

3. gyakorlat

Nem korlátosság, degeneráció

A mai órán olyan problémákat nézünk meg, melyek által nem jutunk optimális megoldáshoz. Ilyen lehet a nem korlátosság, amikor nem kapunk megoldást. Valamint a degeneráció, ami ciklizációhoz vezet.

1. Nem korlátos feladat

$$\begin{array}{rcccccccl}
 x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \leq & 5 \\
 2x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & \leq & 4 \\
 3x_1 & & & - & x_3 & \leq & 3 \\
 \hline
 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \rightarrow & \max
 \end{array}$$

Írjuk fel a szótár alakot:

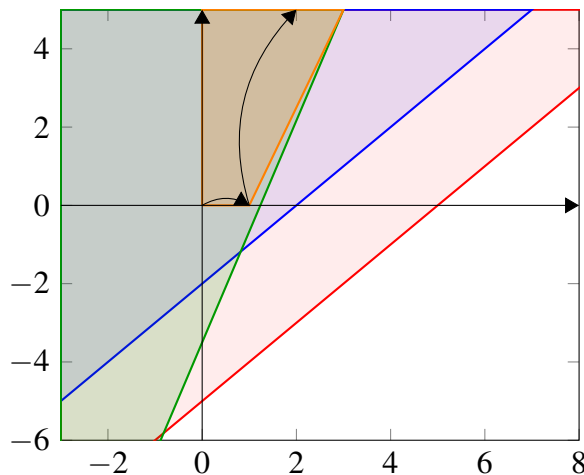
$$\begin{array}{rcccccccl}
 x_4 & = & 5 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 \\
 x_5 & = & 4 & - & 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 \\
 x_6 & = & 3 & - & 3x_1 & & & + & x_3 \\
 \hline
 z(x) & = & 0 & + & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3
 \end{array}$$

1. iteráció:

- A célfüggvényben x_1 a legpozitívabb.
- A 3. sor a legkorlátozóbb egyenlet ($x_4 = 5 > x_5 = 2 > x_6 = 1$).

$$\begin{array}{rcccccccl}
 x_4 & = & 4 & - & 2x_2 & + & \frac{2}{3}x_3 & + & \frac{1}{3}x_6 \\
 x_5 & = & 2 & + & x_2 & + & \frac{4}{3}x_3 & + & \frac{2}{3}x_6 \\
 x_1 & = & 1 & & & + & \frac{1}{3}x_3 & - & \frac{1}{3}x_6 \\
 \hline
 z(x) & = & 2 & + & x_2 & + & \frac{5}{3}x_3 & - & \frac{2}{3}x_6
 \end{array}$$

Grafikusan ($x_2 = 0$ -ra nézve):



Mind a 2. szótárban, mind az ábrán látható, hogy nem korlátos a feladat. Ezt onnan tudjuk, hogy van olyan pozitívabb célfüggvény együttható, x_3 , amihez nincs negatív korlátozó feltétel, vagyis nincs korlátozás.

Hasonlóan az ábrán a második lépés végtelen messzire elmehet, nincs két egymást keresztező, felső határt megszabó egyenes.

A nem korlátosság a könnyebbik eset, ezt a szótár alakban a szabályaink kiszűrik. Viszont a következő eset már nehezebb.

2. Degenerált iterációs lépés

Az algoritmus nem biztos, hogy véges számú lépésben megáll:

- **Degenerált iterációs lépés:** Olyan simplex iteráció, amelyben nem változik a bázismegoldás.
- **Degenerált bázismegoldás:** Olyan bázismegoldás, amelyben egy vagy több bázisváltozó értéke 0.
- **Ciklizáció:** Ha a simplex algoritmus valamely iterációja végén egy korábbi iteráció szótárát kapjuk meg újra.
- **Tétel:** Ha a simplex algoritmus nem áll meg, akkor ciklizál.

$$\begin{array}{rclclclcl}
 x_5 & = & 0 & - & x_1 & - & 2x_2 & & - & 2x_4 \\
 x_6 & = & 6 & - & x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & \\
 x_7 & = & 6 & & & - & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 \\
 \hline
 z(x) & = & 0 & + & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & + & 4x_4
 \end{array}$$

1. iteráció:

- A célfüggvényben x_2 a legpozitívabb és legkisebb indexű.
- Az 1. sor a legkorlátozóbb egyenlet ($x_5 = 0 < x_6 = 3 = x_7 = 3$).

$$\begin{array}{rclclclcl}
 x_2 & = & 0 & - & \frac{1}{2}x_1 & & - & x_4 & - & \frac{1}{2}x_5 \\
 x_6 & = & 6 & & & - & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 \\
 x_7 & = & 6 & + & x_1 & - & x_3 & + & x_4 & + & x_5 \\
 \hline
 z(x) & = & 0 & + & x_1 & + & 4x_3 & & & - & 2x_5
 \end{array}$$

Figyeljük meg! Az első 2 szótárban nem változik a bázismegoldás (x_6 és x_7 változatlanul 6, minden más 0), és az optimális megoldás (0) sem. Ezt a változatlanságot nevezzük degenerációnak.

2. iteráció:

- A célfüggvényben x_3 a legpozitívabb és legkisebb indexű.
- A 2. sor a legkorlátozóbb egyenlet és legkisebb indexű sor (x_2 nem korlátoz, $x_6 = 6 = x_7 = 6$).

$$\begin{array}{rcccccccc}
 x_2 & = & 0 & - & \frac{1}{2}x_1 & - & x_4 & - & \frac{1}{2}x_5 \\
 x_3 & = & 6 & & & + & 2x_4 & + & x_5 & - & x_6 \\
 x_7 & = & 0 & + & x_1 & - & x_4 & & & + & x_6 \\
 \hline
 z(x) & = & 24 & + & x_1 & + & 8x_4 & + & 2x_5 & - & 4x_6
 \end{array}$$

3. iteráció:

- Célfüggvényben x_4 a legpozitívabb és legkisebb indexű.
- Az 1. sor a legkorlátozóbb egyenlet és legkisebb indexű sor ($x_2 = 0 = x_7 = 0$).

$$\begin{array}{rcccccccc}
 x_4 & = & 0 & - & \frac{1}{2}x_1 & - & x_2 & - & \frac{1}{2}x_5 \\
 x_3 & = & 6 & - & x_1 & - & 2x_2 & & & - & x_6 \\
 x_7 & = & 0 & + & \frac{3}{2}x_1 & + & x_2 & + & \frac{1}{2}x_5 & + & x_6 \\
 \hline
 z(x) & = & 24 & - & 3x_1 & - & 8x_2 & - & 2x_5 & - & 4x_6
 \end{array}$$

Ismét! Az előző két szótárban **nem változik a bázismegoldás** ($x_3 = 6$ és minden más 0), és az **optimális megoldás** (24) sem, vagyis **degeneráció** áll fenn.

Ezen problémák megoldására a pivot szabályok kínálnak majd megoldást (következő óra).