

8. gyakorlat Dualitás

Az eddigi ismereteinket fogjuk bővíteni egy felülről történő korlátozás segítségével. Így például egy gyár nem tehet végtelen profitra szert. A feladatainkat más szemszögből is vizsgálhatjuk.

1. Feladat

Hétvégén elmegyünk nagymamához. 7 órát tudunk maximum nála tölteni, mialatt segítünk neki a befőzésben. Barack és meggy lekvárt készítünk, melyek mindegyikéért 2-1 adag sütit kapunk jutalmul. Viszont csak 5 üveg van a nagyinál. Valamint tudjuk, hogy a barackot 1 órán keresztül magozzuk, hogy egy üvegre való összegyűljön, míg a kisebb méretű meggyet 3 órán át magozzuk egy üveghez. Célunk, hogy ez a 7 óra alatt minél több sütit gyűjtsünk össze.

Írjuk fel a feladat modelljét:

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\ x_1 & + & 3x_2 & \leq & 7 \\ \hline 2x_1 & + & x_2 & \rightarrow & \max. \end{array}$$

Oldjuk meg a feladatot a már ismert módszerrel:

$$\begin{array}{rclcl} x_3 & = & 5 & - & x_1 & - & x_2 \\ x_4 & = & 7 & - & x_1 & - & 3x_2 \\ z(x) & = & 0 & + & 2x_1 & + & x_2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rclcl} x_1 & = & 5 & - & x_2 & - & x_3 \\ x_4 & = & 2 & + & 2x_2 & + & x_3 \\ z(x) & = & 10 & - & x_2 & - & 2x_3 \end{array} \quad \text{Primál feladat}$$

Optimális megoldás:

- $x_1 = 5 \rightarrow$ vagyis 5 üveget kell barackkal megtöltenünk
- $x_2 = 0 \rightarrow$ vagyis 0 üveget kell meggyel megtöltenünk
- és így 10 sütit kapunk

Bővítés: Vezessünk be felső korlátot $\rightarrow$ Duál feladatpár felírása:

Először próbálkozzunk magunk új korlátok felírásával:

Adjuk össze az eddigi feltételeinket: $2x_1 + 4x_2 \leq 12$

$\rightarrow$ erről az új feltételről tudjuk, hogy felülről korlátozza a célfüggvényünket.

Tehát például:

I. + II. egyenlet: $2x_1 + x_2 \leq 2x_1 + 4x_2 \leq 12$

2-szer az I. egyenlet: $2x_1 + x_2 \leq 2x_1 + 2x_2 \leq 10$

Most a feltételeinket vegyük valamilyen y_1 és y_2 "súllyal", melyekből majd a duális feladat változóit kapjuk meg. Ezt így írhatjuk le:

$$2x_1 + x_2 \leq y_1(x_1 + x_2) + y_2(x_1 + 3x_2)$$

Majd emeljük ki az x-eket. Így az y-os tagokból megkapjuk az új feladat korlátait. Melyekre majd annak kell teljesülnie, hogy ezek legyenek $\geq$ -k, mint a célfüggvény együtthatói:

$$y_1(x_1 + x_2) + y_2(x_1 + 3x_2) = x_1(y_1 + y_2) + x_2(y_1 + 3y_2)$$

És végezetül. Állítsuk elő az új célfüggvényünket:

- I. feltétel: $x_1 + x_2 \leq 5$
- II. feltétel: $x_1 + 3x_2 \leq 7$
- Helyettesítsünk be az elsőként felírt egyenlőtlenségbe:
 $y_1(x_1 + x_2) + y_2(x_1 + 3x_2) \leq 5y_1 + 7y_2$

Összesítve:

$$2x_1 + x_2 \leq y_1(x_1 + x_2) + y_2(x_1 + 3x_2) = x_1(y_1 + y_2) + x_2(y_1 + 3y_2) \leq 5y_1 + 7y_2$$

Duális feladat:

$$\begin{array}{rclcl} y_1 & + & y_2 & \geq & 2 \\ y_1 & + & 3y_2 & \geq & 1 \\ \hline 5y_1 & + & 7y_2 & \rightarrow & \min. \end{array}$$

Vegyük észre, hogy a primál feladat mátrixaiban egy transzponálás történt a duális felírásakor. Vagyis ami a primálban egy sorban szerepelt, azt a duális felírásakor oszlopként szerepeltetjük. Másképpen: ha a duális feladatot írjuk fel, akkor a primál feladatot oszlopként kell átírnunk.

A kétfázisú szimplex használatával oldjuk meg a duális feladatot:

$$\begin{array}{rclcl} -y_1 & - & y_2 & \leq & -2 \\ -y_1 & - & 3y_2 & \leq & -1 \\ \hline -5y_1 & - & 7y_2 & \rightarrow & \max. \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rclcl} -y_1 & - & y_2 & - & y_0 & + & y_3 & = & -2 \\ -y_1 & - & 3y_2 & - & y_0 & & & + & y_4 & = & -1 \\ \hline w(y) & = & & - & y_0 & & & & & \rightarrow & \max. \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} y_0 & = & 2 & - & y_1 & - & y_2 & + & y_3 \\ y_4 & = & 1 & & & + & 2y_2 & + & y_3 \\ \hline w(y) & = & -2 & + & y_1 & + & y_2 & - & y_3 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rclcl} y_1 & = & 2 & - & y_2 & + & y_3 & - & y_0 \\ y_4 & = & 1 & + & 2y_2 & + & y_3 \\ \hline w(y) & = & & & & & & - & y_0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} y_1 & = & 2 & - & y_2 & + & y_3 \\ y_4 & = & 1 & + & 2y_2 & + & y_3 \\ \hline z(y) & = & 0 & - & 5y_1 & - & 7y_2 \\ z(y) & = & -10 & - & 2y_2 & - & 5y_3 \end{array}$$

Optimum: +10 lesz, mert az eredeti feladatunk minimalizálás volt, és erre vissza kell térnünk, vagyis az így kapott optimum értékét -1-gyel szoroznunk kell.

Optimális megoldás: A primál feladat természetes változóinak a duális feladat mesterséges változói feleltethetők meg. Így a primál feladat optimuma a duális feladat célfüggvény együtthatóival lesz egyenlő:

- duális célfüggvény az optimumban: $z(y) = 10 + 2y_2 + 5y_3$ (miután visszaírtuk minimalizálásra)
- x_1 -nek y_3 felel meg $\rightarrow 5$
- x_2 -nek y_4 felel meg $\rightarrow 0$, mert nem szerepel a célfüggvényben
- ami pont a primálban kapott megoldásunk

Gyenge dualitás tétele: A duális feladat bármely lehetséges megoldása felső korlátot ad a primál bármely lehetséges megoldására (azaz az optimumra is).

Erős dualitás tétele: A primál és duál feladat optimuma egyenlő.