5. gyakorlat

Kétfázisú szimplex algoritmus és speciális esetei

1. Emlékeztető - Standard alak, áttérés

Standard alak

- Minden feltétel $\leq$-et tartalmaz csak.
- A célfüggvényünket maximalizáljuk.
- A b vektor (jobb oldalon álló konstansok), minden eleme nemnegatív.

Átalakítások

- Ha egyenlőség van, akkor két egyenlőtlenséget veszünk fel.
  pl. $x_1 + x_2 = 3 \rightarrow x_1 + x_2 \leq 3$ és $x_1 + x_2 \geq 3$
- $\geq \rightarrow \leq$: -1-gyel való szorzás.
  pl. $x_1 - 3x_2 \geq -3 \rightarrow -x_1 + 3x_2 \leq 3$
- Áttérés minimalizálásról maximalizálásra: -1-gyel való szorzás, és min. $\rightarrow$ max.
  pl. $-2x_1 + 3x_2 \rightarrow min. \rightarrow 2x_1 - 3x_2 \rightarrow max.$

2. Kétfázisú szimplex algoritmus

Vegyünk egy standard alakú feladatot:

$$\begin{array}{rcrcr}
x_1 & - & x_2 & \leq & -5 \\
x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\
\hline
2x_1 & + & x_2 & \rightarrow & \text{max.}
\end{array}$$

Már a standard alakban felismerhető, hogy az eddigi feltételeinknek nem felel meg. De ha a szótár alakot is felírjuk, akkor megbizonyosodhatunk róla, hogy már a kiindulási szótár alakban nem lehetséges (nem fízibilis) bázismegoldást kapunk:

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x_3 & = & -5 & - & x_1 & + & x_2 \\
x_4 & = & 6 & - & x_1 & - & x_2 \\
\hline
z(x) & = & & & 2x_1 & + & x_2
\end{array}$$

Hogy megszabaduljunk a negatív szám(ok)tól vegyünk fel egy új mesterséges változót, x_0-t, és egy új célfüggvényt, melyre megoldjuk. Ha x_0-t negatív előjellel vesszük fel, akkor amint kifejezzük eltűnnek a negatív konstansaink.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
 & & x_1 & - & x_2 & - & x_0 & \leq & -5 \\
 & & x_1 & + & x_2 & - & x_0 & \leq & 6 \\
\hline
w(x) & = & & & & - & x_0 & & \\
z(x) & = & 2x_1 & + & x_2 & & & &
\end{array}$$

Most a szótárunkhoz felvesszük a szokásos mesterséges változókat is x_0 mellé. Majd a legnegatívabb jobboldalú egyenletből kifejezzük x_0-t. Így garantált, hogy minden bázisváltozó értéke nemnegatív lesz, vagyis lehetséges bázismegoldást kapunk, melyből elindíthatjuk a szimplex algoritmust.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & - & x_0 & + & x_3 & & & = & -5 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_0 & & & + & x_4 & = & 6 \\ \hline w(x) & = & 0 & - & x_0 & & & & & & \\ z(x) & = & 0 & + & 2x_1 & + & x_2 & & & & \end{array}$$

Az újonnan kialakított szótárból indítjuk a kétfázisú szimplex algoritmust. 1. fázisban a $w(x)$ célfüggvényre oldjuk meg. *(Azonban érdemes az eredeti célfüggvényt is végig felírni, és követni azon is a változásokat, mert később vissza fogunk hozzá térni.)*

1. fázis

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_0 & = & 5 & + & x_1 & - & x_2 & + & x_3 \\ x_4 & = & 11 & & & - & 2x_2 & + & x_3 \\ \hline w(x) & = & -5 & - & x_1 & + & \underline{x_2} & - & x_3 \\ z(x) & = & 0 & + & 2x_1 & + & x_2 & & \end{array}$$

Klasszikus generálóelem választást alkalmazva az **1. iterációban** a $w(x)$-re:

- A legpozitívabb együtthatójú változó a célfüggvényben x_2.
- A legkorlátozóbb egyenlet pedig az 1.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_2 & = & 5 & + & x_1 & + & x_3 & - & x_0 \\ x_4 & = & 1 & - & 2x_1 & - & x_3 & + & 2x_0 \\ \hline w(x) & = & 0 & & & & & - & x_0 \\ z(x) & = & 5 & + & 3x_1 & + & x_3 & - & x_0 \end{array}$$

Tétel: A standard alakú feladatnak akkor és csak akkor létezik lehetséges megoldása, ha $w(x) = 0$ a hozzá felírt segédfeladat optimuma.

Mivel teljesül, hogy $w(x) = 0$ és $x_0 = 0$, így az eredeti feladatunknak is van lehetséges megoldása, a 2. fázisban $z(x)$-el folytatjuk.

2. fázis

Állítsuk elő a szótárunkat:

- Ha $x_0 = 0$ szerepel a feltételek között, akkor elhagyjuk.
- Ha x_0 bázisváltozó, akkor az egyenletének jobb oldalán lévő nem 0 együtthatójú változók valamelyikét belépőváltozónak, x_0-t kilépőváltozónak tekintve végrehajtunk egy pivot lépést.
- Elhagyjuk x_0 megmaradt előfordulásait.
- A célfüggvényt az eredetire cseréljük, amit az aktuális bázisváltozóknak megfelelően átírunk (ha az első fázis során is átírtuk z(x)-et, akkor w(x)-et csak töröljük).

$$\begin{array}{rcccccc} x_2 & = & 5 & + & x_1 & + & x_3 \\ x_4 & = & 1 & - & 2x_1 & - & x_3 \\ \hline z(x) & = & 5 & + & \underline{3x_1} & + & x_3 \end{array}$$

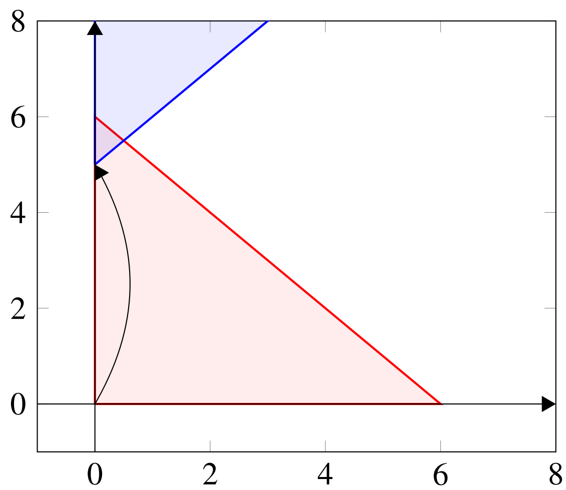
Klasszikus generálóelem választást alkalmazva az **1. iterációban** a $z(x)$-re:

- A legpozitívabb együtthatójú változó a célfüggvényben x_1.
- A legkorlátozóbb egyenlet pedig az 2.

$$\begin{array}{rcccccc} x_2 & = & \frac{11}{2} & + & \frac{1}{2}x_3 & - & \frac{1}{2}x_4 \\ x_1 & = & \frac{1}{2} & - & \frac{1}{2}x_3 & - & \frac{1}{2}x_4 \\ \hline z(x) & = & \frac{13}{2} & - & \frac{1}{2}x_3 & - & \frac{3}{2}x_4 \end{array}$$

Az optimális megoldás: $\frac{13}{2}$

Grafikusan szemléltetve látható, hogy a lehetséges megoldások halmaza nem tartalmazza az origót. Azonban a korábban tanult szimplex algoritmus onnan indult, ezért nem tudta a feladatot megoldani. A kétfázisú szimplex kiküszöböli ezt a problémát, 1. fázisában "elsétál" a lehetséges megoldások halmazához, majd innen alkalmazhatjuk a korábbi algoritmust.



3. Nincs lehetséges megoldás

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & & & + & x_3 & \leq & 4 \\
x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & -5 \\
x_1 & - & x_2 & & & \leq & -1 \\
\hline
x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \to & \text{max.}
\end{array}$$

Szabaduljunk meg a negatív jobb oldalaktól új mesterséges változókkal:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcrcr}
x_1 & & & + & x_3 & - & x_0 & + & x_4 & & & & & = & 4 \\
x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_0 & & & + & x_5 & & & = & -5 \\
x_1 & - & x_2 & & & - & x_0 & & & & & + & x_6 & = & -1 \\
\hline
w(x) & = & & & & - & x_0 & & & & & & & & \\
z(x) & = & 0 & + & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & & & & &
\end{array}$$

-5 a legnegatívabb, így a 2. sorban fejezzük ki x_0-t:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_4 & = & 9 & & & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_5 \\
x_0 & = & 5 & + & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_5 \\
x_6 & = & 4 & & & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_5 \\
\hline
w(x) & = & -5 & - & x_1 & - & x_2 & + & \underline{x_3} & - & x_5
\end{array}$$

1. iteráció

- x_3 az egyetlen pozitív, így legpozitívabb a célfüggvényben.
- A legkorlátozóbb sor a 3. sor.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_4 & = & 1 & & & - & 3x_2 & - & x_5 & + & 2x_6 \\
x_0 & = & 1 & + & x_1 & - & x_2 & & & + & x_6 \\
x_3 & = & 4 & & & + & 2x_2 & + & x_5 & - & x_6 \\
\hline
w(x) & = & -1 & - & x_1 & + & \underline{x_2} & & & - & x_6
\end{array}$$

2. iteráció

- x_2 az egyetlen pozitív, így legpozitívabb a célfüggvényben.
- A legkorlátozóbb sor az 1. sor.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_2 & = & \frac{1}{3} & & & - & \frac{1}{3}x_4 & - & \frac{1}{3}x_5 & + & \frac{2}{3}x_6 \\
x_0 & = & \frac{2}{3} & + & x_1 & + & \frac{1}{3}x_4 & + & \frac{1}{3}x_5 & + & \frac{1}{3}x_6 \\
x_3 & = & \frac{14}{3} & & & - & \frac{2}{3}x_4 & + & \frac{1}{3}x_5 & + & \frac{1}{3}x_6 \\
\hline
w(x) & = & -\frac{2}{3} & - & x_1 & - & \frac{1}{3}x_4 & - & \frac{1}{3}x_5 & - & \frac{1}{3}x_6
\end{array}$$

Az optimum: $-\frac{2}{3}$

Mivel maximalizálunk ez nem lehetséges megoldás. Egy nemnegatív számot várnánk.
Az ábrán kék színnel jelölt eset.

4. Nem korlátos feladat

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\ \hline & & x_1 & \rightarrow & \text{max.} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & x_2 & - & x_0 & + & x_3 & = & -1 \\ \hline & & & & & & x_1 & \rightarrow & \text{max.} \end{array}$$

Fejezzük ki a legnegatívabb jobboldalt:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_0 & = & 1 & + & x_1 & - & x_2 & + & x_3 \\ \hline w(x) & = & -1 & - & x_1 & + & \underline{x_2} & - & x_3 \end{array}$$

1. iteráció

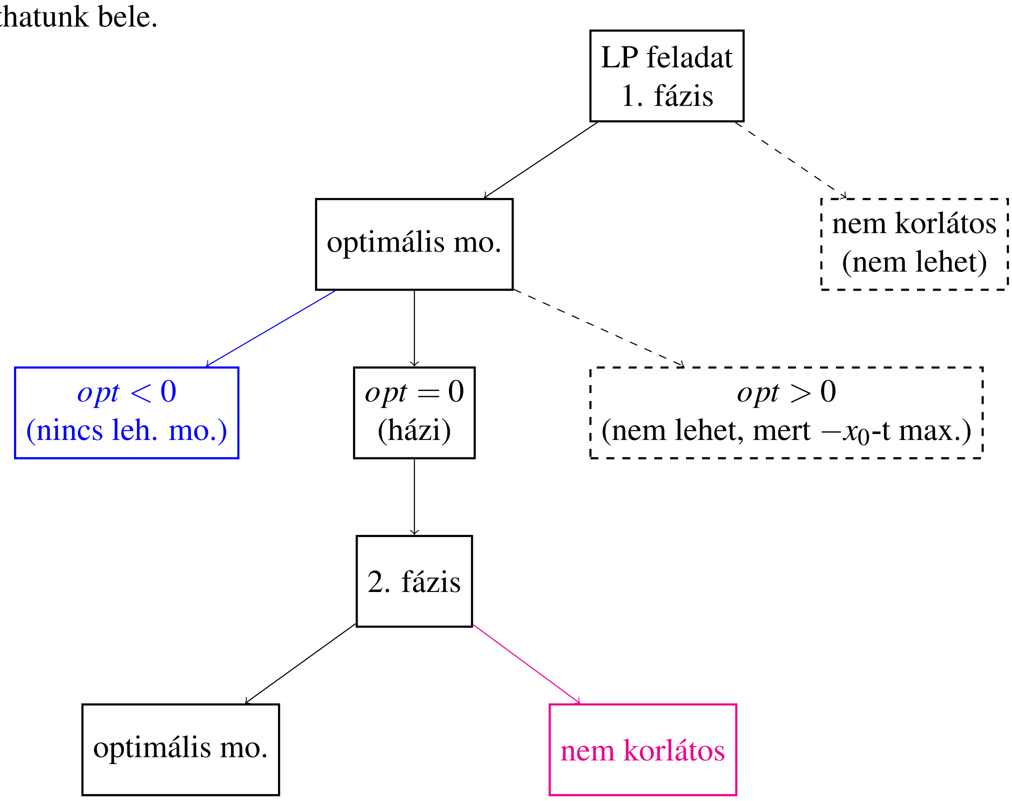
- x_2 az egyetlen pozitív, így legpozitívabb a célfüggvényben.
- A legkorlátozóbb sor az 1. sor.

$$\begin{array}{ccccccccc} x_2 & = & 1 & + & x_1 & + & x_3 & - & x_0 \\ \hline w(x) & = & & & & & & - & x_0 \\ z(x) & = & & & x_1 & & & & \end{array}$$

A feladat nem korlátos, mert van olyan pozitív célfüggvény együtthatónk, melyhez csak pozitív korlátok tartoznak. Pont, mint a korábbiakban is volt róla szó.
Az ábrán rózsaszínnel jelölt eset.

5. Összefoglalás

Az alábbi ábra szemlélteti, hogy a kétfázisú szimplex algoritmus alkalmazásával milyen esetekbe futhatunk bele.



Az ábra értelmezése:

A fő ág, a középen futó fekete a legideálisabb eset, amikor:

- Az 1. fázis (felvett segédfeladat) a $w(x) = 0$ és $x_0 = 0$ állapottal áll meg, vagyis az eredeti feladatunknak van lehetséges megoldása.
- A 2. fázisban meg is kapjuk az optimális megoldást.
- *Erre látunk példát a kedvcsinálóban, ilyen a házi, és az előző gyakorlat feladata is.*

A jobb alsó ág:

- Az előző esethez hasonlóan megkapjuk az 1. fázisban az optimumot, viszont az eredeti feladatunk mégsem korlátos.
- *A 2-es pontban látható feladat is erre ad példát.*

Bal középső ág:

- Az 1. fázis optimuma nem 0, annál kisebb. Mivel maximalizálunk (vagyis minél magasabb értéket várunk), így intuitívan is érezhető, hogy ez nem lehetséges megoldás.
- *Az 1. feladat erre példa.*

Szaggatott vonalas ágak:

- A felső eset nem lehet, mert eredetileg a segédfeladat $x_0 \to min$. (amit megfordítottunk, hogy ismereteinknek megfelelően maximalizálással megoldjuk). Azonban a minimalizálás felső korlátja a 0, vagyis van korlátja, tehát ebbe nem futhatunk bele.
- Az előbbi pontból következik: mivel minimalizálás, így minél kisebb érték a célunk, vagyis nem jó, ha 0-nál nagyobb értéket kapunk, a 0 felső korlát.

6. Kedvcsináló feladat - Gyakorlati példa

Egy "átlagos" informatikus hallgató már túl van 2 kivételével az összes vizsgáján. Az opkut és az oprendszerek maradt hátra. Az eddig teljesített kurzusok kreditjei szorozva a jeggyel 93-at tesznek ki. Ha a KKI-hez ezt 30-al leosztjuk, akkor 3,1-et kapunk. Ha nem bukik, akkor ez mindenképp csak javul. A 2 vizsga közvetlen egymás után van, egy napon. Ha leszámítjuk, hogy kipihenten megy vizsgára, ezért alszik, valamint a létszükségleteit ellátja, akkor 8,5 órája marad a 2 vizsgákra felkészülni. Célja, hogy mindkét vizsgán legalább a 2-es jegyet megszerezze. Így fél órát arra szentel, hogy a kétfázisú szimplex segítségével kioptimalizálja, hogy a két vizsgára külön-külön mennyit készüljön, és így a maximális KKI-t (ösztöndíjat) kapja majd. Amit tudunk:

opkut (x_1 óra)	oprendsz. (x_2 óra)
1 jegy - 1 óra	1 jegy - 2 óra
3 kredit	2 kredit

Írjuk fel a hozzá tartozó standard alakú feladatot:

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & & + & x_2 & \leq & & 8 \\
\frac{1}{1}x_1 & & & & \geq & & 2 \\
 & & & \frac{1}{2}x_2 & \geq & & 2 \\
\hline
\frac{93}{30} + & \frac{3}{30}x_1 & + & \frac{1}{30}x_2 & \to max & &
\end{array}
$$

Vegyük fel a segédfeladatot (egy lépésben felvesszük most az összes új mesterséges változót, és az egyszerűség kedvéért a szokásos módon kifejezzük őket). Majd fejezzük ki a legnegatívabb jobboldalú egyenletből x_0-t.
Vezessük le az **1. fázis**t:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x_3 & = & 8 & + & x_0 & - & x_1 & - & x_2 \\
x_4 & = & -2 & + & x_0 & + & x_1 & & \\
x_5 & = & -2 & + & x_0 & & & + & \frac{1}{2}x_2 \\
\hline
w(x) & = & & - & x_0 & & & &
\end{array}
\to
\begin{array}{ccccccccc}
x_3 & = & 10 & - & 2x_1 & - & x_2 & + & x_4 \\
x_0 & = & 2 & - & x_1 & & & + & x_4 \\
x_5 & = & 0 & - & x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & + & x_4 \\
\hline
w(x) & = & -2 & + & \underline{x_1} & & & - & x_4
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x_3 & = & 10 & - & 2x_2 & - & x_4 & + & 2x_5 \\
x_0 & = & 2 & - & \frac{1}{2}x_2 & & & + & x_5 \\
x_1 & = & 0 & + & \frac{1}{2}x_2 & + & x_4 & - & x_5 \\
\hline
w(x) & = & -2 & + & \underline{\frac{1}{2}x_2} & & & - & x_5
\end{array}
\to
\begin{array}{ccccccccc}
x_3 & = & 2 & + & 4x_0 & - & x_4 & - & 2x_5 \\
x_2 & = & 4 & - & 2x_0 & & & + & 2x_5 \\
x_1 & = & 2 & - & x_0 & + & x_4 & & \\
\hline
w(x) & = & 0 & - & x_0 & & & &
\end{array}
$$

Hagyjuk el x_0 előfordulásait, és írjuk vissza az eredeti célfüggvényt. Figyeljünk oda, hogy most x_1 és x_2 is bázisváltozók, vagyis mindkettőt ki kell fejezni.
Oldjuk meg a **2. fázis**t:

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_3 & = & 2 & - & x_4 & - & 2x_5 \\
x_2 & = & 4 & & & + & 2x_5 \\
x_1 & = & 2 & + & x_4 & & \\
\hline
z(x) & = & \frac{93}{30} & + & \frac{3}{30}x_1 & + & \frac{1}{30}x_2 \\
z(x) & = & \frac{93}{30} & + & \frac{3(2+x_4)}{30} & + & \frac{4+2x_5}{30} \\
z(x) & = & \frac{103}{30} & + & \underline{\frac{3}{30}x_4} & + & \frac{2}{30}x_5
\end{array}
\to
\begin{array}{ccccccc}
x_4 & = & 2 & - & x_3 & - & 2x_5 \\
x_2 & = & 4 & & & + & 2x_5 \\
x_1 & = & 4 & - & x_3 & - & 2x_5 \\
\hline
z(x) & = & \frac{57}{30} & - & \frac{3}{30}x_3 & - & \frac{4}{30}x_5
\end{array}
$$

Az optimális megoldás:

- $x_1 = 4 \to$ opkutra 4 órát készül, így 4-est ír.
- $x_2 = 4 \to$ oprendszerekre 4 órát készül, így 2-est ír.
- optimum: $\frac{57}{30} = 1,9$-es KKI-t ér el végül.