1. gyakorlat

Lineáris programozási feladat és grafikus megoldása

1. Bevezetés

Az operációkutatás a II. világháború alatt alakult ki, az USA hadseregének kutatócsoportja a katonai operációk matematikai megalapozására használta. Az óra kereteiben is tanult szimplex módszert Dantzig fedezte fel, azonban katonai jelentősége miatt csak évekkel később publikálhatta azt.
Ezt követően viszont fejlődésnek indult, így ma már szerteágazó területté vált.
Ma mint problémamegoldási technikák és valós életbeli problémák megoldási módszerei ismertek:

- optimalizálási eljárások
- döntéselmélet
- adatelemzés
- sztochasztikus modellek
- szimulációk

2. Lineáris programozási feladat

Lineáris programozási feladat definíció: Keressük adott lineáris $\mathbb{R}^n$ értelmezési tartományú függvény (célfüggvény) szélsőértékét (min/max) értelmezési tartományának adott lineáris korlátokkal (feltételekkel) meghatározott részében.

2.1. A feladatok során használt fogalmak

(Definíciók szabályszerű kimondása a külön pdf-ben található.)

- *Erőforrás allokációs probléma:* A rendelkezésre álló erőforrás (most nyersanyag) ismeretében megtervezni a gyártás folyamatát azzal a céllal, hogy minél nagyobb profitra tegyünk szert.
- *Döntési változók:* Ezek határozzák meg a döntéseinket. Egy erőforrás allokációs problémánál megmondják miből mennyire van szükségünk.
  pl. x_1, x_2
- *Változók értelmezési tartománya:* Az intuitív elvárásaink, például, hogy pozitív mennyiségű termékünk legyen.
  pl. $x_1 \geq 0$
- *Cél:* A probléma minimalizálása/maximalizálsa. A mi példáinkban maximalizálást fogunk használni.
- *Célfüggvény (min/max):* A döntési változók segítségével felírt egyenlet.
  pl. $z(x) = 2x_1 + 5x_2$
- *Korlátozások/Feltételek(egyenletek/egyenlőtlenségek):* A rendelkezésre álló alapanyagokra vonatkozó megkötések.
  pl. $3x_1 + 2x_2 \leq 10$

2.2. Példa feladat

Mint (egykori) gazdaságinformatikus, némi gazdaság iránti vággyal felvértezve határoztam el, hogy szendvicset fogok árulni az Irinyi udvarban. De mint informatikus, azért jobbnak látom eltervezni a dolgokat.
A megmaradt ösztöndíjamból hétfőn este bevásároltam kenyeret, sonkát, és salátát, azzal az elképzeléssel, hogy sonkás és fittness szendvicset fogok árulni. Kitalálom, hogy a sonkás szendvics legyen jó sonkás, de ne legyen benne saláta, viszont a fittnessben legyen saláta, de kevesebb sonka, és kicsit legyen több a kenyér (drága a saláta). Amit meg szeretnék határozni, hogy mennyi szendvicset készítsek az egyes típusokból, hogy ha mindkettőt 100 Ft-ért árulom, és célom, hogy maximális profitot érjek el? (Nem vesszük figyelembe a beszerzési árat, vagy a szendvicsek elkészítésére fordított időt, csak a kész szendvicsek eladásával foglalkozunk.)
A pontos adatok az alábbiakban olvashatók (melyik szendvicshez mennyi alapanyag kell):

Szendvics	sonkás	fittness
kenyér	8	10
sonka	5	1
saláta	0	2

felhasználható		
kenyér	$\leq$	48
sonka	$\leq$	20
saláta	$\leq$	8

Árak	
sonkás	100
fittness	100

Írjuk fel a feladat modelljét, a lineáris programot:

$$\begin{array}{lrr} \text{I.} & 8x_s + 10x_f \leq & 48 \\ \text{II.} & 5x_s + 1x_f \leq & 20 \\ \text{III.} & 0x_s + 2x_f \leq & 8 \\ & x_s, x_f \geq & 0 \\ & 100x_s + 100x_f & \rightarrow max \end{array}$$

x_s-re és x_f-re végül még tehetünk egy olyan megkötést, hogy ezek csak egész értékű változók lehetnek. Vagyis nem adhatunk el darab szendvicseket, csak egészeket. $\rightarrow x_s, x_f \in \mathbb{Z}$

2.3. Grafikus megoldás

Hozzuk az egyenlőtlenségeket ábrázolható alakra. (Ezek félsíkokat fognak nekünk meghatározni, melyek a keresési terünket korlátozzák.)

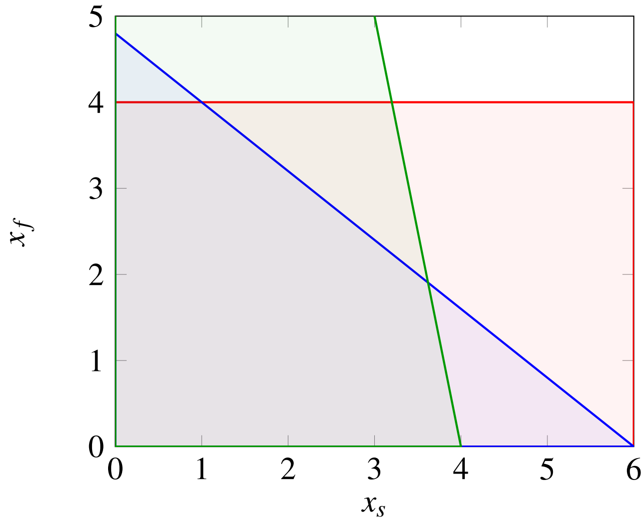
$$\begin{array}{lrcl} \text{III.} & 2x_f & \leq & 8 \\ & x_f & \leq & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{I.} & 8x_s + 10x_f & \leq & 48 \\ & 10x_f & \leq & 48 - 8x_s \\ & x_f & \leq & 4,8 - 0,8x_s \end{array}$$

(x_s helyébe 0-t helyettesítve x_f a 4,8-ban, x_f helyébe 0-t helyettesítve x_s a 6-ban metszi a tengelyét.)

$$\begin{array}{lrcl} \text{II.} & 5x_s + x_f & \leq & 20 \\ & x_f & \leq & 20 - 5x_s \end{array}$$

(x_s helyébe 0-t helyettesítve x_f a 20-ban, x_f helyébe 0-t helyettesítve x_s a 4-ban metszi a tengelyét.)



A feltételeink, mint kerítést képzeljük el, ezek határolják be a lehetséges lépéseinket. A lehetséges megoldások halmazába az esik, ami mindhárom feltételnek eleget tesz. Az optimális megoldások pedig oldalak, csúcspontok mentén helyezkednek el.