

4. gyakorlat Különböző pivot szabályok

Nézzük meg milyen lehetőségeink vannak az előző órán bemutatott degeneráció és ciklizáció elkerülésére. Hogyan tudjuk szabályozni, hogy melyik csúcspontba lépjen az algoritmusunk.

1. Bland szabály - Legkisebb indexek módszere

- A lehetséges belépőváltozók közül válasszuk a **legkisebb indexűt**.
- A lehetséges kilépőváltozók közül válasszuk a **legkisebb indexűt**.

Tétel: A szimplex algoritmus biztosan véget ér, ha a legkisebb index szabályt használjuk.

Nézzük meg ezt egy feladaton:

$$\begin{array}{rclclclcl}
 x_5 & = & 4 & & + & x_2 & & - & 3x_4 \\
 x_6 & = & 4 & & & & - & x_3 & + & 2x_4 \\
 x_7 & = & 4 & & - & x_2 & & & - & x_4 \\
 x_8 & = & 4 & - & 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & x_4 \\
 \hline
 z(x) & = & 0 & & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4
 \end{array}$$

1. iteráció

- x_2 és x_3 pozitív, ezek közül x_2 -t választjuk, ez a kisebb indexű (most nem számít, hogy x_3 együttthatója nagyobb).
- x_7 és x_8 sorában van negatív együttthatójú változó, ezek egyformán korlátoznak, és ezek közül x_7 a kisebb indexű, ezt választjuk, ez a 3. sor.
- *Klasszikus az x_3 -at választaná a 3. sorban.*

$$\begin{array}{rclclclcl}
 x_5 & = & 8 & & & & - & 4x_4 & - & x_7 \\
 x_6 & = & 4 & & - & x_3 & + & 2x_4 & & \\
 x_2 & = & 4 & & & & - & x_4 & - & x_7 \\
 x_8 & = & 0 & - & 2x_1 & - & x_3 & & + & x_7 \\
 \hline
 z(x) & = & 8 & & + & 4x_3 & & & - & 2x_7
 \end{array}$$

2. iteráció

- Csak x_3 pozitív a célfüggvényben.
- x_6 és x_8 sorában van negatív együttthatójú változó, ezek közül x_8 korlátoz jobban ($x_6 = 4 > x_8 = 0$), ezt választjuk, ez a 4. sor.
- *Klasszikus is az x_3 -at választaná a 4. sorban.*

$$\begin{array}{rcccccccc}
 x_5 & = & 8 & & & - & 4x_4 & - & x_7 \\
 x_6 & = & 4 & + & 2x_1 & + & 2x_4 & - & x_7 & + & x_8 \\
 x_2 & = & 4 & & & - & x_4 & - & x_7 & & \\
 x_3 & = & 0 & - & 2x_1 & & & + & x_7 & - & x_8 \\
 \hline
 z(x) & = & 8 & - & 8x_1 & & & + & 2x_7 & - & 4x_8
 \end{array}$$

3. iteráció

- Csak x_7 pozitív a célfüggvényben.
- x_5 , x_6 és x_2 sorában van negatív együtthatójú változó, ezek közül x_2 és x_6 korlátoz jobban ($x_5 = 8 > x_2 = 4 = x_6 = 4$), x_2 a kisebb indexű, azt választjuk, ez a 3. sor.
- Klasszikus az x_7 -et választaná a 2. sorban.

$$\begin{array}{rcccccccc}
 x_5 & = & 4 & & & + & x_2 & - & 3x_4 \\
 x_6 & = & 0 & + & 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_4 & + & x_8 \\
 x_7 & = & 4 & & & - & x_2 & - & x_4 \\
 x_3 & = & 4 & - & 2x_1 & - & x_2 & - & x_4 & - & x_8 \\
 \hline
 z(x) & = & 16 & - & 8x_1 & - & 2x_2 & - & 6x_4 & - & 4x_8
 \end{array}$$

Nincs több pozitív célfüggvény együttható, azaz optimumban vagyunk.
Olvassuk le a megoldásunkat:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 4, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 4, \quad x_6 = 0, \quad x_7 = 4, \quad x_8 = 0$$

Az optimum értéke: $z(x) = 16$

2. Legnagyobb növekmény szabálya

A lehetséges belépőváltozók közül válasszuk a **célfüggvény értékében legnagyobb javulást** eredményezőt, vagyis:

- Minden pozitív együtthatós célfüggvény változóra határozzuk meg a növekményt, úgy, hogy:
 - Vegyük az adott oszlopra (pl. x_1 oszlopa) a legkorlátozóbb sort, hányados szabály alapján.
 - A hányados szabállyal kapott értéket szorozzuk meg a célfüggvényben található változó együtthatójával: $c_i \left| \frac{b_i}{a_{ij}} \right|$
- Ha mindet kiszámoltuk, válasszuk a legnagyobbat.
- Az adott oszlophoz tartozó legszűkebb korláttal rendelkező sorban lesz a belépő változónk.

Nézzük meg ezt egy feladaton:

$$\begin{array}{rccccccc}
 x_3 & = & 20 & - & 2x_1 & - & 4x_2 \\
 x_4 & = & 6 & - & x_1 & - & x_2 \\
 x_5 & = & 4 & - & x_1 & & \\
 \hline
 z(x) & = & 0 & + & 2x_1 & + & 2x_2 \\
 & & & & 8 & & 10
 \end{array}$$

1. iteráció

- A célfüggvényben x_1 és x_2 is pozitív együtthatósak.
- Az x_2 -t választjuk az 1. sorban, mert:
 - x_1 oszlopában a korlátozások: x_3 -ra $\frac{20}{2} = 10$, x_4 -re 6, x_5 -re 4, ezek közül 4 a legszűkebb. Így itt a növekményünk: $2 * 4 = 8$
 - x_2 oszlopában a korlátozások: x_3 -ra $\frac{20}{4} = 5$, x_4 -re 6, x_5 -re nincs, ezek közül 5 a legszűkebb. Így itt a növekményünk: $2 * 5 = 10$
 - A nagyobb növekményt x_2 választásával kapjuk, még hozzá az 1. sorban, mivel ez a legkorlátozóbb egyenlet.
- *Klasszikus és a Bland is az x_1 -et választaná a 3. sorban.*

$$\begin{array}{rclclcl}
 x_2 & = & 5 & - & \frac{1}{2}x_1 & - & \frac{1}{4}x_3 \\
 x_4 & = & 1 & - & \frac{1}{2}x_1 & + & \frac{1}{4}x_3 \\
 x_5 & = & 4 & - & x_1 & & \\
 \hline
 z(x) & = & 10 & + & \frac{x_1}{2} & - & \frac{1}{2}x_3
 \end{array}$$

2. iteráció

- A célfüggvényben csak x_1 pozitív együtthatós.
- Az x_1 -et választjuk az 2. sorban, mert:
 - x_1 oszlopában a korlátozások: x_2 -ra $\frac{5}{1/2} = 10$, x_4 -re $\frac{1}{1/2} = 2$, x_5 -re $\frac{4}{1} = 4$, ezek közül 2 a legszűkebb. Így itt a növekményünk: $1 * 2 = 2$
 - A nagyobb növekményt x_1 választásával kapjuk, még hozzá az 2. sorban, mivel ez a legkorlátozóbb egyenlet.
- *Klasszikus és a Bland is az x_1 -et választaná a 2. sorban.*

$$\begin{array}{rclclcl}
 x_2 & = & 4 & - & \frac{1}{2}x_3 & + & x_4 \\
 x_1 & = & 2 & + & \frac{1}{2}x_3 & - & 2x_4 \\
 x_5 & = & 2 & - & \frac{1}{2}x_3 & + & 2x_4 \\
 \hline
 z(x) & = & 12 & & & - & 2x_3
 \end{array}$$

Nincs több pozitív célfüggvény együttható, azaz optimumban vagyunk. Olvassuk le a megoldásunkat:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 2$$

Az optimum értéke: $z(x) = 12$

3. Összefoglalás

	klasszikus	legnagyobb növekmény	Bland/legkisebb indexek
oszlop választás	pozitív		
	c_i legnagyobb legkisebb index	$c_i \mid \frac{b_j}{a_{ij}} \mid$ legnagyobb legkisebb index	legkisebb index
sor választás	legsűkebb		
	legkisebb sor index	legkisebb sor index	legkisebb indexű bázis
véges-e	nem feltétlen	nem feltétlen	igen

A különbség a különféle pivot elem választásokkal:

$$\begin{array}{rcllclclcl}
 x_5 & = & 2 & - & 4x_1 & - & 4x_3 & + & x_4 & - & 2x_7 & - & 2x_8 \\
 x_2 & = & 4 & - & 4x_1 & - & 8x_3 & & & - & 4x_7 & - & 4x_8 \\
 x_6 & = & 2 & - & 2x_1 & - & 4x_3 & - & x_4 & - & 2x_7 & - & 2x_8 \\
 x_9 & = & 2 & - & x_1 & - & 2x_3 & - & x_4 & - & x_7 & - & 2x_8 \\
 \hline
 z(x) & = & 2 & - & 2x_1 & + & \frac{2x_3}{1} & + & \frac{2x_4}{4} & + & \frac{4x_7}{4} & + & \frac{4x_8}{4}
 \end{array}$$

(A feladat alatti kék számok a várható növekményt jelzik.)

klasszikus

Bland

legnagyobb növekmény