

Fixpontos számok

Pl.: előjeles kétjegyű decimális számok :

- Ábrázolási tartomány: [-99, +99].
- Pontosság (két „szomszédos” szám különbsége): 1.
- Maximális hiba: (az ábrázolási tartományba eső) tetszőleges valós szám és a hozzá legközelebb lévő ábrázolható szám különbsége: 1/2.

Számolási pontatlanságok:

a = 70, b = 40, c = -30 esetén

a + (b + c) = 80,	(a+b) + c = -20.
70 + 10	110 - 20

túlcsondulás

Máté: Architektúrák 2. előadás 1

Helyértékes ábrázolás

Pl.: $521,25_{10} = 5 * 10^2 + 2 * 10^1 + 1 * 10^0 + 2 * 10^{-1} + 5 * 10^{-2}$

Általában (q alapú számrendszer esetén):

$$a_n a_{n-1} \dots a_0, b_1 b_2 \dots b_m = a_n * q^n + a_{n-1} * q^{n-1} + \dots + a_0 q^0 + b_1 * q^{-1} + b_2 * q^{-2} + \dots + b_m * q^{-m}$$

$0 \leq a_i, b_j < q$

Átszámolás számrendszerek között

Máté: Architektúrák 2. előadás 2

B: Bináris, O: Oktális, D: Decimális H: Hexadecimális

B	O	D	H	B	O	D	H
0	0	0	0	1000	10	8	8
1	1	1	1	1001	11	9	9
10	2	2	2	1010	12	10	A
11	3	3	3	1011	13	11	B
100	4	4	4	1100	14	12	C
101	5	5	5	1101	15	13	D
110	6	6	6	1110	16	14	E
111	7	7	7	1111	17	15	F

A.3. ábra része

Máté: Architektúrák 2. előadás 3

Pl. $23,375_{10}$ átszámítása kettes számrendszer-be.

$$a_n * 2^n + a_{n-1} * 2^{n-1} + \dots + a_0 2^0 + b_1 * 2^{-1} + b_2 * 2^{-2} + \dots + b_m * 2^{-m}$$

Egész rész osztással: Tört rész szorzással:

/2	marad		egész	*2	
23	1	↑			0.375
11	1		0	↓	.750
5	1		1		.500
2	0		1		.000
1	1				

10111_2 $0,011_2$

$23,375_{10} = 10111,011_2$

Véges tizedes tört nem biztos, hogy binárisan is véges!

Máté: Architektúrák 2. előadás 4

Példa bináris összeadásra:

- összeadandó: $01011010 (= 90_{10})$
- összeadandó: $01111100 (= 124_{10})$

Átvitel: 1111000

Eredmény: $11010110 (= 214_{10})$

Máté: Architektúrák 2. előadás 5

Átszámítás 10-es számrendszerbe

q alapú számrendszerből legegyszerűbben a Horner elrendezéssel alakíthatunk át számokat:

$$a_n * q^n + a_{n-1} * q^{n-1} + \dots + a_0 * q^0 + b_1 * q^{-1} + b_2 * q^{-2} + \dots + b_m * q^{-m} =$$

$$(\dots (a_n * q + a_{n-1}) * q + \dots + a_1) * q + a_0 +$$

$$(\dots (b_m / q + b_{m-1}) / q + \dots + b_1) / q$$

Máté: Architektúrák 2. előadás 6

BCD (Binary Coded Decimal) ábrázolás: minden decimális számjegyet négy biten ábrázolunk.

Negatív számok BCD ábrázolása: 9 vagy 10 komplementes kóddal.

Pl.: $+301_{10} = 0000\ 0011\ 0000\ 0001$,
 $-301_{10} = 1001\ 0110\ 1001\ 1000$ (9 komplementes),
 $-301_{10} = 1001\ 0110\ 1001\ 1001$ (10 komplementes).

Máté: Architektúrák

2. előadás

13

Lebegőpontos számok

előjel karakterisztika törtrész

Sok ekvivalens ábrázolási lehetőség, leggyakrabban a törtrész első számjegye az adott szám első nullától különböző számjegye (normalizált alak).

Példa: $254 = 0,0254 \times 10^4 = \mathbf{0,254 \times 10^3} (= \mathbf{2,54 \times 10^2})$.

Megjegyzések:

- A nulla ábrázolásához külön megállapodásra van szükség (általában csupa nulla számjegyből áll).
- A lebegőpontos ábrázolásoknál is meghatározható a legkisebb és a legnagyobb ábrázolható szám, továbbá a legnagyobb hiba.

Máté: Architektúrák

2. előadás

14

Feladat: Ábrázoljuk nyolcas számrendszerben 254_{10} -et előjellel kezdve, a kitevő legyen 1 jegyű (3 bites), 4-többlletes, a törtrész 4 jegyű.

Megoldás: $254/8 \quad 6$
 $31/8 \quad 7$
 $3/8 \quad 3$

376_8 , normalizált alak: $0,376 \times 8^3$,
a megoldás: $0\ 111\ 011\ 111\ 110\ 000_2 = 073760_8$
 $\quad \quad \quad + \quad \quad \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_{\text{törtrész}}$
4-többlletes kitevőrész

Máté: Architektúrák

2. előadás

15

IEEE 754 standard

single 32 bites, double 64 bites (, extended 80 bites).

típus	előjel	kitevőrész	törtrész
single	1 bit	8 bit 127-többlletes	23 bit
double	1 bit	11 bit 1023-többlletes	52 bit

single: Ha $0 < a$ kitevőrész < 255 , a szám normalizált.
Normalizált tört vezető 1-es bitje nincs ábrázolva!

Máté: Architektúrák

2. előadás

16

Normalizált számok (IEEE 754, single)

$0 < \text{kitevőrész} < 255$

kitevőrész = kitevő + 127, **127 többlletes.**

Lehetséges kitevők: -126, -125, ..., +127.

Közvetlenül a törtrész elé kell képzelni egy **1**-est (**implicit bit**) és a bináris pontot.

Az ábrázolt szám: $\pm (1 + \text{törtrész}) \cdot 2^{\text{kitevő}}$
Pl.: $1\ 0011\ 1111\ 1000 \dots 0000_2 = 3F80\ 0000_{16}$
 $0,5\ 0011\ 1111\ 0000 \dots 0000_2 = 3F00\ 0000_{16}$
 $-1,5\ 1011\ 1111\ 1100 \dots 0000_2 = BFC0\ 0000_{16}$
 $\pm \text{kitevőrész } 1. \text{ törtrész}$

Máté: Architektúrák

2. előadás

17

Normalizálatlan számok (IEEE 754, single)

Ha a kitevőrész = 0

Ilyenkor a kitevő **-126** (! nem 127),
a bináris pontot implicit **0** előzi meg (nincs ábrázolva).

Az ábrázolt szám: $\pm (\text{törtrész}) \cdot 2^{-126}$

Pl.: $2^{-127} = 2^{-126} \cdot 0,100 \dots 0000_2 =$
 $= 0000\ 0000\ 0100 \dots 0000_2 = 0040\ 0000_{16}$
 $\pm \text{kitevőrész } 0. \text{ törtrész } (2^{-1})$
 $- 2^{-149} = - 2^{-126} \cdot 0,000 \dots 0001_2 =$
 $= 1000\ 0000\ 0000 \dots 0001_2 = 8000\ 0001_{16}$
 $\pm \text{kitevőrész } 0. \text{ törtrész } (2^{-23})$
kitevő = -126

Máté: Architektúrák

2. előadás

18

A legkisebb pozitív (single) normalizált szám:
 $2^{-126} = 2^{-126} * 1,000 \dots 0000_2 =$
 $= \underbrace{0000 \ 0000 \ 1000 \ \dots \ 0000}_2 = 0080 \ 0000_{16}$
 ± kitevőrész 1. törtrész

A legnagyobb pozitív (single) normalizálatlan szám:
 $2^{-126} * 0,111 \dots 1111_2 =$
 $= \underbrace{0000 \ 0000 \ 0111 \ \dots \ 1111}_2 = 007F \ FFFF_{16}$
 ± kitevőrész 0. törtrész
 $\approx 2^{-126}$

A különbségük csupán 2^{-149} .

Máté: Architektúrák 2. előadás 19

Normalizálatlan számok (IEEE 754, single)

Ha a kitevőrész = 255

Túl nagy számok (túlcsordulás):

- ∞ (végtelen): pl. 1/0,
- **NaN** (Not a Number): pl. ∞ / ∞

Máté: Architektúrák 2. előadás 20

Normalizált	±	0 < kitevőrész < Max	bitminta
Nem normalizált	±	0	nem nulla bitminta
Nulla	±	0	0
Végtelen	±	111...1	0
Nem szám	±	111...1	nem nulla bitminta

B.6. ábra. IEEE numerikus típusok

Máté: Architektúrák 2. előadás 21

Digitális logikai szint

Digitális áramkör: két érték – általában 0-1 volt között az egyik (pl. 0, hamis), 2-5 volt között a másik (1, igaz).

Más feszültségeket nem engednek meg.

Kapu (gate): kétértékű jelek valamilyen függvényét tudja meghatározni.
 Kapcsolási idő néhány ns (nanoszekundum = 10^{-9} s)

Máté: Architektúrák 2. előadás 22

Tranzisztor

Ha $V_{be} = \text{föld}$, akkor a tranzisztor szigetel $\Rightarrow V_{ki} = V_{cc}$

Ha $V_{be} = V_{cc}$, akkor a tranzisztor vezet $\Rightarrow V_{ki} = \text{föld}$

Az igaz és hamis, az 1 és 0 kétféle reprezentációja:

- $V_{cc} = \text{igaz} = 1$, föld = hamis = 0 (pozitív logika),
- $V_{cc} = \text{hamis} = 0$, föld = igaz = 1 (negatív logika).

Máté: Architektúrák 2. előadás 23

NEM (NOT) kapu, inverter (3.1-2. ábra, 3.2a.swf)

Szimbolikus jelölése:

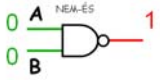
Igazság tábla:

A	X
0	1
1	0

erősítő **Inverziós gömb**

Máté: Architektúrák 2. előadás 24

NEM-ÉS (NAND) kapu (3.1-2. ábra, 3.2b.swf)

Szimbolikus jelölése: 

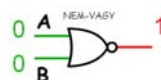
Igazság tábla:

A	B	X
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Visszalép
Előrelép
(b)

Máté: Architektúrák 2. előadás 25

NEM-VAGY (NOR) kapu (3.1-2. ábra, 3.2c.swf)

Szimbolikus jelölése: 

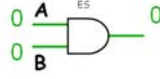
Igazság tábla:

A	B	X
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Visszalép
Előrelép
(c)

Máté: Architektúrák 2. előadás 26

ÉS (AND) kapu (3.2. ábra, 3.2d.swf)

Szimbolikus jelölése: 

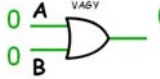
Igazság tábla:

A	B	X
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Visszalép
Előrelép
(d)

Máté: Architektúrák 2. előadás 27

VAGY (OR) kapu (3.2. ábra, 3.2e.swf)

Szimbolikus jelölése: 

Igazság tábla:

A	B	X
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Visszalép
Előrelép
(e)

Máté: Architektúrák 2. előadás 28

Boole-algebra

Olyan algebra, amelynek változói és függvényei csak a 0, 1 értéket veszik fel, a műveletei:

- **ÉS** (konjunkció),
- **VAGY** (diszjunkció),
- **NEM** (negáció).

Igazságtábla: olyan táblázat, amely a változók összes lehetséges értéke mellett megadja a függvény vagy kifejezés értékét.

Máté: Architektúrák 2. előadás 29

Pl. 3 változós többségi függvény (3.3. ábra): értéke 1, ha legalább két argumentuma 1

Igazság tábla:

A	B	C	M
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Boole-algebrai alakja (diszjunktív normálforma)

$$M = \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC$$

A fölülvonás a **NEM** (negáció), az egymás mellé írás az **ÉS**, a + a **VAGY** művelet jele.

Máté: Architektúrák 2. előadás 30

Boole-függvény megvalósításának lépései (3.3. ábra):
 $M = \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC$ **3.3.swf**

Igazság tábla

A	B	C	M
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Negált értékek

ÉS kapuk bemenetei

ÉS kapuk

VAGY kapu

Kimenet

3.3. ábra. Háromváltozós többségi függvény

Máté: Architektúrák 2. előadás 31

NAND és NOR előnye: teljesség (3.4. ábra, 3.4.swf)
 3.4 ábra. a) NEM b) ÉS c) VAGY kapuk csak NEM-ÉS vagy csak NEM-VAGY kapukkal történő megvalósítása

(a) NEM-ÉS kapuk: \bar{A} and $\bar{A}\bar{B}$

(b) ÉS kapu: AB

(c) VAGY kapu: $A+B$

(a) (b) (c)

Máté: Architektúrák 2. előadás 32

Definíció: Akkor mondjuk, hogy két Boole-függvény **ekvivalens**, ha az összes lehetséges bemenetre a két függvény azonos kimenetet ad.

Két Boole-függvény ekvivalenciája könnyen ellenőrizhető az igazság táblájuk alapján.

Pl.: $AB + AC$ és $A(B + C)$ ekvivalens (3.5. ábra).

Az első függvény megvalósításához két **ÉS** és egy **VAGY** kapura van szükség, a másodikhoz elegendő egy **ÉS** és egy **VAGY** kapu.

Máté: Architektúrák 2. előadás 33

A Bool-algebra legfontosabb azonosságai (3.6. ábra)

Név	ÉS forma	VAGY forma
Identitás szabály	$1A = A$	$0 + A = A$
Nullszabály	$0A = 0$	$1 + A = 1$
Idempotens szabály	$AA = A$	$A + A = A$
Inverz szabály	$A\bar{A} = 0$	$A + \bar{A} = 1$
Kommutatív szabály	$AB = BA$	$A + B = B + A$
Asszociatív szabály	$(AB)C = A(BC)$	$(A + B) + C = A + (B + C)$
Disztribúciós szabály	$A + BC = (A + B)(A + C)$	$A(B + C) = AB + AC$
Abszorpciósi szabály	$A(A + B) = A$	$A + AB = A$
De Morgan-szabály	$\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$	$\overline{A + B} = \bar{A}\bar{B}$

Máté: Architektúrák 2. előadás **3.6.swf** 34

Disztribúciós szabály:

$$A+(BC)=(A+B)(A+C)$$

Jelölje az **ÉS** műveletet \wedge , a **VAGY** műveletet \vee , akkor

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

Máté: Architektúrák 2. előadás 35

3.10. ábra SSI lapka négy **NAND** kapuval

V_{cc} : feszültség, **GND**: föld.

Máté: Architektúrák 2. előadás 36

Kíváncsi: sok kapu – kevés láb

Kombinációs áramkörök

Definíció:
A pillanatnyi bemenetek egyértelműen meghatározzák a kimeneteket.

Máté: Architektúrák 2. előadás 37

- Multiplexer:** n vezérlő bemenet, 2^n adatbemenet, **1** kimenet. Az egyik adatbemenet kapuzott (gated) a kimenetre (3.11-12. ábra, 3.11.swf).

3.11. ábra Nyolcbemenetes multiplexer áramkör

Máté: Architektúrák 2. előadás 38

n vezérlő bemenetű multiplexerrel tetszés szerinti n változós Boole-függvény megvalósítható az adatbemenetek megfelelő választásával. Pl. a 3 változós többségi függvény:

3.12. ábra. MSI multiplexer úgy huzalozva, hogy többségi függvényt számoljon

3.12.swf

Párhuzamos-soros átalakítás: vezérlő vonalakon rendre: 000, 001, ... 111.

Máté: Architektúrák 2. előadás 39

- Demultiplexer:** egy egyedi bemenetet irányít az n vezérlő bemenet értékétől függően a 2^n kimenet egyikére, a többi kimenet 0.

Nyolckimenetes demultiplexer áramkör (Az ábra nincs a könyvben)

3.11. ábra Nyolcbemenetes multiplexer áramkör

3.11. ábra Nyolckimenetes demultiplexer áramkör

Multiplexer demultiplexer dem.swf

Máté: Architektúrák 2. előadás 40

- Dekódoló:** n bemenet, 2^n kimenet. Pontosán egy kimeneten lesz 1, a többin 0 (3.13. ábra, 3.13.swf). Demultiplexerrel: a bemenetet igazra állítjuk.

3.13. ábra. 3-nél B-n dekodáló áramkör

demultiplexer dekodoló

Máté: Architektúrák 2. előadás 41

- Összehasonlító (comparator):** (3.14. ábra, 3.14.swf)

KIZÁRÓ VAGY

(XOR exclusive OR) kapu

Igazság tábla:

A	B	X
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Szimbolikus jelölése

3.14. ábra Egyszerű 4 bites összehasonlító

Máté: Architektúrák 2. előadás 42

Feladatok

Mi a bit?

Mi a bájt (byte)?

Konvertáljuk a következő számokat bináris számokká:
1984, 4000, 8192

Hány különböző pozitív egész szám fejezhető ki k számjegy segítségével r alapszám esetén?

Máté: Architektúrák

2. előadás

43

Feladatok

Hajtsuk végre a következő számításokat 8 bites kettes komplementű számokon:

$00101101 + 01101111$,

$11111111 + 11111111$,

$00000000 - 11111111$,

$11110111 - 11110111$.

Máté: Architektúrák

2. előadás

44

Feladatok

Mit tud az IEEE 754 standardról?

Konvertáljuk a következő számokat IEEE egyszeres pontosságúba! Az eredményt 8 jegyű hexadecimális számként adjuk meg: 9, 5/32, -5/32, 6,125.

Konvertáljuk a következő egyszeres pontosságú IEEE lebegőpontos számokat decimális számokká:
42E48000H, 3F880000H, 00800000H, C7F00000H.

Mikor fordul elő, hogy két lebegőpontos számon végrehajtott művelet eredményénél a szignifikáns jegyek száma drasztikusan csökken?

Máté: Architektúrák

2. előadás

45

Feladatok

Mi az igazság tábla? Írja fel a **NEM**, **ÉS**, **VAGY**, **NAND**, **NOR**, **XOR** művelet igazság tábláját!

Mi a Bool algebra?

Írja fel a 3 változós többségi függvény igazság tábláját és Bool-algebrai alakját!

Mikor mondunk két Boole-függvényt equivalentnek?

Hogy valósítható meg egy Boole-függvény?

Mit jelent a **NAND** és **NOR** művelet teljessége?

Írja föl a Boole-algebra legfontosabb azonosságait!

Mit jelent az áramköri ekvivalencia?

Írja fel a De Morgan szabályt!

Máté: Architektúrák

2. előadás

46

Az előadáshoz kapcsolódó**Fontosabb témák**

Numerikus adatok ábrázolása: fixpontos ábrázolás, konverzió számrendszerek között. Negatív számok ábrázolásai

Lebegőpontos számok. IEEE 754 szabvány

Digitális logikai szint. Kapuk. Boole algebra. Boole függvények megvalósítása, áramköri ekvivalenciája. A Boole algebra legfontosabb azonosságai, dualitás

Kombinációs áramkörök, multiplexer, demultiplexer, dekódoló, összehasonlító

Máté: Architektúrák

2. előadás

47