

Fixpontos számok

Pl.: előjeles kétjegyű decimális számok :

- Ábrázolási tartomány: [-99, +99].
- Pontosság (két „szomszédos” szám különbsége): 1.
- Maximális hiba: (az ábrázolási tartományba eső) tetszőleges valós szám és a hozzá legközelebb lévő ábrázolható szám különbsége: 1/2.

Számolási pontatlanságok:

$$a = 70, b = 40, c = -30 \text{ esetén}$$

$$a + (b + c) = 80, \quad (a+b) + c = -20.$$

túlsordulás

Máté: Architektúrák

2. előadás

1

Helyértékes ábrázolás

$$\text{Pl.: } 521,25_{10} = 5 * 10^2 + 2 * 10^1 + 1 * 10^0 + 2 * 10^{-1} + 5 * 10^{-2}.$$

Általában (q alapú számrendszer esetén):

$$a_n a_{n-1} \dots a_0, b_1 b_2 \dots b_m = a_n * q^n + a_{n-1} * q^{n-1} + \dots + a_0 q^0 + b_1 * q^{-1} + b_2 * q^{-2} + \dots + b_m * q^{-m}$$

$$0 \leq a_i, b_j < q$$

Átszámolás számrendszerek között

Máté: Architektúrák

2. előadás

2

B: Bináris, O: Oktális, D: Decimális H: Hexadecimális

B	O	D	H	B	O	D	H
0	0	0	0	1000	10	8	8
1	1	1	1	1001	11	9	9
10	2	2	2	1010	12	10	A
11	3	3	3	1011	13	11	B
100	4	4	4	1100	14	12	C
101	5	5	5	1101	15	13	D
110	6	6	6	1110	16	14	E
111	7	7	7	1111	17	15	F

A.3. ábra része

Máté: Architektúrák

2. előadás

3

Pl. 23,375₁₀ átszámítása kettes számrendszer-be.

Egész rész osztással:

Tört rész szorzással:

/2	marad		egész	*2
23	1	↑		0.375
11	1		0	.750
5	1		1	.500
2	0		1	.000
1	1			

$$10111_2 \quad 0,011_2$$

$$23,375_{10} = 10111,011_2.$$

Véges tizedes tört nem biztos, hogy binárisan is véges!

Máté: Architektúrák

2. előadás

4

Példa bináris összeadásra:

1. összeadandó: 0 1 0 1 1 0 1 0 (= 90₁₀)

2. összeadandó: 0 1 1 1 1 1 0 0 (=124₁₀)

Átvitel: 1 1 1 1 0 0 0

Eredmény: 1 1 0 1 0 1 1 0 (=214₁₀)

Máté: Architektúrák

2. előadás

5

Átszámítás 10-es számrendszerbe

q alapú számrendszerből legegyszerűbben a Horner elrendezéssel alakíthatunk át számokat:

$$a_n * q^n + a_{n-1} * q^{n-1} + \dots + a_0 * q^0 + b_1 * q^{-1} + b_2 * q^{-2} + \dots + b_m * q^{-m} = (\dots((a_n * q + a_{n-1}) * q + \dots + a_1) * q + a_0 + (\dots((b_m / q + b_{m-1}) / q + \dots + b_1) / q$$

Máté: Architektúrák

2. előadás

6

A számítógép kettes számrendszerben dolgozik, 10-es számrendszerből a Horner elrendezéssel alakítja át a számokat. A formulában a_i -t, b_j -t és q -t kettes számrendszerben kell megadni.

Kettes számrendszerből 10-es számrendszerbe 10-zel való ismételt osztással állítja elő az egész részt, és 10-zel való ismételt szorzással állítja elő a tört részt – hasonlóan ahhoz, ahogy korábban bemutattuk a 10-es számrendszerből 2-esbe való átszámítást.

Máté: Architektúrák

2. előadás

7

Bit: egy bináris számjegy, vagy olyan áramkör, amely egy bináris számjegy ábrázolására alkalmas.

Bájt (Byte): 8 bites egység, 8 bites szám.

Előjeles fixpontok számok:

$2^8 = 256$ különböző 8 bites szám lehetséges.

Melyek jelentsenek negatív értékeket?

Előjeles számok szokásos ábrázolásai:

- előjeles abszolút érték,
- egyes komplement,
- kettes komplement,
- többletes.

Máté: Architektúrák

2. előadás

8

Előjeles abszolút érték:

előjel és abszolút érték,

az első bit (balról) az előjel: 0: +, 1: -

Pl.: $+25_{10} = 00011001_2$, $-25_{10} = 10011001_2$.

+

-

Jellemzők (8 bites szám esetén):

- a legkisebb szám -127, a legnagyobb 127,
- a nulla kétféleképpen ábrázolható.

Máté: Architektúrák

2. előadás

9

Egyes komplement:

az első bit az előjel (0: pozitív, 1: negatív).

Egy szám -1-szerese (negáltja) úgy kapható meg, hogy a szám minden bitjét negáljuk (ellenkezőjére változtatjuk).

Pl.: $+25_{10} = 00011001_2$,

$-25_{10} = 11100110_2$.

Jellemzők (8 bites szám esetén):

- a legkisebb szám -127, a legnagyobb 127,
- a nulla kétféleképpen ábrázolható.

Máté: Architektúrák

2. előadás

10

Kettes komplement:

az első bit az előjel (0: pozitív, 1: negatív).

Egy pozitív szám negáltja úgy kapható meg, hogy az egyes komplementhez egyet hozzáadunk.

Pl.: $+25_{10} = 00011001_2$,

$-25_{10} = 11100110_2$ egyes komplement,

$-25_{10} = 11100111_2$ kettes komplement.

Jellemzők (8 bites szám esetén):

- a legkisebb szám -128, a legnagyobb 127,
- a nulla egyértelműen ábrázolható.

Máté: Architektúrák

2. előadás

11

Többletes: a szám és a többlet összegét ábrázoljuk előjel nélkül (ez már pozitív!). m bites szám esetén a többlet általában 2^{m-1} vagy $2^{m-1} - 1$

Pl.: $+25_{10} = 10011001_2$, 128-többletes ábrázolás

$-25_{10} = 01100111_2$ 128-25=103

Jellemzők (128 többlet esetén):

- a legkisebb szám -128, a legnagyobb 127,
- a nulla egyértelműen ábrázolható.

Megjegyzés: a 2^{m-1} többletes ábrázolás azonos a kettes komplementtel fordított előjellel.

Használata: a lebegőpontos számok kitevő-részénél.

Máté: Architektúrák

2. előadás

12

A legkisebb pozitív (single) normalizált szám:
 $2^{-126} = 2^{-126} * 1,000 \dots 0000_2 =$
 $= \underbrace{0000 \ 0000 \ 1000 \dots 0000}_2 = 0080 \ 0000_{16}$
 \pm kitevőrész *1.* törtrész

A legnagyobb pozitív (single) normalizálatlan szám:
 $2^{-126} * 0,111 \dots 1111_2 =$
 $= \underbrace{0000 \ 0000 \ 0111 \dots 1111}_2 = 007F \ FFFF_{16}$
 \pm kitevőrész *0.* törtrész
 $\approx 2^{-126}$

A különbségük csupán 2^{-149} .

Máté: Architektúrák 2. előadás 19

Normalizálatlan számok (IEEE 754, single)

Ha a kitevőrész = 255

Túl nagy számok (túlsordulás):

- ∞ (végtelen): pl. $1/0$,
- NaN** (Not a Number): pl. ∞ / ∞

Máté: Architektúrák 2. előadás 20

Normalizált	\pm	$0 < \text{kitevőrész} < \text{Max}$	bitminta
Nem normalizált	\pm	0	nem nulla bitminta
Nulla	\pm	0	0
Végtelen	\pm	111...1	0
Nem szám	\pm	111...1	nem nulla bitminta

B.6. ábra. IEEE numerikus típusok

Máté: Architektúrák 2. előadás 21

Digitális logikai szint

Digitális áramkör: két érték – általában 0-1 volt között az egyik (pl. 0, hamis), 2-5 volt között a másik (1, igaz).

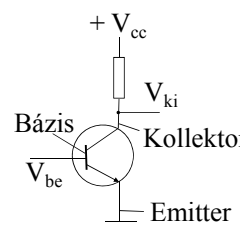
Más feszültségeket nem engednek meg.

Kapu (gate): kétértékű jelek valamilyen függvényét tudja meghatározni.

Kapcsolási idő néhány ns (nanoszekundum = 10^{-9} s)

Máté: Architektúrák 2. előadás 22

Tranzisztor



Ha $V_{be} = \text{föld}$, akkor a tranzisztor szigetel $\Rightarrow V_{ki} = V_{cc}$

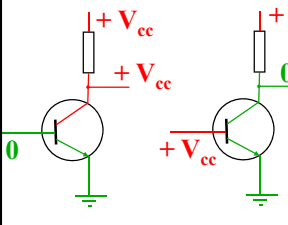
Ha $V_{be} = V_{cc}$, akkor a tranzisztor vezet $\Rightarrow V_{ki} = \text{föld}$

Az igaz és hamis, az 1 és 0 kétféle reprezentációja:

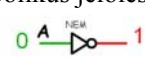
- $V_{cc} = \text{igaz} = 1$, föld = hamis = 0 (pozitív logika),
- $V_{cc} = \text{hamis} = 0$, föld = igaz = 1 (negatív logika).

Máté: Architektúrák 2. előadás 23

NEM (NOT) kapu, inverter (3.1-2. ábra, 3.2a.swf)



Szimbolikus jelölése:



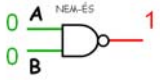
Igazság tábla:

A	X
0	1
1	0

erősítő **Inverziós gömb**

Máté: Architektúrák 2. előadás 24

NEM-ÉS (NAND) kapu (3.1-2. ábra, 3.2b.swf)

Szimbolikus jelölése: 

Igazság tábla:

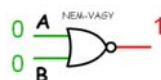
A	B	X
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Visszalép
Előrelép

(b)

Máté: Architektúrák 2. előadás 25

NEM-VAGY (NOR) kapu (3.1-2. ábra, 3.2c.swf)

Szimbolikus jelölése: 

Igazság tábla:

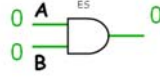
A	B	X
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Visszalép
Előrelép

(c)

Máté: Architektúrák 2. előadás 26

ÉS (AND) kapu (3.2. ábra, 3.2d.swf)

Szimbolikus jelölése: 

Igazság tábla:

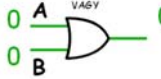
A	B	X
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Visszalép
Előrelép

(d)

Máté: Architektúrák 2. előadás 27

VAGY (OR) kapu (3.2. ábra, 3.2e.swf)

Szimbolikus jelölése: 

Igazság tábla:

A	B	X
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Visszalép
Előrelép

(e)

Máté: Architektúrák 2. előadás 28

Boole-algebra

Olyan algebra, amelynek változói és függvényei csak a 0, 1 értéket veszik fel, a műveletei:

- **ÉS** (konjunkció),
- **VAGY** (diszjunkció),
- **NEM** (negáció).

Igazságtábla: olyan táblázat, amely a változók összes lehetséges értéke mellett megadja a függvény vagy kifejezés értékét.

Máté: Architektúrák 2. előadás 29

Pl. 3 változós többségi függvény (3.3. ábra):
értéke 1, ha legalább két argumentuma 1

Igazság tábla:

A	B	C	M
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Boole-algebrai alakja
(diszjunktív normálforma)

$$M = \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC$$

A fölülvonás a **NEM** (negáció), az egymás mellé írás az **ÉS**, a + a **VAGY** művelet jele.

Máté: Architektúrák 2. előadás 30

Boole-függvény megvalósításának lépései (3.3. ábra):
 $M = \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC$ 3.3.swf

Igazság tábla	Negált értékek	ÉS kapuk bemenetei	ÉS kapuk	VAGY kapu	Kimenet
A B C M					
0 0 0 0					
0 0 1 0					
0 1 0 0					
0 1 1 1					
1 0 0 0					
1 0 1 1					
1 1 0 1					
1 1 1 1					

3.3. ábra. Háromváltozós többségi függvény

Máté: Architektúrák 2. előadás 31

NAND és NOR előnye: teljesség (3.4. ábra, 3.4.swf)
 3.4 ábra. a) NEM b) ÉS c) VAGY kapuk csak NEM-ÉS vagy csak NEM-VAGY kapukkal történő megvalósítása

(a) (b) (c)

Máté: Architektúrák 2. előadás 32

Definíció: Akkor mondjuk, hogy két Boole-függvény **ekvivalens**, ha az összes lehetséges bemenetre a két függvény azonos kimenetet ad.

Két Boole-függvény ekvivalenciája könnyen ellenőrizhető az igazság táblájuk alapján.

Pl.: $AB + AC$ és $A(B + C)$ ekvivalens (3.5. ábra).

Az első függvény megvalósításához két **ÉS** és egy **VAGY** kapura van szükség, a másodikhoz elegendő egy **ÉS** és egy **VAGY** kapu.

Máté: Architektúrák 2. előadás 33

Néhány azonosság (3.6. ábra, 3.6.swf)

Név	ÉS forma	VAGY forma
Identitás szabály	$1A = A$	$0 + A = A$
Nullszabály	$0A = 0$	$1 + A = 1$
Idempotens szabály	$AA = A$	$A + A = A$
Inverz szabály	$A\bar{A} = 0$	$A + \bar{A} = 1$
Kommutatív szabály	$AB = BA$	$A + B = B + A$
Asszociatív szabály	$(AB)C = A(BC)$	$(A + B) + C = A + (B + C)$
Disztribúciós szabály	$A + BC = (A + B)(A + C)$	$A(B + C) = AB + AC$
Abszorpció szabály	$A(A + B) = A$	$A + AB = A$
De Morgan-szabály	$\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$	$\overline{A + B} = \bar{A}\bar{B}$

Máté: Architektúrák 2. előadás 34

Disztribúciós szabály:

$$A + (BC) = (A + B)(A + C)$$

Jelölje az **ÉS** műveletet \wedge , a **VAGY** műveletet \vee , akkor

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

Máté: Architektúrák 2. előadás 35

3.10. ábra SSI lapka négy NAND kapuval
 V_{cc} : feszültség, GND : föld.

Máté: Architektúrák 2. előadás 36

Kíváncsi: sok kapu – kevés láb

Kombinációs áramkörök

Definíció:
A pillanatnyi bemenetek egyértelműen meghatározzák a kimeneteket.

Máté: Architektúrák 2. előadás 37

- Multiplexer:** n vezérlő bemenet, 2^n adatbemenet, 1 kimenet. Az egyik adatbemenet kapuzott (gated) a kimenetre (3.11-12. ábra, 3.11.swf).

3.11. ábra Nyolcbemenetes multiplexer áramkör

A	B	C	F
0	0	0	D ₀
0	0	1	D ₁
0	1	0	D ₂
0	1	1	D ₃
1	0	0	D ₄
1	0	1	D ₅
1	1	0	D ₆
1	1	1	D ₇

Sematikus rajza

Máté: Architektúrák 2. előadás 38

n vezérlő bemenetű multiplexerrel tetszés szerinti n változós Boole-függvény megvalósítható az adatbemenetek megfelelő választásával. Pl. a 3 változós többségi függvény:

3.12. ábra. MSI multiplexer úgy huzalozva, hogy többségi függvényt számoljon

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Párhuzamos-soros átalakítás: vezérlő vonalakon rendre: 000, 001, ... 111.

Máté: Architektúrák 2. előadás 39

- Demultiplexer:** egy egyedi bemenetet irányít az n vezérlő bemenet értékétől függően a 2^n kimenet egyikére, a többi kimenet 0.

3.11. ábra Nyolcbemenetes multiplexer áramkör

A	B	C	F ₀	F ₁	F ₂	F ₃	F ₄	F ₅	F ₆	F ₇
0	0	0	D	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	D	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	D	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	D	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	D	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	D	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	D	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	D

Multiplexer demultiplexer dem.swf

Máté: Architektúrák 2. előadás 40

- Dekódoló:** n bemenet, 2^n kimenet. Pontosán egy kimeneten lesz 1, a többin 0 (3.13. ábra, 3.13.swf). Demultiplexerrel: a bemenetet igazra állítjuk.

3.13. ábra. 3-nél B-né dekkódoló áramkör

A	B	C	D ₀	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	D ₅	D ₆	D ₇
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

demultiplexer dekkódoló

Máté: Architektúrák 2. előadás 41

- Összehasonlító (comparator):** (3.14. ábra, 3.14.swf)

KIZÁRÓ VAGY

(XOR eXclusive OR) kapu

Igazság tábla:

A	B	X
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Szimbolikus jelölése

Máté: Architektúrák 2. előadás 42

Feladatok

Mi a bit?

Mi a bájt (byte)?

Konvertáljuk a következő számokat bináris számokká:
1984, 4000, 8192

Hány különböző pozitív egész szám fejezhető ki k számjegy segítségével r alapszám esetén?

Máté: Architektúrák

2. előadás

43

Feladatok

Hajtsuk végre a következő számításokat 8 bites kettes komplementű számokon:

$00101101 + 01101111$,

$11111111 + 11111111$,

$00000000 - 11111111$,

$11110111 - 11110111$.

Máté: Architektúrák

2. előadás

44

Feladatok

Mit tud az IEEE 754 standardról?

Konvertáljuk a következő számokat IEEE egyszeres pontosságúba! Az eredményt 8 jegyű hexadecimális számként adjuk meg: 9 , $5/32$, $-5/32$, $6,125$.

Konvertáljuk a következő egyszeres pontosságú IEEE lebegőpontos számokat decimális számokká:
 $42E48000H$, $3F880000H$, $00800000H$, $C7F00000H$.

Mikor fordul elő, hogy két lebegőpontos számon végrehajtott művelet eredményénél a szignifikáns jegyek száma drasztikusan csökken?

Máté: Architektúrák

2. előadás

45

Feladatok

Mi az igazság tábla? Írja fel a **NEM**, **ÉS**, **VAGY**, **NAND**, **NOR**, **XOR** művelet igazság tábláját!

Mi a Bool algebra?

Írja fel a 3 változós többségi függvény igazság tábláját és Bool-algebrai alakját!

Mikor mondunk két Boole-függvényt equivalentnek?

Hogy valósítható meg egy Boole-függvény?

Mit jelent a **NAND** és **NOR** művelet teljessége?

Írja föl a Boole-algebra legfontosabb azonosságait!

Mit jelent az áramkörü ekvivalencia?

Írja fel a De Morgan szabályt!

Máté: Architektúrák

2. előadás

46

Az előadáshoz kapcsolódó

Fontosabb tételek

Numerikus adatok ábrázolása: fixpontos ábrázolás, konverzió számrendszerek között. Negatív számok ábrázolásai

Lebegőpontos számok. IEEE 754 szabvány

Digitális logikai szint. Kapuk. Boole algebra. Boole függvények megvalósítása, áramkörü ekvivalenciája. A Boole algebra legfontosabb azonosságai, dualitás

Kombinációs áramkörök, multiplexer, demultiplexer, dekódoló, összehasonlító

Máté: Architektúrák

2. előadás

47