc}
max & x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & & \\
 & x_1 & & & + & 4x_3 & \leq & 4 \\
 & & & x_2 & + & 4x_3 & \leq & 4 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$



Ciklizáció

A klasszikus pivot stratégiával a

$$[0 \quad 0 \quad 0| \quad 4 \quad 4] \to [0 \quad 0 \quad 1| \quad 0 \quad 0] \to [0 \quad 0 \quad 1| \quad 0 \quad 0] \to [4 \quad 4 \quad 0| \quad 0 \quad 0]$$

bázismegoldások adódnak

A bázismegoldások rendre a

$$[0 \quad 0 \quad 0] \to [0 \quad 0 \quad 1] \to [0 \quad 0 \quad 1] \to [4 \quad 4 \quad 0]$$

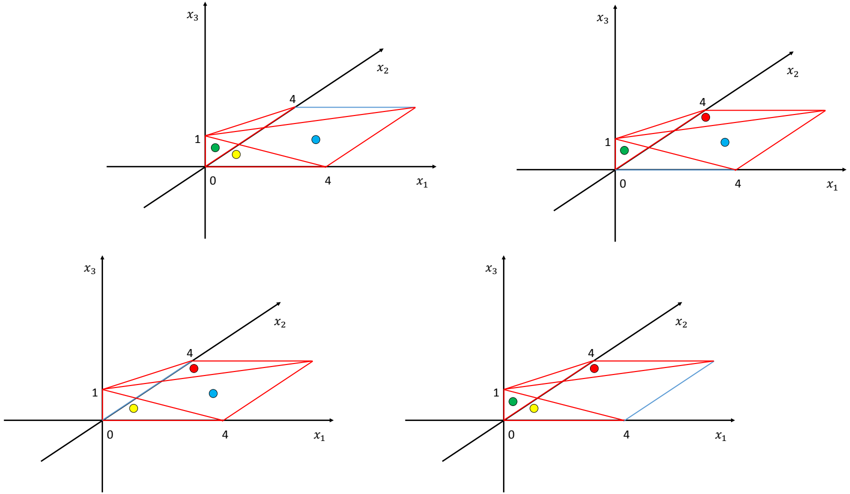
poliéder csúcsoknak felelnek meg.

Degeneráció lépett fel.

Degeneráció esetén egy n-dimenziós csúcspont legalább $n+1$ síkra esik.

Degenerált iterációs lépéskor a „csúcsban maradunk”.

Ciklizáció



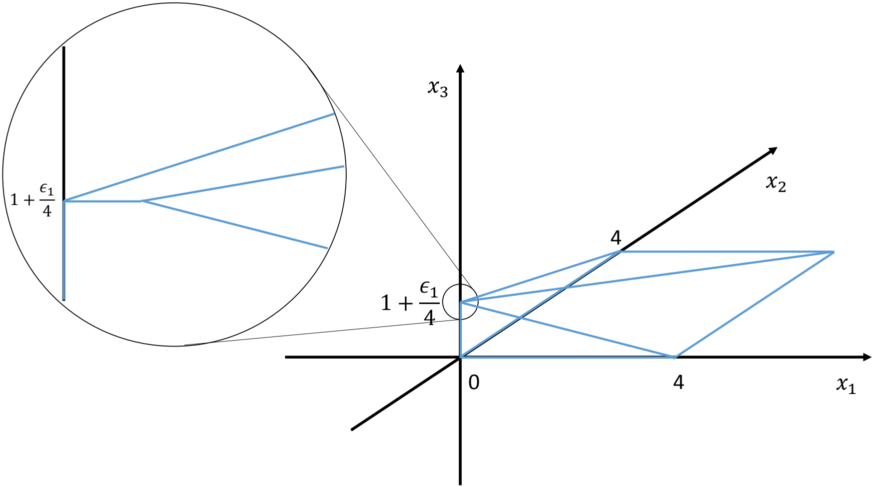
Ciklizáció

- Ciklizáció esetén egy csúcspontban ragadunk.
- Csak **a csúcspont leírására használt síkokat cserélgetjük**.
- A **perturbáció módszere** szétválasztja a degenerációt okozó síkokat egymástól.

$$
\begin{array}{rcccccccc}
 & x_1 & & & + & 4x_3 & \leq & 4+\epsilon_1 \\
 & & & x_2 & + & 4x_3 & \leq & 4+\epsilon_2 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 \\
\hline
\max & x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & &
\end{array}
$$

- A degeneráció megszüntetésével elkerüljük a ciklizációt

Ciklizáció



Többcélú programozás

Tekintsük újra a gyártási alapfeladatunkat (katonák, vonatok,...):

- eladási árak: 2 illetve 3 $
- fafaragás és festés úgy mint eddig
- + katona 3, vonat 4 egység csomagolópapír

Tegyük fel, hogy a cég **non-profittá** válik és **néhány új célt** állít maga elé:

- **Cél #1**: Legfeljebb 40 katonát gyártanak (csak ennyi adható el 3 $-ért)
- **Cél #2**: Legalább 140$ profit szerzése, hogy fizetni tudják a dolgozókat
- **Cél #3**: Legfeljebb 130 egység csomagolópapír használata (jelenleg ennyi van csak / fontos a környezetvédelem)

Többcélú programozás

Minden cél egyedileg elérhető, de **a három egyszerre nem biztos, hogy teljesíthető!**

Vezessünk be ún. **büntetést**, arányosan azzal, hogy **mennyire térünk el az egyes céloktól** egy-egy megoldás esetén:

- **Büntetés #1**: 40-nél több katonát nem adunk el; a büntetés 3$ (hiányzó profit a legyártott, de már eladhatatlan katonánként)
- **Büntetés #2**: Ha nincs legalább 140$ profit, a dolgozókat hitelből kell fedezni (20% kamat)
- **Büntetés #3**: Ha több csomagolópapír kell, akkor 0.80$-ért tudjuk beszerezni egységét

Többcélú programozás

A kombinált **cél**, hogy **minimalizáljuk** az összes felmerülő **büntetést**. Ez a következő feladathoz vezet:

$$
\begin{array}{rcrcrl}
x_1 & + & x_2 & \leq & 80 & \\
2x_1 & + & x_2 & \leq & 100 & \\
x_1 & & & \leq & 40 & \textbf{[Cél \#1]} \\
3x_1 & + & 2x_2 & \geq & 140 & \textbf{[Cél \#2]} \\
3x_1 & + & 4x_2 & \leq & 130 & \textbf{[Cél \#3]}
\end{array}
\quad \xrightarrow[slack]{add} \quad
\begin{array}{rcrcccccr}
x_1 & + & x_2 & + x_3 & & & & = & 80 \\
2x_1 & + & x_2 & & + x_4 & & & = & 100 \\
x_1 & & & & & + x_5 & & = & 40 \\
3x_1 & + & 2x_2 & & & & - x_6 & = & 140 \\
3x_1 & + & 4x_2 & & & & + x_7 & = & 130
\end{array}
$$

A mesterséges változókra:

- x_3, x_4 nemnegatívok – **szigorú feltételek**, mindig fenn kell, hogy álljanak
- x_5, x_6, x_7 nem korlátozottak – **gyenge feltételek**: megszeghetjük, de akkor büntetést kell fizetni
- pl. ha x_5 pozitív $\Rightarrow$ a büntetés 0; ha x_5 negatív $\Rightarrow$ a büntetés $-3x_5$
- pl. ha x_6 pozitív $\Rightarrow$ a büntetés 0, mert 140$ felett vagyunk a profitban, ...

Többcélú programozás

A kérdés, **hogyan formalizáljuk** ezt lineáris programként?

$\Longrightarrow$ Fejezzük ki x_5, x_6, x_7 **két nemnegatív változó különbségeként** $\Longrightarrow$ pozitív és negatív részei a változóknak

- $x_5 = x_5^+ - x_5^-$
- $x_6 = x_6^+ - x_6^-$
- $x_7 = x_7^+ - x_7^-$

ahol

$$x^+ = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \text{ és } x^- = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

a szám pozitív, illetve negatív része, $x^+, x^- \geq 0$

$\Longrightarrow$ Új célfüggvény, ami kifejezi az összes büntetés összegét, mely x_5, x_6, x_7 előjelei függvényében adódik.

Többcélú programozás

A feladat így:

$$
\begin{aligned}
x_5 &= x_5^+ - x_5^- \\
x_6 &= x_6^+ - x_6^- \\
x_7 &= x_7^+ - x_7^- \\
x_5^+, x_5^-, x_6^+&, x_6^-, x_7^+, x_7^- \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{lllllllllll}
\min & & & & & 3x_5^- & & + 1.2x_6^- & & + 0.8x_7^- & \\
& x_1 + x_2 + x_3 & & & & & & & & & = 80 \\
& 2x_1 + x_2 & + x_4 & & & & & & & & = 100 \\
& x_1 & & + x_5^+ & - & x_5^- & & & & & = 40 \\
& 3x_1 + 2x_2 & & & & & - x_6^+ + & x_6^- & & & = 140 \\
& 3x_1 + 4x_2 & & & & & & & + x_7^+ - & x_7^- & = 130
\end{array}
$$

Ez megoldható a standard módon (szimplex algoritmus), illetve megoldható a duálisa (ld. később; ill. szorgalmi feladat), és abból megkonstruálható a megoldása ennek (ld. dualitás tétel).

Egy dinamikus probléma

- SailCo vitorláshajókat gyártó cég a következő évét tervezi.
- **Cél:** Hány hajót gyártson az egyes **negyedévekben** $(t = 1,2,3,4)$?
- **Kereslet:** $40, 60, 75, 25$ a négy negyedévre.
- Az első negyedév kezdetén 10 hajó van raktáron.
- Minden negyedév kezdetén meg kell határozni, hány hajót gyártsanak abban a periódusban.
- Normál munkaidőben 40 hajót tudnak gyártani 400$/hajó költségen egy negyedévben.
- Túlóra esetén 450$/hajó költséggel kell számolni. (így persze tudnak 40-nél többet gyártani)
- Tárolási költség (raktár) 20$/hajó minden negyedévben.

Minimalizáljuk a gyártási és tárolási költséget egy optimális ütemezéssel!

Egy dinamikus probléma – megoldás

Minden negyedévre meg kell határozni, hogy hány hajót gyártsanak normál munkaidőben és túlórában.

Döntési változók:

- x_t: hány hajót gyártsanak t negyedévben rendes munkaidőben (400$/hajó), $t = 1,2,3,4$
- y_t: hány hajót gyártsanak t negyedévben túlórában (450$/hajó), $t = 1,2,3,4$

Tárolás:

- i_t: a t negyedév végén tárolás alatt lévő hajók száma

A teljes költség:

- Teljes költség = rendes munkaidőben gyártott hajók költsége + túlórában gyártott hajók költsége + tárolási költség

  $$=400(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 450(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + 20(i_1 + i_2 + i_3 + i_4)$$

Egy dinamikus probléma – megoldás

Észrevételek :

- t negyedév végén a tárolt hajók száma $=$ tárolt hajok száma $(t-1)$-ben $+$ legyártott hajók száma t-ben – kereslet t-ben
- ... azaz, ha d_t a kereslet t-ben, akkor

$$i_t = i_{t-1} + (x_t + y_t) - d_t \text{ ahol } i_0 = 10$$

- Az elérhető (gyártott és tárolt) hajók száma és a kereslet között :

$$i_{t-1} + (x_t + y_t) \geq d_t \text{ azaz } i_t = i_{t-1} + (x_t + y_t) - d_t \geq 0$$

Egy dinamikus probléma – megoldás

A lineáris program:

$$\min z = 400(x_1+x_2+x_3+x_4)+450(y_1+y_2+y_3+y_4)+20(i_1+i_2+i_3+i_4)$$

$x_j \leq 40 \ (j = 1,2,3,4)$
$i_1 = 10 + (x_1 + y_1) - 40$
$i_2 = i_1 + (x_2 + y_2) - 60$
$i_3 = i_2 + (x_3 + y_3) - 75$
$i_4 = i_3 + (x_4 + y_4) - 25$
$i_t \geq 0, y_t \geq 0$ és $x_t \geq 0 \ (t = 1,2,3,4)$

Az optimális megoldás:
$z = 78{,}450\$$
$x_1 = x_2 = x_3 = 40, x_4 = 25$
$y_1 = 0, y_2 = 10, y_3 = 35, y_4 = 0$
$i_1 = 10, i_2 = i_3 = i_4 = 0.$

Egy dinamikus probléma – megoldás

Néhány megjegyzés

1. Érdekes megfigyelni, hogy az LP formalizmus enged túlórában gyártani akkor is, ha a rendes munkaidejű termelés nem éri el a 40-et $\rightarrow$ érdemes lehet negyedévről negyedévre menően implementálni („*rolling planning horizon*")
2. A költség sokszor lineáris függvénye a legyártott mennyiségnek.
3. A jövőbeli keresletet nem biztos, hogy ilyen pontosan ismerjük (ld. érzékenységvizsgálat).
4. „Büntetést" fizethetünk, ha nem készülünk el időre egy-egy hajóval (ld. többcélú programozás).
5. A termelés növelése extra költségekkel is járhat (pl. új munkások betanítása)
6. … azaz a valóságot általában nem egyszerű modellezni!