

Operációkutatás I.

Szegedi Tudományegyetem
Informatikai Intézet
Számítógépes Optimalizálás Tanszék

8. Előadás

Dualitási példa

Példa. Adott a következő primál feladat:

$$\begin{array}{rcccccccl}
 x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & \leq & 1 \\
 5x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 8x_4 & \leq & 55 \\
 -x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 5x_4 & \leq & 3 \\
 x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0 \\
 \hline
 \max & 4x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & 3x_4 & = & z
 \end{array}$$

A feladat megoldásának utolsó szótára

$$\begin{array}{rcccccccl}
 x_4 & = & 5 & - & x_1 & - & x_3 & - & x_5 & - & x_7 \\
 x_6 & = & 1 & + & 5x_1 & + & 9x_3 & + & 21x_5 & + & 11x_7 \\
 x_2 & = & 14 & - & 2x_1 & - & 4x_3 & - & 5x_5 & - & 3x_7 \\
 \hline
 z & = & 29 & - & 2x_1 & - & 2x_3 & - & 11x_5 & - & 6x_7
 \end{array}$$

Dualitási példa

A duális feladat:

$$\begin{array}{rcccccccl}
 y_1 & + & 5y_2 & - & y_3 & \geq & 4 \\
 -y_1 & + & y_2 & + & 2y_3 & \geq & 1 \\
 -y_1 & + & 3y_2 & + & 3y_3 & \geq & 5 \\
 3y_1 & + & 8y_2 & - & 5y_3 & \geq & 3 \\
 y_1 & , & y_2 & , & y_3 & \geq & 0 \\
 \hline
 \min & y_1 & + & 55y_2 & + & 3y_3 & = & w
 \end{array}$$

- A duális egy optimális megoldása: $\mathbf{y}^* = (11, 0, 6)$
- A primál feladat utolsó szótárában a célfüggvény

$$z = 29 - 2x_1 - 2x_3 - 11x_5 - 6x_7$$

azaz a mesterséges változók együtthatói: $c_5 = -11, c_6 = 0, c_7 = -6$
(Mit veszünk észre?)

Dualitási példa

- A Lemma miatt elég, ha találunk egy olyan (y_1^*, y_2^*, y_3^*) duál lehetséges megoldást, amelyre $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^*$
- Standard alakú feladat esetén az utolsó szótárból kiolvasható a duális feladat megoldása. A példában $\mathbf{b}^T = [1 \ 55 \ 3]$

$$\begin{array}{rclclclclcl}
 x_4 & = & 5 & - & x_1 & - & x_3 & - & x_5 & & - & x_7 \\
 x_6 & = & 1 & + & 5x_1 & + & 9x_3 & + & 21x_5 & & + & 11x_7 \\
 x_2 & = & 14 & - & 2x_1 & - & 4x_3 & - & 5x_5 & & - & 3x_7 \\
 \hline
 z & = & 29 & - & 2x_1 & - & 2x_3 & & -11x_5 & + & 0x_6 & -6x_7
 \end{array}$$

A duális változók az eredeti feladat mesterséges változóihoz rendelhetők:

$$x_5 \longleftrightarrow y_1, x_6 \longleftrightarrow y_2, x_7 \longleftrightarrow y_3 \Rightarrow y_1 = 11, y_2 = 0, y_3 = 6$$

Árnyékár: Az a érték, amennyivel a célfüggvény értéke változik, ha a feltétel jobboldalát eggyel növeljük. Ez egy feltétel duális változójának optimális értéke.

Árnyékár

Nézzük meg az első két feltétel árnyékárát!

$$\begin{array}{rcccccccl} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & = & 1 \\ 5x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 8x_4 & + & x_6 & = & 55 \end{array}$$

Az optimális szótár

$$\begin{array}{rcccccccl} x_4 & = & 5 & - & x_1 & - & x_3 & - & x_5 & - & x_7 \\ x_6 & = & 1 & + & 5x_1 & + & 9x_3 & + & 21x_5 & + & 11x_7 \\ x_2 & = & 14 & - & 2x_1 & - & 4x_3 & - & 5x_5 & - & 3x_7 \\ \hline z & = & 29 & - & 2x_1 & - & 2x_3 & - & 11x_5 & - & 6x_7 \end{array}$$

a duális változók: $y_1 = 11, y_2 = 0, y_3 = 6$

Az első feltétel árnyékára 11, tehát ennyivel nő a célfüggvény, ha az első feltétel jobboldalát eggyel növeljük. Miért -11 az x_5 együtthatója? Az optimális megoldásban úgy növelhetjük az első feltétel jobboldalát, hogy x_5 -öt 1-re állítjuk. A célfüggvény alapján most x_5 -öt 1-el csökkentve -11-el csökken a célfüggvény, azaz pont 11-el fog nőni.

A második feltétel árnyékára 0, hiszen a maradékváltozó 1, hiába növelnénk a jobboldalt, ha eddig se fogyott el az alapanyag.

Primál-duál feladat

Primál

$$\begin{array}{rcllcl}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & \dots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & \dots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\
 \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 & \dots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m \\
 & & & x_1, x_2, \dots, x_n & \geq & 0
 \end{array}$$

$$\max \quad c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = z$$

Duál

$$\begin{array}{rcllcl}
 a_{11}y_1 + a_{12}y_2 & \dots & + & a_{1n}y_n & \geq & c_1 \\
 a_{21}y_1 + a_{22}y_2 & \dots & + & a_{2n}y_n & \geq & c_2 \\
 \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 & \dots & + & a_{mn}y_n & \geq & c_n \\
 & & & y_1, y_2, \dots, y_n & \geq & 0
 \end{array}$$

$$\min \quad b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m = w$$

Primál-duál feladat

Primál kiegészített feladat

$$\begin{array}{rcl}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & & = b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \dots + a_{2n}x_n & + x_{n+2} & = b_2 \\
 \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \dots + a_{mn}x_n & + x_{n+m} & = b_m \\
 & x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 & \\
 \hline
 \max \quad c_1x_1 + c_2x_2 \dots + c_nx_n & & = z
 \end{array}$$

$$\mathbf{xs} = [x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}]$$

$$\mathbf{Ax} \leq b \quad \rightarrow \quad \mathbf{Ax} + \mathbf{Ixs} = b$$

Erős dualitás tétel

A primál:

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

$$\max \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x} = z$$

A duál:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}$$

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

$$\min \quad \mathbf{b}^T \mathbf{y} = w$$

A primál kiegészített:

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{Ixs} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}, \mathbf{xs} \geq \mathbf{0}$$

$$\max \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x} = z$$

Tétel. (Erős dualitás) Ha van a primál feladatnak *optimális megoldása*, $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$, akkor a duál feladatnak is létezik *optimális megoldása*, $\mathbf{y}^* = (y_1^*, \dots, y_m^*)$, és a célfüggvényértékük megegyezik, azaz

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^*$$

Bizonyítás. Az $\mathbf{x}^*$ primál optimális megoldás bázisa legyen $\mathbf{x}_B$, nem-bázisa $\mathbf{x}_N$, vagyis a feladat átírható ezekkel a vektorokkal (lásd 5. előadás):

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{Ixs} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{Bx}_B + \mathbf{Nx}_N = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{Bx}_B + \mathbf{Nx}_N) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{Nx}_N = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

Erős dualitás tétel

Kapjuk, hogy $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N$. A célfüggvény pedig

$$\begin{aligned} z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} &= \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N \\ &= \mathbf{c}_B^T (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N) + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N \\ &= \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + (\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}) \mathbf{x}_N \\ \text{optimum} &\leq 0, \text{ ha optimális} \end{aligned}$$

Lássuk be, hogy $\mathbf{y}^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$ a duál optimális megoldása:

1. $\mathbf{y}$ lehetséges, ha $\mathbf{A}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}$ vagy transzponálva $\mathbf{y}^T \mathbf{A} \geq \mathbf{c}^T$:

$$\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \geq \mathbf{c}^T$$



$$\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{B} \geq \mathbf{c}_B^T$$

$$\mathbf{c}_B^T \geq \mathbf{c}_B^T$$

triviális

$$\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \geq \mathbf{c}_N^T$$

$$0 \geq \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}$$

$\mathbf{x}_B$ optimalitásából

Erős dualitás tétel

1. folytatása: $\mathbf{y}$ lehetséges, ha $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$, azaz $\mathbf{y}^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \geq \mathbf{0}$ minden elemre. Minden

$$y_i = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}_i$$

ahol $\mathbf{e}_i$ egységvektor: $\mathbf{e}_i = [0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ az $\mathbf{I}$ i -edik oszlopa. Abból indulunk ki, hogy $\mathbf{x}_B$ optimális bázisra

$$\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \leq \mathbf{0}.$$

Minden x_{n+i} maradékváltozóra a $\mathbf{B}, \mathbf{N}$ mátrixhoz tartozó oszlopa az i -edik egységvektor, $\mathbf{e}_i$, és a célfüggvényegyütthatója 0.

Így, ha x_{n+i} nembázis változó $\mathbf{x}^*$ -ban, akkor a $\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}$ megfelelő eleme a $c_{n+i} - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}_i = 0 - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}_i$, ami ≤ 0 . Tehát

$$y_i = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}_i \geq 0.$$

Ha x_{n+i} bazisváltó, akkor $\mathbf{c}_B^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{B}$ -ben $c_{n+i} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}_i$ felel meg neki, ami $0 = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}_i$ tehát

$$0 \geq y_i = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}_i = 0.$$

Erős dualitás tétel

2. $\mathbf{y}$ optimális: a Lemma alapján, $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{b}^T \mathbf{y}$ elegendő ehhez. Ezt könnyű belátni, hiszen

$$\mathbf{b}^T \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{b} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b},$$

ami az $\mathbf{x}^*$ -hoz tartozó célfüggvényérték is az optimális szótár alapján, ami

$$z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} + (\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}) \mathbf{x}_N.$$



Dualitási tételből adódó lehetőségek

A **dualitás** fogalma rendkívül hasznos, mert **rugalmas hozzáállást tesz lehetővé** az LP feladatok megoldásánál.

- 1 A szimplex algoritmus iterációszáma közelítőleg a sorok számával arányos $\rightarrow$ sok feltétel, kevés változó esetén érdemes áttérni a duálisra
- 2 Ha az első esetben szükség van 2 fázisra, míg a duálisnál nincs, szintén érdemes áttérni
- 3 Ha menet közben kell új feltételeket hozzávenni az LP-hez $\rightarrow$ a duál feladattal dolgozva az új feltétel csak egy új, nembázis változóként jelenik meg $\rightarrow$ hozzávesszük az aktuális szótárhoz, és folytatjuk a feladatmegoldást

Általános LP feladat

- Mi a helyzet akkor, ha az LP feladatunk **tartalmaz $\geq$ vagy $=$ feltételt** vagy **nem-pozitív ill. nem korlátozott változót** (ami felvehet negatív értéket is)?
- A jó hír, hogy ez kezelhető, ugyanis
 - egy primál „ $\geq$ ” feltétel egy nem-pozitív duál változóhoz tartozik
 - nem-pozitív primál változóhoz egy „ $\leq$ ” duál feltétel tartozik
 - az **egyenlőség feltétel** egy **nem korlátozott (duál) változóhoz** tartozik
 - nem korlátozott változóhoz egyenlőség feltétel tartozik a duálban

Miért? Például tegyük fel, hogy $x_1 + x_2 \geq 80$ [fa]

Írjuk fel ezt $\leq$ feltétellel, $-x_1 - x_2 \leq -80$. Így a feltételhez tartozó duális változó $yp_1 \geq 0$, de minden együtthatója -1-szerese az eredetinek. Tehát, ha bevezetjük az $yn_1 = -yp_1$ változót helyette, yn_1 együtthatói az eredetiek lesznek, de $yp_1 \geq 0$ miatt $yn_1 \leq 0$ adódik.

Általános LP feladat

Összegezve:

Primál (Max)	Duál (Min)
i -edik feltétel $\leq$	$y_i \geq 0$
i -edik feltétel $\geq$	$y_i \leq 0$
i -edik feltétel $=$	y_i nem korlátozott
$x_i \leq 0$	i -edik feltétel $\leq$
$x_i \geq 0$	i -edik feltétel $\geq$
x_i nem korlátozott	i -edik feltétel $=$

Általános LP feladat

Példa.

Primál

$$\begin{array}{rcll}
 \text{Max } z = & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \\
 \hline
 & x_1 & + & x_2 & + & 0.5x_3 & \leq 80 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = 100 \\
 & x_1 & & & + & x_3 & \geq 40 \\
 & & & & & x_1 & \text{nem korlátozott} \\
 & & & & & x_2 & \leq 0 \\
 & & & & & x_3 & \geq 0
 \end{array}$$

Duál

$$\begin{array}{rcll}
 \text{Min } w = & 80y_1 & + & 100y_2 & + & 40y_3 & \\
 \hline
 & y_1 & + & 2y_2 & + & y_3 & = 3 \\
 & y_1 & + & y_2 & & & \leq 2 \\
 & 0.5y_1 & + & y_2 & + & y_3 & \geq 1 \\
 & & & & & y_1 & \geq 0 \\
 & & & & & y_2 & \text{nem korlátozott} \\
 & & & & & y_3 & \leq 0
 \end{array}$$

LP feladatok megoldhatósága

Inkonzisztencia: egyenletek és egyenlőtlenségek egy m elemű

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \quad i \in I$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad i \in E$$

rendszere inkonzisztens, ha léteznek olyan $y_1, y_2, \dots, y_m$ valós számok, amelyekre teljesül, hogy

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^m b_i y_i < 0$$

$$y_i \geq 0 \quad i \in I$$

LP feladatok megoldhatósága

Tucker lehetetlenségi tétele egyenlet és egyenlőtlenség rendszerekre.

Egyenletek és egyenlőtlenségek egy rendszere **akkor és csak akkor megoldhatatlan, ha inkonzisztens**

- Nem bizonyítjuk
- A tétel bizonyítható a lineáris programozás alaptételének és az erős dualitás tételének általános LP feladatokra vonatkozó formájára támaszkodva

Komplementaritás

A primál:

A duál:

A primál kieg.:

A duál kieg.:

$$\begin{array}{l|l|l|l} \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} & \mathbf{A}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c} & \mathbf{Ax} + \mathbf{I} \mathbf{x}_s = \mathbf{b} & \mathbf{A}^T \mathbf{y} - \mathbf{I} \mathbf{y}_e = \mathbf{c} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} & \mathbf{x}, \mathbf{x}_s \geq \mathbf{0} & \mathbf{y}, \mathbf{y}_e \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \max & \mathbf{b}^T \mathbf{y} \rightarrow \min & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \max & \mathbf{b}^T \mathbf{y} \rightarrow \min \end{array}$$

Azt mondjuk, hogy $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ és $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$

komplementárisak, ha

$$\mathbf{y}^T (\mathbf{b} - \mathbf{Ax}) = 0 \text{ és } \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{y} - \mathbf{c}) = 0,$$

vagy a kiegészített feladaton nézve

$$\mathbf{y}^T \mathbf{x}_s = 0 \text{ és } \mathbf{x}^T \mathbf{y}_e = 0.$$

Vagyis

- ha $y_i > 0$, akkor $\mathbf{x}$ -et az i -edik egyenletbe helyettesítve $=$ -et kapunk, azaz $x_{n+i} = 0$ („a feltétel **éles**”)
- ha az i -edik feltétel nem éles, azaz $x_{n+i} > 0$, akkor $y_i = 0$

Komplementaritás

A **primál** feladat:

$$\begin{array}{rccccccc} \text{Max } z & = & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & c_3x_3 \\ & & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & \leq & b_1 \\ & & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & \leq & b_2 \\ & & x_1 & & x_2 & & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

A **duális**:

$$\begin{array}{rccccccc} \text{Min } w & = & b_1y_1 & + & b_2y_2 \\ & & a_{11}y_1 & + & a_{21}y_2 & \geq & c_1 \\ & & a_{12}y_1 & + & a_{22}y_2 & \geq & c_2 \\ & & a_{13}y_1 & + & a_{23}y_2 & \geq & c_3 \\ & & y_1 & & y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Komplementaritás:

$$y_i(b_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - a_{i3}x_3) = 0 \quad \text{vagy} \quad y_ix_{n+i} = 0 \quad (i = 1,2,3)$$

$$x_j(a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 - c_j) = 0 \quad \text{vagy} \quad x_jy_{n+j} = 0 \quad (j = 1,2,3)$$

Komplementaritási tétel

Az erős dualitás tételnél több is tudunk mondani:

Komplementaritási tétel. Tegyük fel, hogy x a primál, y a duál feladat lehetséges megoldása. Az x és y akkor és csak akkor optimálisak, ha komplementárisak is.

Bizonyítás. Mivel x a primál, y a duál feladat lehetséges megoldása, igaz, hogy $x, y \geq 0$ és létezik $xs, ye \geq 0$ amire

$$Ax + Ixs = b \quad \text{és} \quad A^T y - Iye = c$$

Az első y^T -tal a másodikat x^T -tal balról szorozva

$$y^T Ax + y^T Ixs = y^T b \quad \text{és} \quad x^T A^T y - x^T Iye = x^T c$$

$$y^T Ax + y^T xs = y^T b \quad \text{és} \quad y^T Ax - ye^T x = c^T x$$

Egymásból kivonva az egyenleteket azt kapjuk, hogy

$$\cancel{y^T Ax} + y^T xs - \cancel{y^T Ax} + ye^T x = y^T b - c^T x$$

Komplementaritási tétel

$$\mathbf{y}^T \mathbf{x} \mathbf{s} + \mathbf{y} \mathbf{e}^T \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{b} - \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (*)$$

1. ha optimálisak, akkor $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{b}^T \mathbf{y}$, és a $(*)$ feltétel jobboldala 0. Mivel $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x} \mathbf{s}, \mathbf{y} \mathbf{e} \geq 0$, és

$\mathbf{y}^T \mathbf{x} \mathbf{s} + \mathbf{y} \mathbf{e}^T \mathbf{x} = y_1 x_{n+1} + \dots + y_m x_{n+m} + x_1 y_{m+1} + \dots + x_n y_{m+n}$,
tagonként is igaz, hogy mind 0, azaz komplementárisak.

2. ha komplementárisak, akkor a $(*)$ feltétel baloldala 0, amiből
 $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{b}^T \mathbf{y}$, vagyis optimálisak is.



Ebből az is következik, hogy ha $\mathbf{x}$ **primál optimális**, akkor igazak a következők:

- Ha $\mathbf{y}$ a **duál optimális** megoldása, akkor $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ **komplementárisak**
- **Létezik** olyan **lehetséges** $\mathbf{y}$ megoldása a duálnak, hogy $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ **komplementáris**. Ekkor $\mathbf{y}$ **optimális** is.

Komplementaritás

Tekintsük a következő feladatot:

$$\begin{array}{rcllclclcl} \text{Max } z = & 6x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & \\ \hline & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \leq 5 \\ & 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & \leq 8 \\ & & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = 1 \\ & & & & & & & x_1 & \text{nem korlátos} \\ & & & & & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 \end{array}$$

Azt szeretnénk ellenőrizni, hogy vajon a következők egyike optimális megoldás-e:

- $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0$
- $x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0$

Gondoljuk át, miért pont ezeket választottuk?

Komplementaritás: példa

Annak ellenőrzéséhez, hogy a javasolt megoldások valamelyik optimális-e, kellene fog a duális feladat:

$$\begin{array}{rcll}
 \text{Max} & z = & 6x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & \\
 \hline
 & & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \leq 5 \\
 & & 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & \leq 8 \\
 & & & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = 1 \\
 & & & & & & & & x_1 & \text{nem korlátos} \\
 & & & & & & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0
 \end{array}$$

Duál:

$$\begin{array}{rcll}
 \text{Min} & w = & 5y_1 & + & 8y_2 & + & y_3 & \\
 \hline
 & & y_1 & + & 3y_2 & & & = 6 \\
 & & 2y_1 & + & y_2 & + & y_3 & \geq 1 \\
 & & y_1 & - & y_2 & + & y_3 & \geq -1 \\
 & & y_1 & & & + & y_3 & \geq -1 \\
 & & & & y_1, & y_2 & \geq 0 \\
 & & & & & y_3 & \text{nem korlátos}
 \end{array}$$

Komplementáris lazaság: példa

Az **első javaslat**: $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0$; tegyük fel, hogy ez optimális

- Ekkor létezik $y = (y_1, y_2, y_3)$ lehetséges megoldása a duálisnak ami komplementáris x -szel
 - Az első primál feltétel: $x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 + 2 + 0 + 0 = 4 < 5$
nem éles $\rightarrow y_1 = 0$ kell legyen a komplementaritás miatt
 - A második primál feltétel: $3x_1 + x_2 - x_3 = 6 + 1 - 0 = 7 < 8$ **nem éles** $\rightarrow y_2 = 0$ kell legyen a komplementaritás miatt
 - Ezek alapján az első duál feltétel: $y_1 + 3y_2 = 0 + 0 = 0 \neq 6 \rightarrow$ azaz (y_1, y_2, y_3) **nem lehetséges** megoldása a duálnak, de feltettük, hogy az $\Rightarrow x$ **nem optimális** megoldása a primálnak

Komplementáris lazaság: példa

Az **második javaslat**: $x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0$; tegyük fel, hogy ez optimális

- Ekkor létezik $y = (y_1, y_2, y_3)$ lehetséges megoldása a duálisnak ami komplementáris x -szel
 - Az első primál feltétel: $x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 + 0 + 1 + 0 = 4 < 5$
nem éles $\rightarrow y_1 = 0$ kell legyen a komplementaritás miatt
 - A második primál feltétel: $3x_1 + x_2 - x_3 = 9 + 0 - 1 = 8$ **éles**
 - A harmadik primál feltétel: $x_2 + x_3 + x_4 = 0 + 1 + 0 = 1$ **éles**
 - Előjel feltételek is teljesülnek ($x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$) $\Rightarrow x$ **lehetséges** megoldása a primálnak

Komplementáris lazaság: példa

- Nézzünk meg az x értékeit a duálra vonatkozóan
 - x_1 pozitív $\rightarrow$ első duál feltétel $y_1 + 3y_2 = 6$ **éles** (szükségszerűen)
 - $x_3 > 0 \rightarrow$ a harmadik duál feltételnek **élesnek** kell legyen:
 $y_1 - y_2 + y_3 = -1$
- Összegezve az eddigieket:

$$y_1 = 0$$

$$y_1 + 3y_2 = 6$$

$$y_1 - y_2 + y_3 = -1$$

- Ennek az egyértelmű megoldása: $y_1 = 0, y_2 = 2, y_3 = 1$. A konstrukcióból adódóan ez komplementáris x -szel.
- Az utolsó lépés annak ellenőrzése, hogy y lehetséges megoldása-e a duálnak. Igen $\Rightarrow x$ **optimális** megoldása a primálnak, y a duálnak.

Komplementáris lazaság: összegzés

Összefoglalva:

- 1 Adott x (javasolt primál megoldás), ellenőrizzük, hogy lehetséges-e
- 2 Nézzük meg mely y_i változóknak kell 0-nak lennie
- 3 Nézzük meg mely duál feltételeknek kell élesnek lennie $\rightarrow$ egyenletrendszert kapunk
- 4 Oldjuk meg ezt a rendszert
- 5 Ellenőrizzük, hogy a kapott megoldás lehetséges megoldása-e a duálnak

Ha minden lépés sikeres volt, akkor az adott x optimális, különben nem.

Kérdés: mi van akkor, ha x lehetséges, de nem bázismegoldás?