Operációkutatás I.

Szegedi Tudományegyetem
Informatikai Intézet
Számítógépes Optimalizálás Tanszék

7. Előadás

Motiváció

- A cél annak meghatározása, hogy a bemeneti adatok változásai milyen hatással vannak az optimumra (vagy fízibilitásra)
- Miért érdekes ez? Bizonyos értékek (pl. árak, munkaidő, anyagköltség) csak becslések: szeretnénk tudni, hogy „mennyit hibázhatunk", **mennyire érzékeny a megoldás** ezen értékek változásaira

Miben változhat meg a feladat?

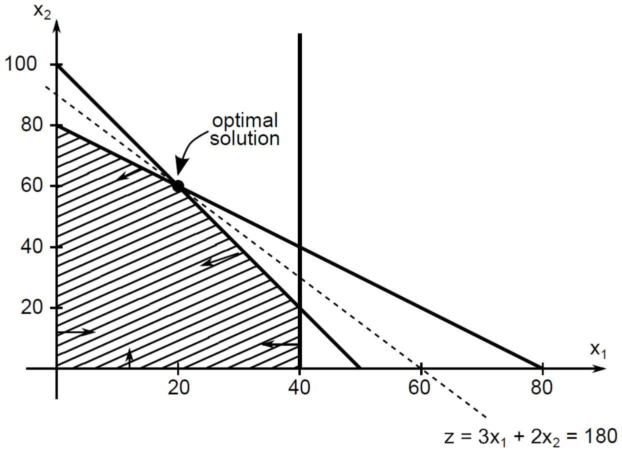
- megváltozhat a célfüggvény (az együtthatók)
- megváltozhat egy feltétel jobb oldala
- új változó léphet be
- új feltétel léphet be

Az első kettőt vizsgáljuk részletesebben.

Érzékenységvizsgálat grafikusan – a szokásos példa

A szokásos példánk és grafikus megoldása: Geogebra

$$
\begin{array}{rcrcl}
\text{Max } 3x_1 & + & 2x_2 & & \\
x_1 & + & x_2 & \leq & 80 \\
2x_1 & + & x_2 & \leq & 100 \\
x_1 & & & \leq & 40 \\
 & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$



Érzékenységvizsgálat – célfüggvény

$x_1 + x_2 = 80$
$2x_1 + x_2 = 100$ az optimális megoldásban, vagyis $x_1 = 20, x_2 = 60$.

Kérdés: Mennyire változtathatjuk meg c_1, c_2 célfüggvény együtthatókat hogy az optimális megoldás ne változzon?

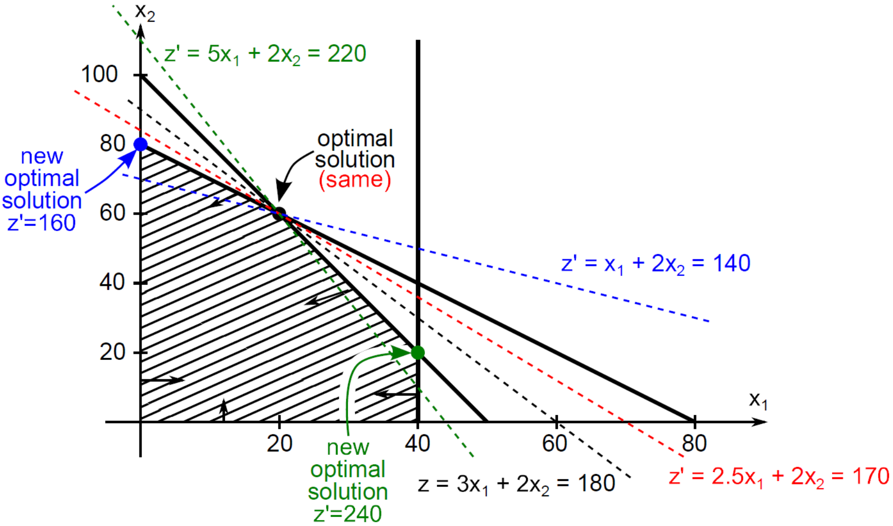
- A célfüggvény meredeksége $-\frac{3}{2}$
- $2x_1 + x_2 = 100$ meredeksége -2
- $x_1 + x_2 = 80$ meredeksége -1

Válasz: Annyira, hogy a meredekség $[-2, -1]$ között maradjon!

- azaz, $c_1 = 3$-ra: $-2 \leq -\frac{c_1}{2} \leq -1 \Longrightarrow 4 \geq c_1 \geq 2$
- azaz, $c_2 = 2$-re: $-2 \leq -\frac{3}{c_2} \leq -1 \Longrightarrow \frac{3}{2} \geq c_2 \geq 3$

Érzékenységvizsgálat – célfüggvény

Grafikusan illusztrálva:



Érzékenységvizsgálat – feltétel jobb oldala

Kérdés: Mennyivel változhat a feltételek jobboldala, hogy a megoldás bázisa ne változzom?

Válasz:

$$x_1 + x_2 = 80 + \Delta_1$$
$$2x_1 + x_2 = 100$$

illetve $x_1 \leq 40$,

vagyis $x_1 = 20 - \Delta_1, x_2 = 60 + 2\Delta_1$.

$x_1 \geq 0$ és $x_1 \leq 40$, ha $0 \leq 20 - \Delta_1 \leq 40$ azaz $-20 \leq \Delta_1 \leq 20$
$x_2 \geq 0$ ha $60 + 2\Delta_1 \geq 0$, azaz $\Delta_1 \geq -30$ aminél a fenti erősebb

$$x_1 + x_2 = 80$$
$$2x_1 + x_2 = 100 + \Delta_2$$

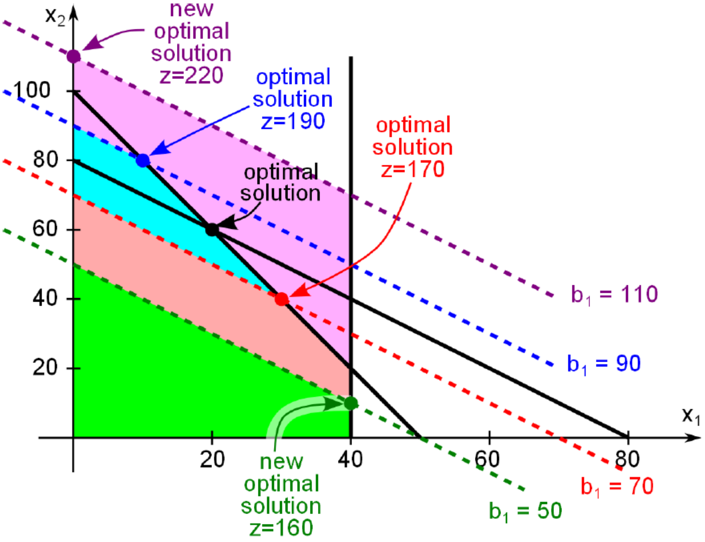
illetve $x_1 \leq 40$,

vagyis $x_1 = 20 + \Delta_2, x_2 = 60 - \Delta_2$.

$x_1 \geq 0$ és $x_1 \leq 40$, ha $0 \leq \Delta_2 + 20 \leq 40$ azaz $-20 \leq \Delta_2 \leq 20$
$x_2 \geq 0$ ha $60 - \Delta_2 \geq 0$, azaz $\Delta_2 \leq 60$ aminél a fenti megint erősebb

Érzékenységvizsgálat – feltétel jobb oldala

Grafikusan:



Árazási interpretáció

Tekintsük újra az erőforrás allokációs problémát (katona és vonat gyártása, fa és festék kell). Legyen most az eladási ár (tehát nem a profit) 3 per katona, illetve 2 per vonat.

$$
\begin{array}{lrll}
\text{Max} & z = 3x_1 + 2x_2 & & \text{[eladási ár]} \\
& x_1 + x_2 & \leq 80 & \text{[fa]} \\
& 2x_1 + x_2 & \leq 100 & \text{[festék]} \\
& x_1, x_2 & \geq 0 &
\end{array}
$$

Legyen egy egység fa **piaci ára** y_1 (\$), egy egység festék ára y_2 (\$).

Mit tehet a gyártó?

- Eladhatja az erőforrásait (fa, festék) piaci áron
- Vehet további fát és festéket
- Gyárt a rendelkezésre álló erőforrásokból és eladja a játékokat

Mi a legjobb stratégia (feltéve, hogy mindent tényleg el tud adni)?

Árazási interpretáció

- A felvásárló a készletet $80y_1 + 100y_2$ áron venné meg
- Ha egy katona **alapanyagára kisebb lenne, mint az eladási ára**, azaz

$$y_1 + 2y_2 < 3(\$)$$

  akkor a gyártó **nem akarná eladni**. **Miért?**
- Mivel a felvásárló meg akarja venni az alapanyagokat, csak olyan árat ajánlhat, amennyiért a gyártó el is adná azokat, azaz

$$y_1 + 2y_2 \geq 3(\$)$$

- Hasonlóan megy a dolog a vonatokra is: csak olyan árat ajánlhat, aminél nem érné meg jobban a gyártónak legyártani a vonatokat és eladni, azaz

$$y_1 + y_2 \geq 2(\$)$$

Árazási interpretáció: a felvásárló árképzése

- A felvásárló a következő optimalizálási feladatot „oldja meg” :

$$\boxed{\begin{array}{lrcrll} \text{Min} & 80y_1 & + & 100y_2 & & \\ & y_1 & + & 2y_2 & \geq 3 & [\text{katonák}] \\ & y_1 & + & y_2 & \geq 2 & [\text{vonatok}] \\ & & & y_1, y_2 & \geq 0 & \end{array}}$$

Ezt hívjuk az eredeti feladat **duálisának**

Az eredeti feladatot (ez alapján) **primál** feladatnak hívjuk.

Primál-duál feladatpár

A primál feladat:

$$\begin{array}{lrcrl} & x_1 & + & x_2 & \leq 80 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq 100 \\ & & & x_1, x_2 & \geq 0 \\ \hline \text{Max} & z = 3x_1 & + & 2x_2 & \end{array}$$

A duál feladat:

$$\begin{array}{lrcrl} & y_1 & + & 2y_2 & \geq 3 \\ & y_1 & + & y_2 & \geq 2 \\ & & & y_1, y_2 & \geq 0 \\ \hline \text{Min} & w = 80y_1 & + & 100y_2 & \end{array}$$

Primál-duál feladatpár

Spec eset: Primál LP 2 változóval és 3 feltétellel

Primál

$$\begin{array}{rcccl} & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & \leq b_1 \\ & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & \leq b_2 \\ & a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & \leq b_3 \\ & & & x_1, x_2 & \geq 0 \\ \hline \text{Max} & z = c_1x_1 & + & c_2x_2 & \end{array}$$

Duális

$$\begin{array}{rcccccl} & a_{11}y_1 & + & a_{21}y_2 & + & a_{31}y_3 & \geq c_1 \\ & a_{12}y_1 & + & a_{22}y_2 & + & a_{32}y_3 & \geq c_2 \\ & & & & y_1 & , y_2, y_3 & \geq 0 \\ \hline \text{Min} & w = b_1y_1 & + & b_2y_2 & + & b_3y_3 & \end{array}$$

Primál-duál feladatpár általánosan

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b} \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad i = 1,2,\ldots m$$

Primál feladat

$$\mathbf{x} \ge \mathbf{0} \qquad x_j \ge 0 \quad j = 1,2,\ldots n$$

$$\max \mathbf{c}^T\mathbf{x} = z \qquad \max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = z$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{y} \ge \mathbf{c} \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \ge c_j \quad j = 1,2,\ldots n$$

Duál feladat

$$\mathbf{y} \ge \mathbf{0} \qquad y_i \ge 0 \quad i = 1,2,\ldots m$$

$$\max \mathbf{b}^T\mathbf{y} = w \qquad \min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = w$$

Primál-duál feladatpár

Összefoglalva csak mátrixos formában:

A primál feladat:

$$\begin{array}{rrcl} & \mathbf{A}\mathbf{x} & \leq & \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0} \\ \text{Max} & \mathbf{c}^T\mathbf{x} & = & z \end{array}$$

A duál feladat:

$$\begin{array}{rrcl} & \mathbf{A}^T\mathbf{y} & \geq & \mathbf{c} \\ & \mathbf{y} & \geq & \mathbf{0} \\ \text{Min} & \mathbf{b}^T\mathbf{y} & = & w \end{array}$$

A duál a (standard alakú) primából egyszerűen megkapható

- transzponáljuk az $\mathbf{A}$ mátrixot
- „cseréljük fel” a $\mathbf{b}$ és a $\mathbf{c}$ vektorok szerepét
- cseréljük a $\leq$ egyenlőtlenségeket $\geq$-ra
- Max helyett Min feladatot írunk fel

Primál-duál feladatpár

Állítás. *A duál feladat duálisa az eredeti primál feladat.*

Bizonyítás. Átírva a duális feladatot maximalizálási standard alakra

$$\text{Duál feladat} \quad \begin{aligned} \mathbf{A}^T\mathbf{y} &\geq \mathbf{c} \\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0} \\ \min \mathbf{b}^T\mathbf{y} &= w \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} -\mathbf{A}^T\mathbf{y} &\leq -\mathbf{c} \\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0} \\ \max -\mathbf{b}^T\mathbf{y} &= -w \end{aligned}$$

majd felírva annak duálisát, illetve standardizált duálisát

$$\text{Duál duálisa} \quad \begin{aligned} -\mathbf{A}\mathbf{x} &\geq -\mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \\ \min -\mathbf{c}^T\mathbf{x} &= -z \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \\ \max \mathbf{c}^T\mathbf{x} &= z \end{aligned}$$

a primál feladatot kapjuk.

■

Gazdasági értelmezés

Tegyük fel, hogy az LP feladatunk egy korlátozott erőforrások mellett maximális nyereséget célzó gyártási folyamat modellje (ld. katona-vonat mintapélda):

- m – erőforrások száma
- n – gyártott termékek száma
- x_j – j termékből gyártott mennyiség
- a_{ij} – j termék egységnyi mennyiségének előállításához szükséges mennyiség a i erőforrásból
- b_i – az i erőforrásból rendelkezésre álló mennyiség
- c_j – a j termék egységnyi előállításával (majd eladásával) keletkező haszon

Gazdasági értelmezés

A duál feladat megoldásában y_i^* a primál (eredeti) feladat i erőforrásához tartozó piaci ár, amit **marginális ár**nak, vagy más néven **árnyék ár**nak is nevezünk.

- Ez az **erőforrás értéke** az LP megoldójának szemszögéből
- Az i erőforrás mennyiségének egy egységnyi növelésével (bizonyos határokon belül) éppen y_i^*-gal nő a nyereség (azaz a célfüggvény értéke)
- Viszont ha „túl sok” van egy erőforrásból, az nem érhet sokat[1]
- Továbbá y_i^*-nál többet már nem érdemes fizetni az i erőforrásért, míg kevesebbet igen

[1] ld. később komplementáris lazaság rész

Primál-duál feladatpár

A primál feladat egy példán

$$\begin{array}{rrcrl} & x_1 & + & x_2 & \leq 80 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq 100 \\ & x_1 & - & 3x_2 & \leq 60 \\ & & x_1 & , x_2 & \geq 0 \\ \hline \text{Max} & z = 3x_1 & + & 2x_2 & \end{array}$$

A duál feladat:

$$\begin{array}{rrcrcrl} & y_1 & + & 2y_2 & + & y_3 & \geq 3 \\ & y_1 & + & y_2 & - & 3y_3 & \geq 2 \\ & & & y_1, & y_2 & , y_3 & \geq 0 \\ \hline \text{Min} & w = 80y_1 & + & 100y_2 & + & 60y_3 & \end{array}$$

Gyenge dualitás tétel

Tétel. (Gyenge dualitás) *Ha* $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]^T$ *lehetséges megoldása a primál feladatnak és* $\mathbf{y} = [y_1, \ldots, y_m]$ *lehetséges megoldása a duál feladatnak, akkor*

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T\mathbf{y}$$

Vagyis a duális feladat bármely lehetséges megoldása felső korlátot ad a primál bármely lehetséges megoldására (azaz az optimális megoldásra is).

Bizonyítás. Mivel $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ lehetséges megoldások, $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ és $\mathbf{A}^T\mathbf{y} \geq \mathbf{c}$, vagy másképp $\mathbf{c}^T \leq (\mathbf{A}^T\mathbf{y})^T$, azaz

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq (\mathbf{A}^T\mathbf{y})^T\mathbf{x} = (\mathbf{y}^T\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{y}^T(\mathbf{A}\mathbf{x}) \leq \mathbf{y}^T\mathbf{b} = \mathbf{b}^T\mathbf{y}$$

∎

Lemma

Lemma. Legyen $\mathbf{x}^* = [x^*{}_1, \ldots, x^*{}_n]^T$ lehetséges megoldása a primál feladatnak és $\mathbf{y}^* = [y^*{}_1, \ldots, y^*{}_m]$ lehetséges megoldása a duál feladatnak. Ha $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T\mathbf{y}^*$, akkor $\mathbf{x}^*$ a primál feladat optimális megoldása, $\mathbf{y}^*$ pedig a duál feladat optimális megoldása.

Bizonyítás. $\mathbf{x}^*$ optimalitása: A gyenge dualitásból tudjuk, hogy tetszőleges primál lehetséges $\mathbf{x}$ pontban $\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T\mathbf{y}^*$. A $\mathbf{b}^T\mathbf{y}^*$ felső korlátot ad a primál feladat célfüggvényére, vagyis, ha létezik $\mathbf{x}$, amire $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{b}^T\mathbf{y}^*$, akkor $\mathbf{x}$ szükségképpen primál optimális is. Mivel $\mathbf{x}^*$ ilyen, így primál optimális megoldás.
$\mathbf{y}^*$ optimalitása hasonlóan, vagy indirekten: Tfh. $\mathbf{y}^*$ nem optimális. Ekkor $\exists\ \tilde{\mathbf{y}}$ lehetséges megoldás, amire $\mathbf{b}^T\tilde{\mathbf{y}} < \mathbf{b}^T\mathbf{y}^*$. Viszont $\mathbf{x}^*$ lehetséges primál megoldásra $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* \leq \mathbf{b}^T\tilde{\mathbf{y}}$ szükséges, de ez ellentmond a $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T\mathbf{y}^* > \mathbf{b}^T\tilde{\mathbf{y}}$-nak. Vagyis $\mathbf{y}^*$ csak optimális lehet.

■

Segédtételek

1. Segédtétel. *Ha a primál feladat célfüggvénye nem korlátos, akkor a duál feladatnak nincs lehetséges megoldása.*

Bizonyítás. Direkten: Ha a primál nem korlátos, akkor $\mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \inf$. A gyenge dualitás miatt minden $\mathbf{x}$ lehetséges primál megoldásra $\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T\mathbf{y}$, azaz $\mathbf{b}^T\mathbf{y}$ nem lehet véges, vagyis a duálnak nem létezhet lehetséges megoldása.

■

2. Segédtétel. *Ha a duál feladat célfüggvénye nem korlátos, akkor a primál feladatnak nincs lehetséges megoldása.*

Bizonyítás. Indirekten: Tfh. létezik $\hat{\mathbf{x}}$ primál lehetséges megoldás. Ekkor a gyenge dualitás miatt minden $\mathbf{y}$ lehetséges duál megoldásra $\mathbf{c}^T\hat{\mathbf{x}} \leq \mathbf{b}^T\mathbf{y}$, azaz a duál korlátos. Ez ellentmond a tétel feltételének, így szükségképpen a primálnak nem létezhet lehetséges megoldása.

■

Gyenge dualitás

- Látjuk, hogy a **korlátosság és a megoldhatóság nem függetlenek** egymástól
- Ha a primál nem korlátos, akkor a duálnak nincs lehetséges megoldása
- Hasonlóan, ha a duál nem korlátos, akkor a primálnak nincs lehetséges megoldása
- Lehetséges, hogy egyiknek sincs lehetséges megoldása
- De ha mindkettőnek van, akkor mindkettő korlátos
- Továbbá a primál és a duál feladat egyidejű optimalitása ellenőrizhető

Primál-duál esetek

Primál

Duál	Nincs lehetséges megoldása	Van optimális megoldása	Nem korlátos
Nincs lehetséges megoldása	$\checkmark$	-	$\checkmark$
Van optimális megoldása	-	$\checkmark$	-
Nem korlátos	$\checkmark$	-	-