

Képrekonstrukció 3. előadás



Balázs Péter

Képfeldolgozás és Számítógépes Grafika
Tanszék

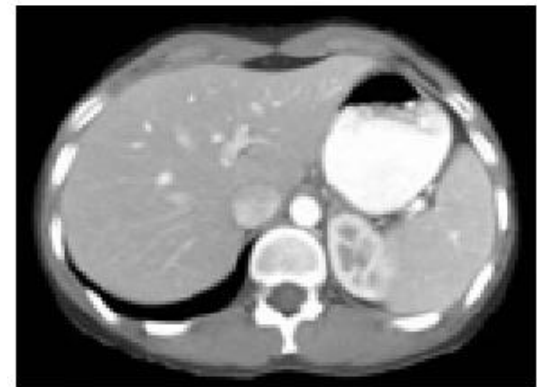
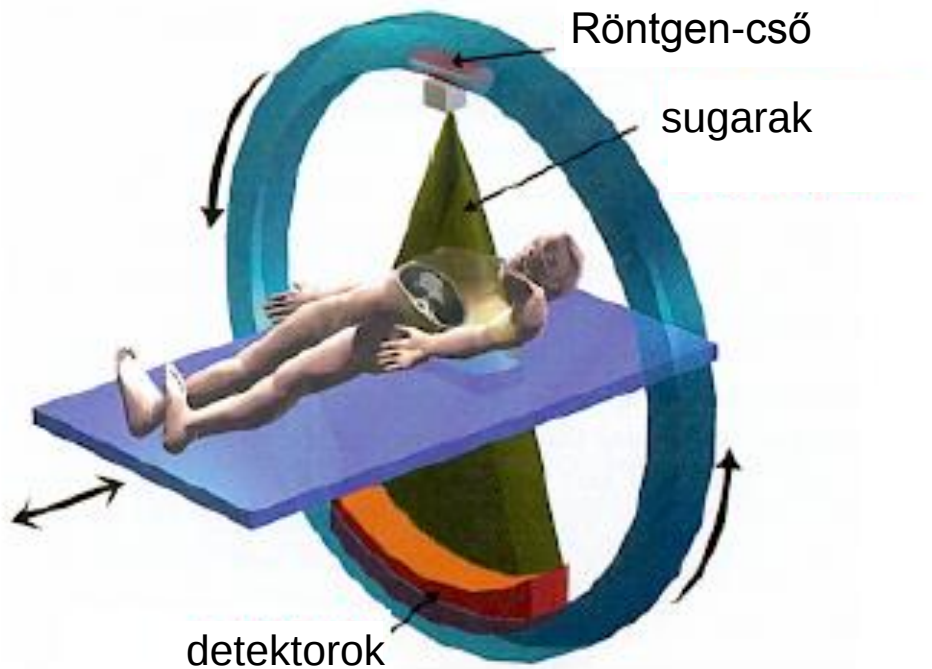
Szegedi Tudományegyetem

Computed Tomography (CT)

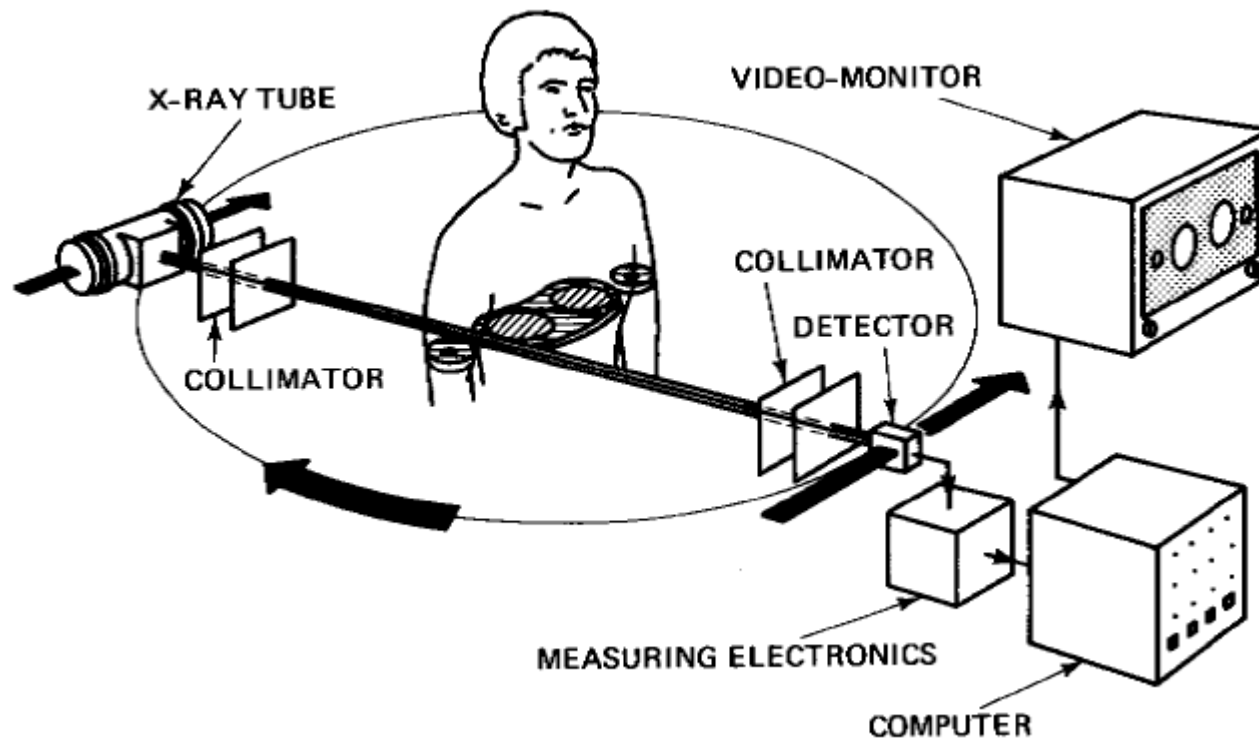
- Elv: Röntgen-sugarak áthatolása
- 3D objektum → 3D térfogati kép
- Mérések (vetületek) *számítása* keresztmetszeti képek előállításához
 - Rekonstrukció vetületekből
- Típusok:
 - (Standard) single-slice CT
 - Helical CT (spirális)
 - Multi-slice CT (több detektor, nagyon gyors!)

Számítógépes tomográfia (CT)

- Eljárás 3D objektumok (általában emberi szervek) 2D keresztmetszeti képeinek meghatározására



Egyszerű CT rendszer



CT elve

- x-sugár, nem a páciens forog
 - Rotációs tengely: fejtől lábig
- 2D vetületi képek a 3D-s testről
 - Különböző szögek → különböző információ
- A kép egy vízszintes vonala
 - 1D-s vetület a 2D szeletről
- 1D projekciók halmaza
 - Teljes információ a szeletről
→ Rekonstruáljuk a szeletet

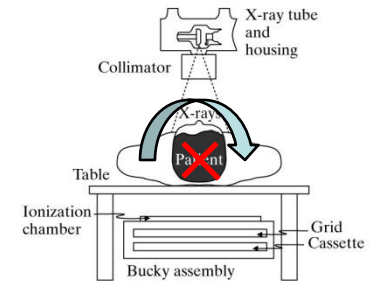
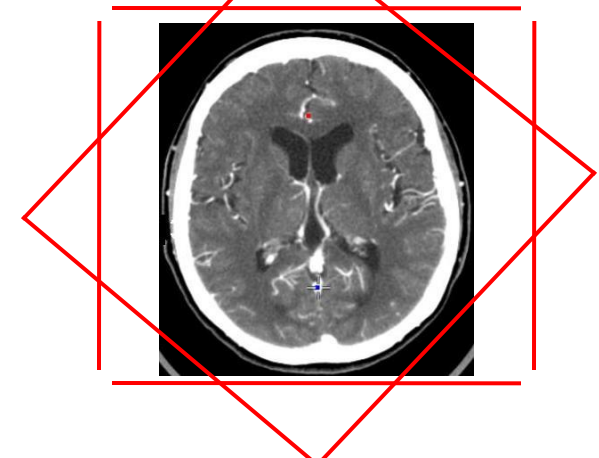
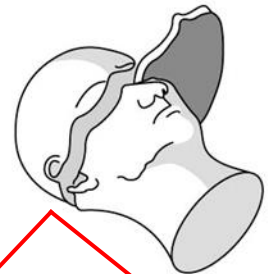


Figure 5.2

Medical Imaging Signals and Systems, by Jerry L. Prince and Jonathan Links.
ISBN 0-13-065353-5. © 2006 Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ. All rights reserved.

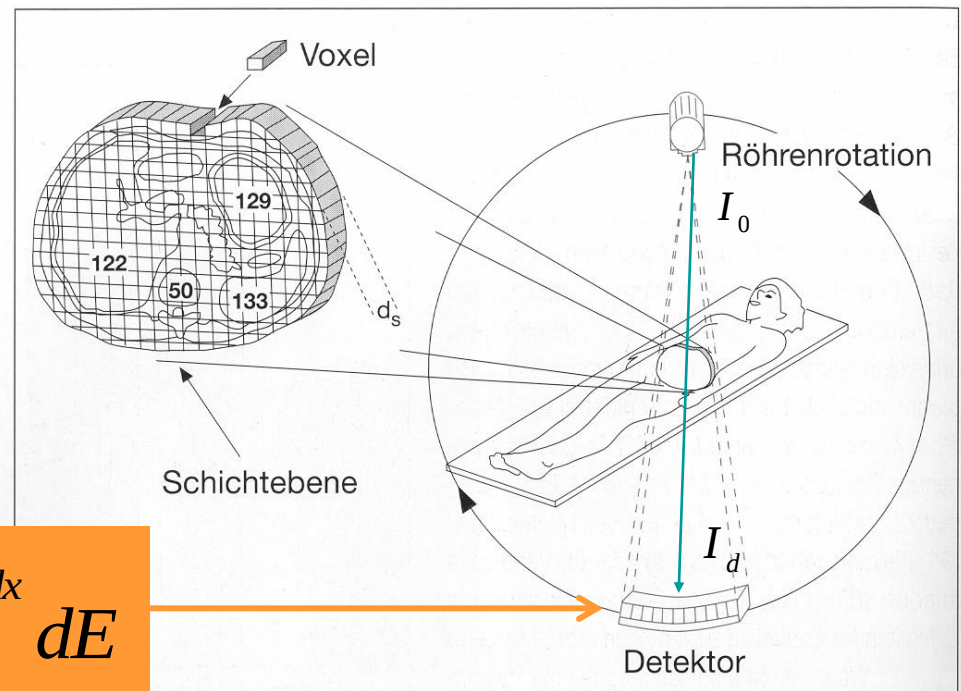


Képkotás – Vonalintegrálok

- x-sugár cső → x-sugár nyalábok → áthaladás az objektumon → detektorok oldalán mérik az intenzitás gyengülését a forrás és a detektorok között
- Hogyan rekonstruálható egy keresztmetszeti kép (szelet)?

polienergetikus forrás:

$$I_d = \int I_0(E) e^{-\int \mu(x,E) dx} dE$$



Képkötés – Vonalintegrálok

- A teljes energiaspektrumon való integrálás számítási szempontból kivitelezhetetlen.
- Feltételezés: **effektív energia** $\bar{E}$
 - az az energia, mely egy adott anyagban monoenergetikus forrás esetén ugyanazt a mért intenzitást eredményezné, mint az aktuális polienergetikus forrás esetén mért intenzitás

$$I_d = I_0(\bar{E}) e^{-\int_0^d \mu(s, \bar{E}) ds}$$

Képalkotás – Vonalintegrálok

I_0 és I_d könnyen mérhető!

Vetület számítása:

$$g_d = -\ln \left(\frac{I_d}{I_0} \right) = \int_0^d \mu(s, \bar{E}) ds$$

A lineáris elnyelési együttható vonalintegrálja a szkener effektív energiáján.

Minden detektorra az I_0 referencia intenzitást ki kell mérni
→ kalibráció

CT Numbers

- CT reconstruction: μ value for each pixel (voxel) of slice
- Problem: different CT scanners $\rightarrow$ different tubes $\rightarrow$ different effective energy $\rightarrow$ same object $\rightarrow$ different numerical values of μ
- Replacement of x-ray tubes!
- Solution: CT numbers:

$\rightarrow$ comparable results

$$h = 1000 \times \frac{\mu - \mu_{water}}{\mu_{water}} \quad [HU]$$

HU ... Hounsfield Units

$h=0$ HU for water

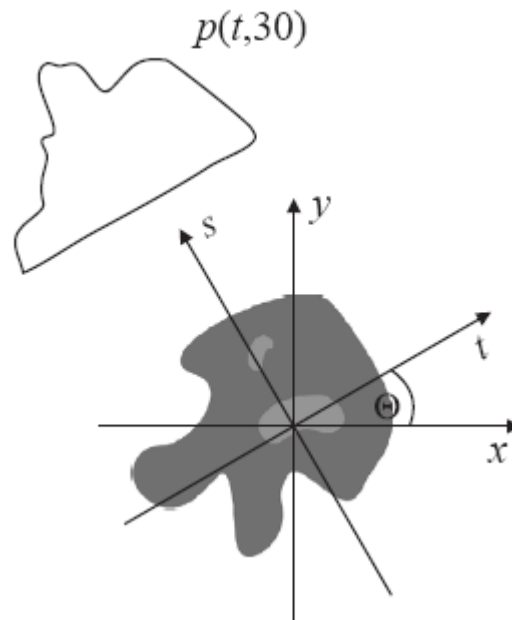
$h=-1000$ HU for air ($\mu=0$)

$h \sim 1000$ HU for bone

$h \sim 3000$ HU for metal, contrast agents

Rekonstrukció párhuzamos vetületek esetén

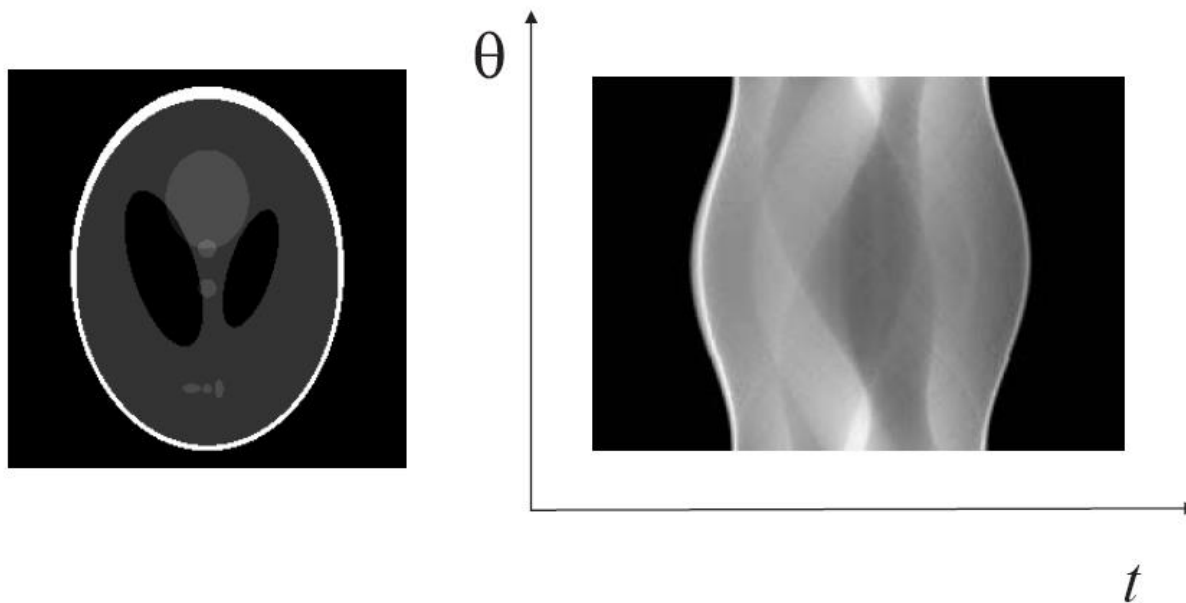
- Cél: CT számok meghatározása a keresztmetszeten
- Hogyan rekonstruálható μ a vonalintegráljainak gyűjteményéből?



2D Radon transzformáció

- Egy fix θ esetén $p(t, \theta)$ az $f(x,y)$ függvény egy θ szög által meghatározott **vetülete (projekciója)**.
- Az összes θ szög által meghatározott vetületek gyűjteménye az $f(x,y)$ **2D Radon transzformációja**.

Szinogram

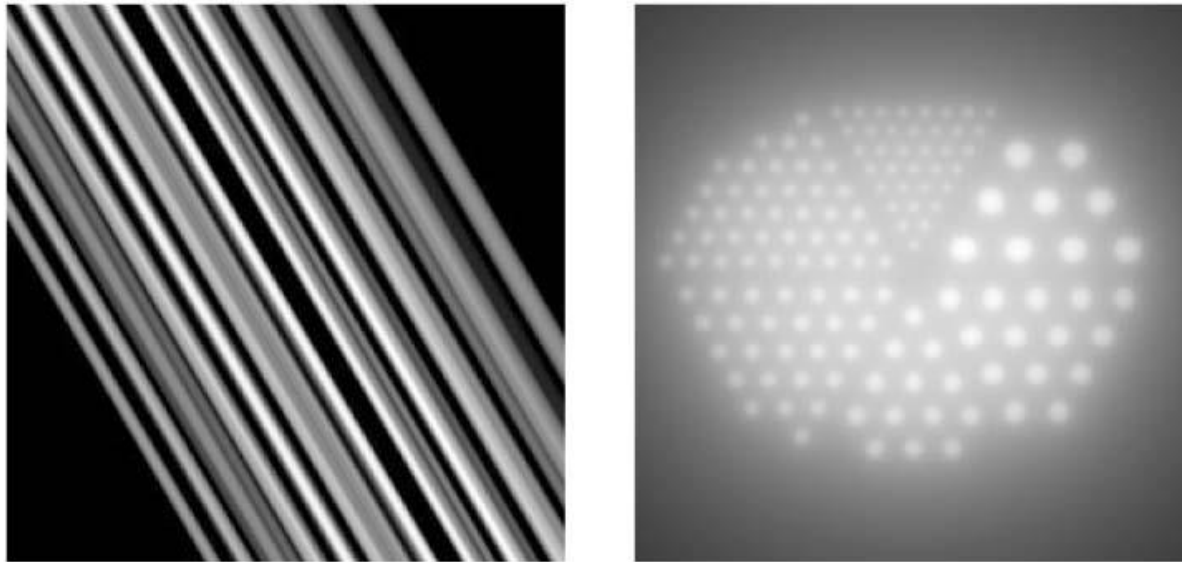


Objektum

Szinogram

Szinogram: a $p(t, \theta)$ vetületek gyűjteménye t és θ merőleges tengelyekkel ábrázolva.

Visszavetített összegkép (laminogram)

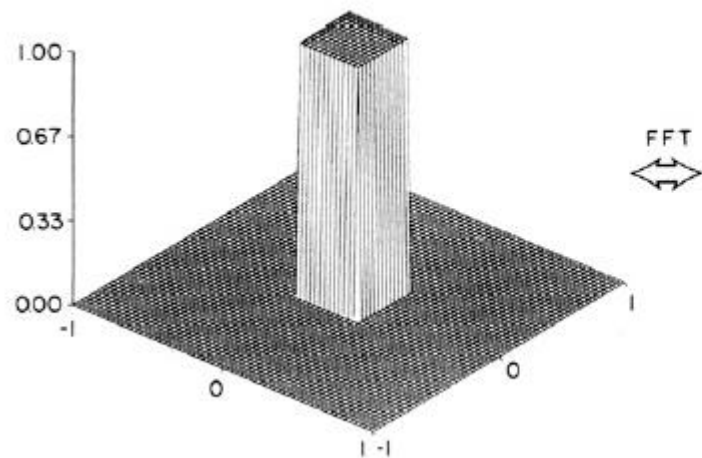


egy visszavetítés Visszavetítések összege
(elmosódás!)

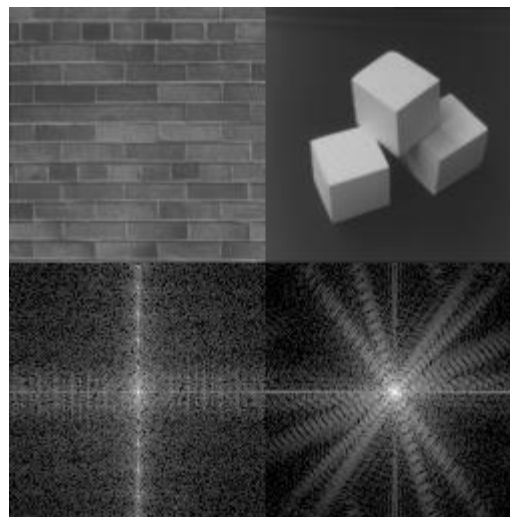
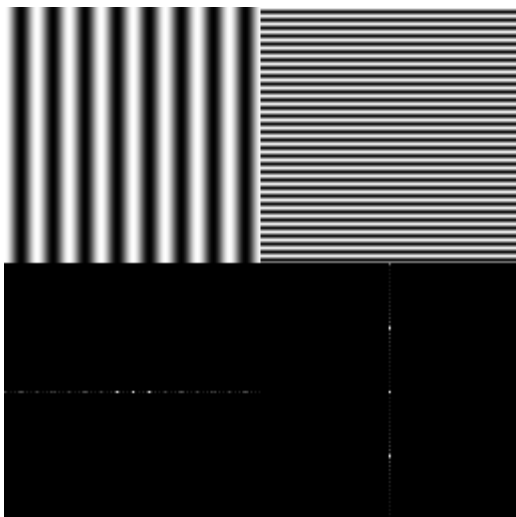
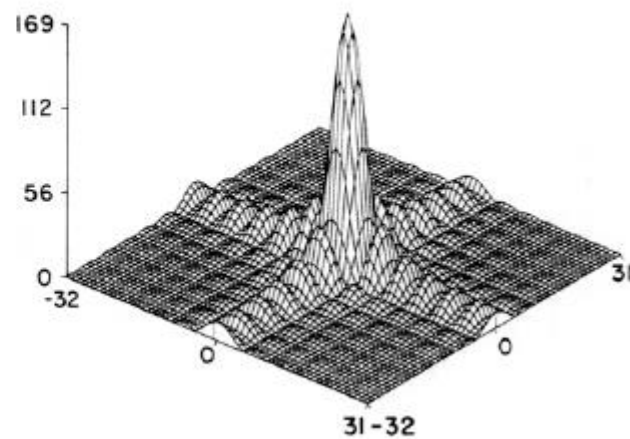
Figure 3.1.1

Medical Imaging Signals and Systems, by Jerry L. Prince and Jonathan Links.
ISBN 0-13-065353-5. © 2006 Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ. All rights reserved.

Fourier-transzformáció



FFT
↔



Vetület-szelet tétel

- Fontos kapcsolat a vetület 1D Fourier transzformáltja és a kép 2D Fourier transzformáltja között

- y tengellyel párhuzamos vetület:
$$p(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$

- 1D Fourier-transzformáció mindkét oldalra:

$$P(u) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,0)e^{-i2\pi ux}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-i2\pi ux}dxdy.$$

- Az $f(x,y)$ függvény 2D Fourier-transzformáltja a $v=0$ helyen:

$$F(u,v)|_{v=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-i2\pi(ux+vy)}dxdy \Big|_{v=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-i2\pi ux}dxdy$$

- Tehát: $P(u) = F(u,v)|_{v=0}$
- Tetszőlegesen elforgatott koordináta-rendszerben érvényes!

Közvetlen bizonyítás

- $f(x,y) = f'(t,s)$, $t=x\cdot\cos\Theta+y\cdot\sin\Theta$, $s=-x\cdot\sin\Theta+y\cdot\cos\Theta$

$$dsdt = \begin{vmatrix} \frac{\partial t}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial y} \\ \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial y} \end{vmatrix} dx dy = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} dx dy = dx dy$$

- A Θ szögű vetületre:

$$p(t, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t, s) ds.$$

- 1D-s FT: $P(\omega, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f'(t, s) ds e^{-i2\pi\omega t} dt.$

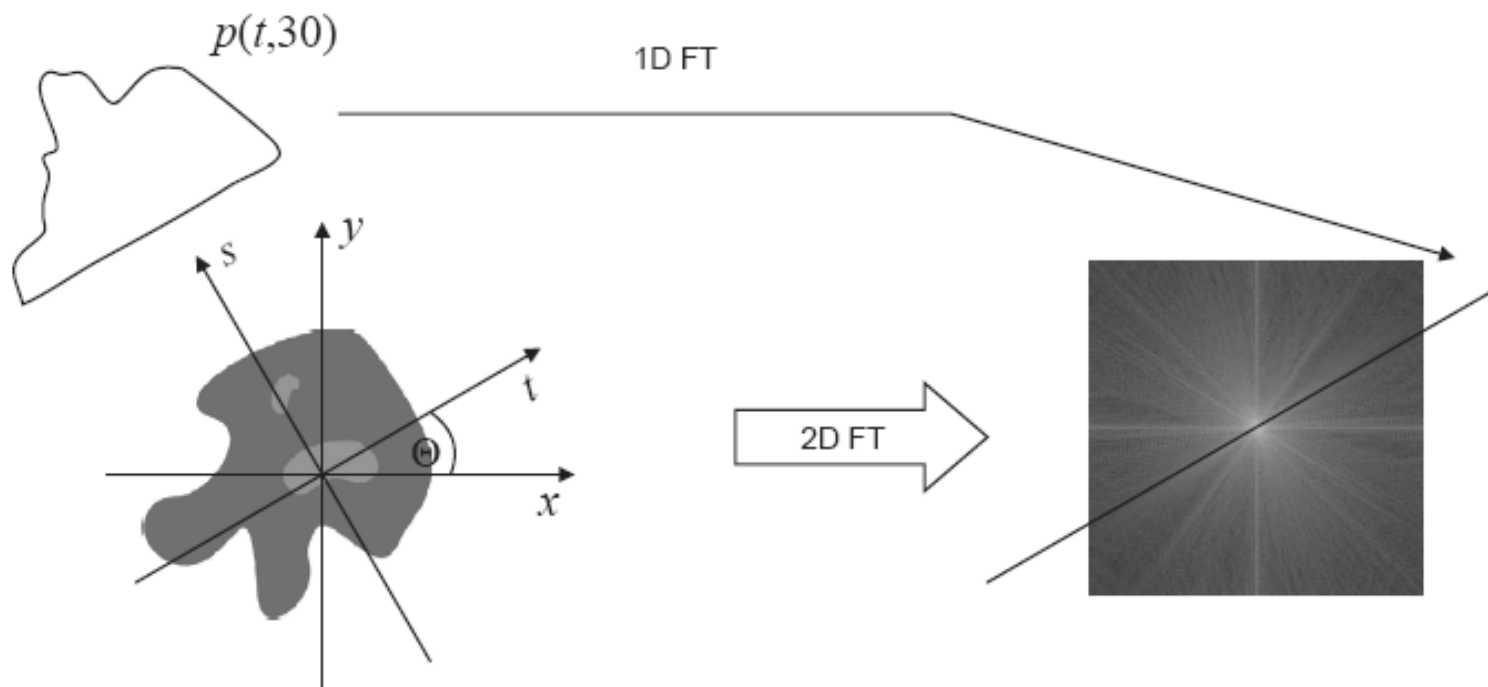
$$P(\omega, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi\omega(x\cos\theta+y\sin\theta)} dx dy.$$

- f 2D FT-ja: $F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(xu+yv)} dx dy,$

$$F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) = P(\omega, \theta)$$

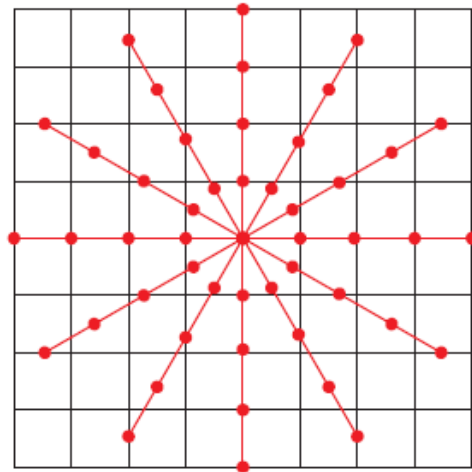
Vetület-szelet tétel szemléletesen

A θ szögű vetület 1D FT-ja az eredeti kép 2D FT-jának egy a frekvencia térben az origón áthaladó θ irányú szögű egyenesre eső része.



Fourier rekonstrukciós módszer

- vegyünk a vetületek 1D FT-ját
- helyezzük el ezeket a megfelelő szögben a frekvencia térben
- vegyünk az eredmény 2D FT-jának inverzét.



Nem gyakran használt módszer

(**mintavételezés, interpoláció, inverz 2D FT**)!

Szűrt visszavetítés (Filtered Backprojection)

Induljunk most ki az $F(u, v)$ függvény inverz Fourier-transzformáltjából, ami értelemszerűen az $f(x, y)$ függvényt adja:

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv.$$

Térjünk át most is a vetületeken alapuló mintavételezésnek megfelelő (ω, θ) polárkoordináta-rendszerbe az $u = \omega \cos \theta$, $v = \omega \sin \theta$ és a Jacobi-determinánsra alapuló

$$dudv = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \omega} & \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial \omega} & \frac{\partial v}{\partial \theta} \end{vmatrix} d\omega d\theta = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\omega \sin \theta \\ \sin \theta & \omega \cos \theta \end{vmatrix} d\omega d\theta = \omega d\omega d\theta$$

összefüggések segítségével. Ekkor

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) e^{j2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} \omega d\omega d\theta.$$

Szűrt visszavetítés

A vetület-szelet tétel (2.7) polárkoordinátás alakját a fenti egyenletbe helyettesítve valamint felhasználva, hogy $\cos \theta = -\cos(\theta + \pi)$ és $\sin \theta = -\sin(\theta + \pi)$ adódik, hogy

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} P(\omega, \theta) e^{j2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} \omega d\omega d\theta = \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} P(\omega, \theta) e^{j2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} \omega d\omega d\theta + \\ &+ \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} P(\omega, \theta + \pi) e^{-j2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} \omega d\omega d\theta. \end{aligned} \quad (2.8)$$

- $p(t, \Theta + \pi) = p(-t, \Theta) \rightarrow P(\omega, \Theta + \pi) = P(-\omega, \Theta)$

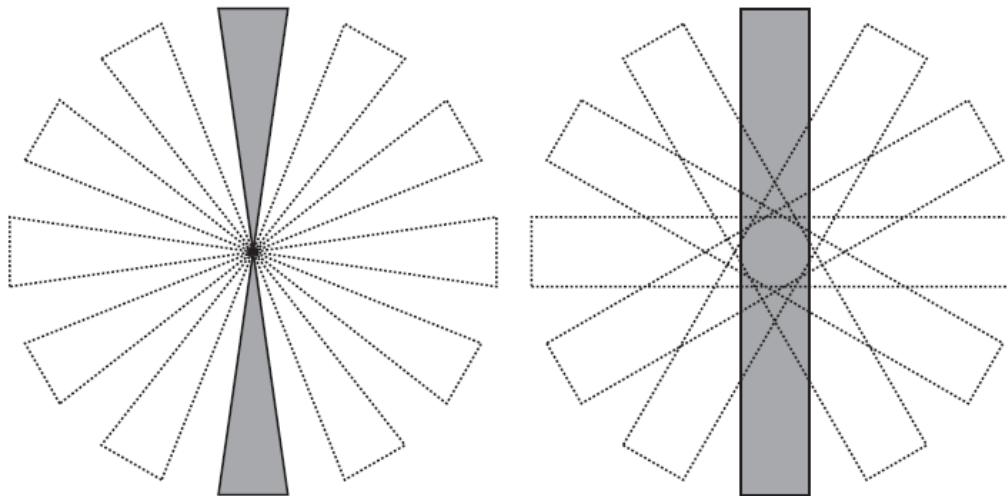
$$\begin{aligned}
f(x, y) &= \int_0^\pi \int_0^\infty P(\omega, \theta) e^{j2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} \omega d\omega d\theta + \\
&+ \int_0^\pi \int_0^\infty P(-\omega, \theta) e^{-j2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} \omega d\omega d\theta = \\
&= \int_0^\pi \int_0^\infty P(\omega, \theta) e^{j2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} \omega d\omega d\theta + \\
&+ \int_0^\pi \int_{-\infty}^0 P(\omega, \theta) e^{j2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} (-\omega) d\omega d\theta = \\
&= \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty P(\omega, \theta) |\omega| e^{j2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\omega d\theta.
\end{aligned}$$

Ezt ha az elforgatott (s, t) koordináta-rendszerben fejezzük ki, akkor azt kapjuk, hogy

$$f(x, y) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty P(\omega, \theta) |\omega| e^{j2\pi\omega t} d\omega d\theta,$$

Szűrt visszavetítés algoritmus

1. Határozzuk meg a $p(t, \theta)$ vetület $P(\omega, \theta)$ Fourier-transzformáltját.
2. Szorozzuk be $P(\omega, \theta)$ -t a $H(\omega) = |\omega|$ (vagy valamilyen más) szűrővel, hogy megkapjuk $G(\omega, \theta)$ -t.
3. Határozzuk meg a $G(\omega, \theta)$ inverz Fourier-transzformáltját, hogy megkapjuk a $g(t, \theta)$ szűrt vetületet.
4. Vetítsük vissza $g(t, \theta)$ -t és adjuk hozzá az $f(x, y)$ képhez.



Konvolúciós rekonstrukció

Konvolúciós tétel
alapján:

$$f(x, y) = \int_0^\pi [p(t, \theta) * \xi(t)]_{t=x \cos \theta + y \sin \theta} d\theta.$$

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| e^{j2\pi\omega t} d\omega$$

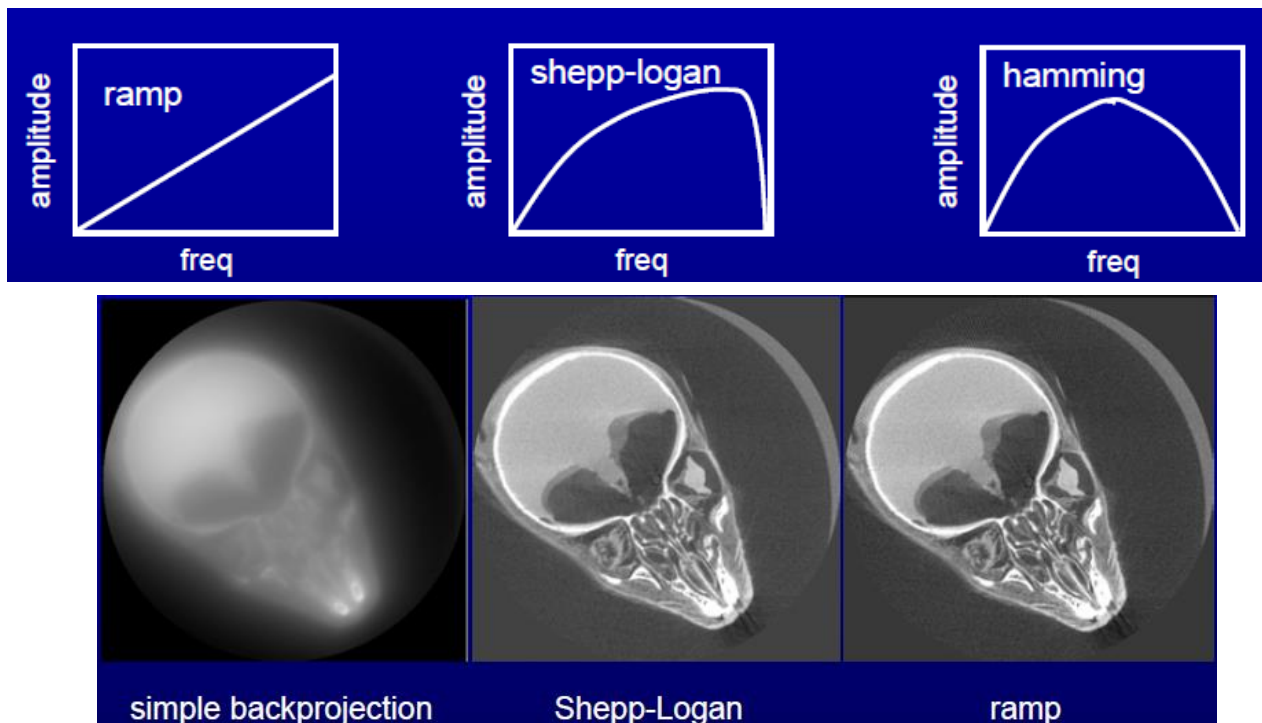
Ha $t=0$:

$$\xi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| e^0 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| d\omega \quad \text{ezért} \quad \tilde{\xi}(t) = \int_{-\Omega}^{\Omega} |\omega| e^{j2\pi\omega t} d\omega$$

A gyakorlatban az ideális $|\omega|$ szűrő helyett annak egy $q(\omega)$ függvényvel ablakolt változatát alkalmazzuk a szűrés során (Hamming, koszinusz, stb.)

Konvolúciós kernelek (szűrők)

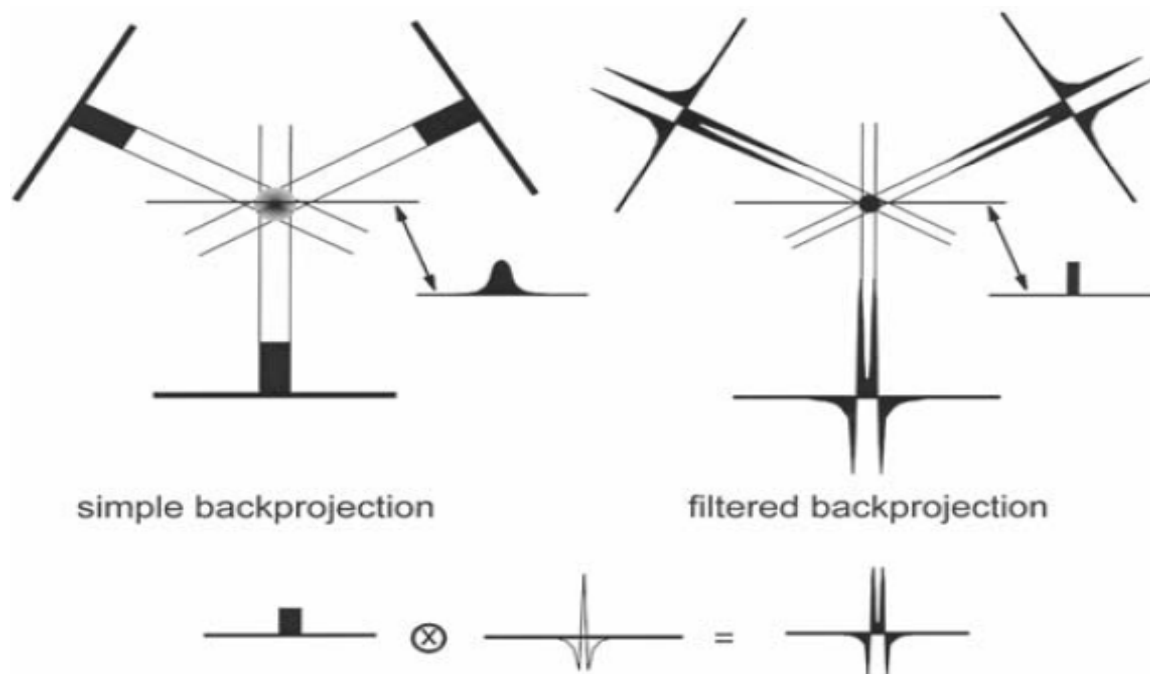
- Ramp: Egzakt kompenzáció (jó megoldás, ha nem zajos a vetület)
- Shepp-Logan: Zaj és felbontás közötti kompromisszum
- Hamming: Extrém magas frekvenciák “lesimítása”



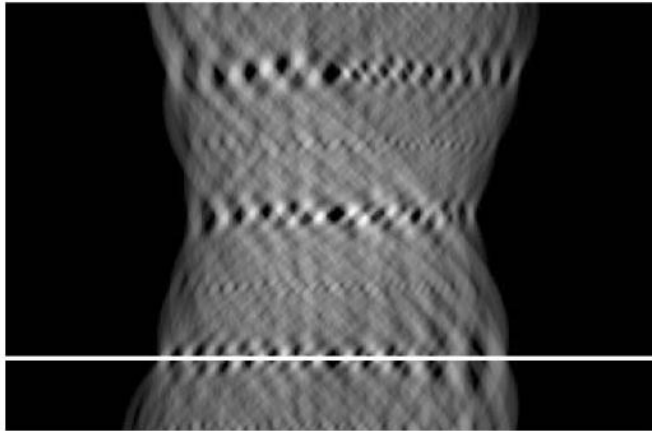
A rekonstrukció lépései

Input *szinogram*:

1. Szűrés
2. Visszavetítés
3. Összegzés

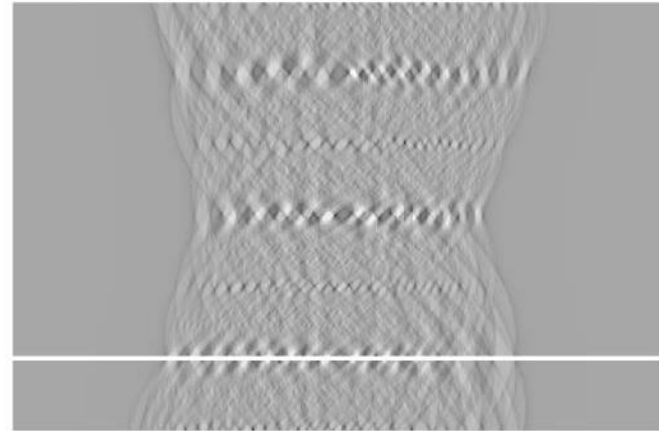
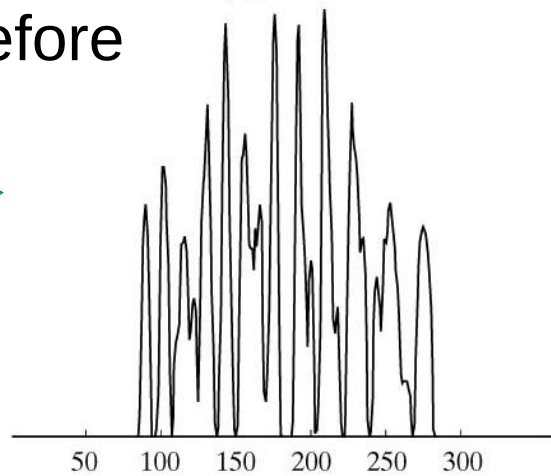


Szűrés



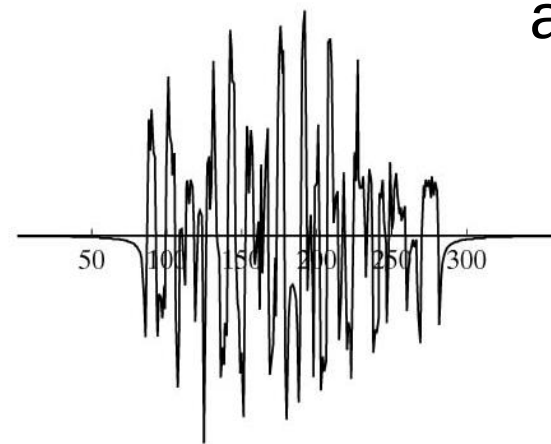
(a)

before

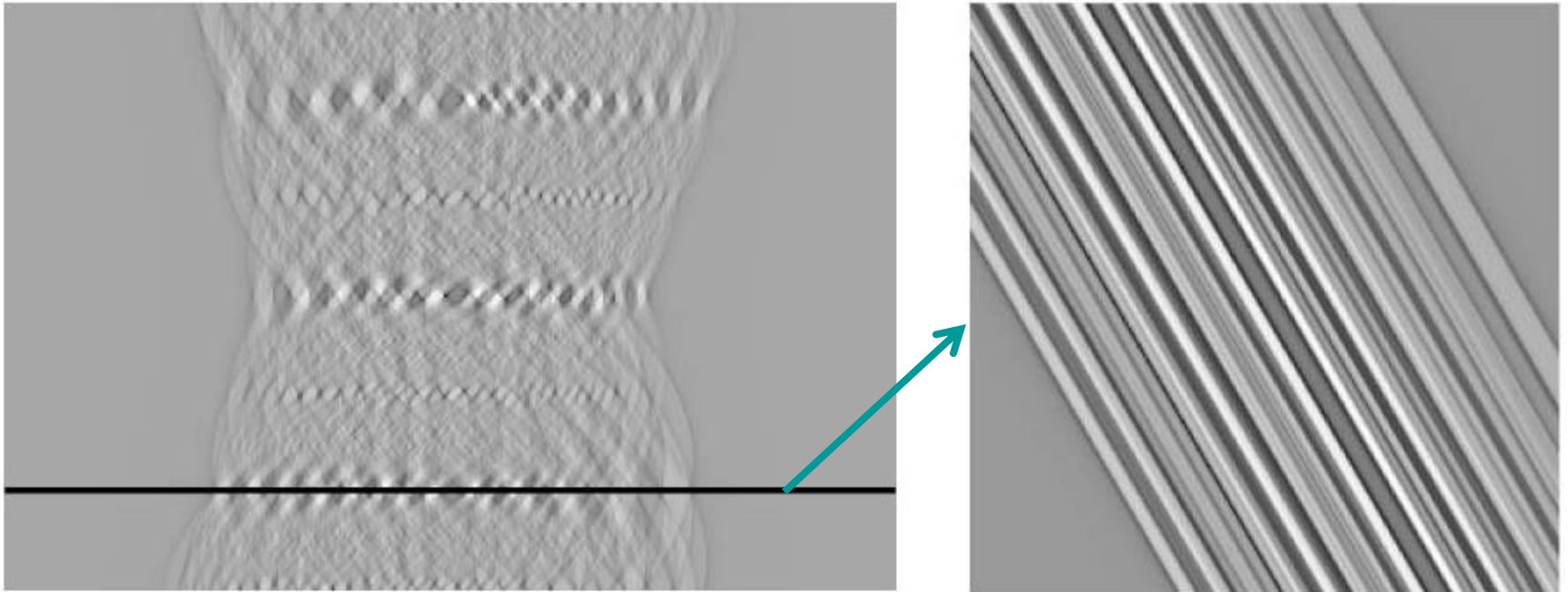


(b)

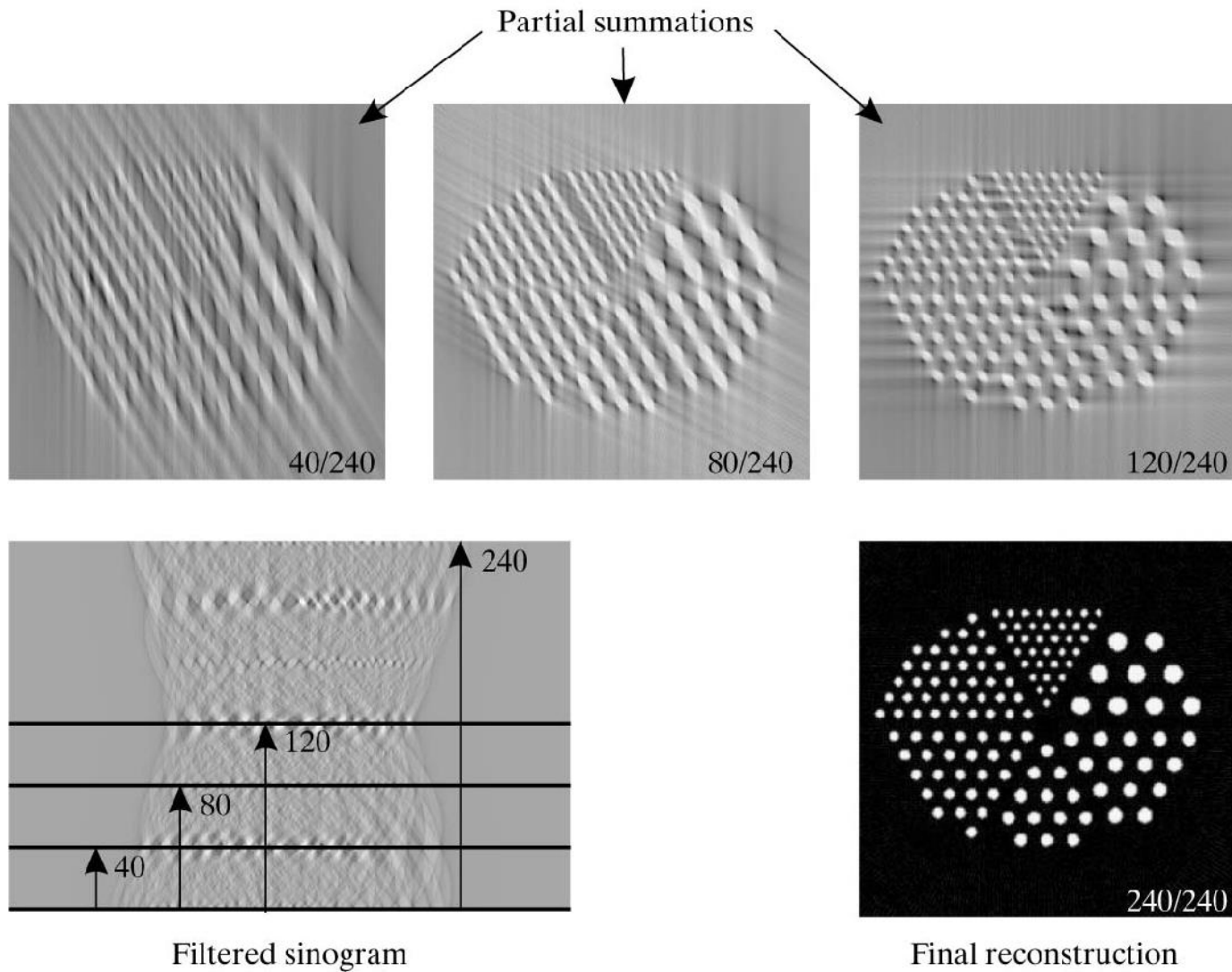
after



Visszavetítés



Összegzés



Szűrt visszavetítés

- Video:
 - 2D szinogram
 - Felüáteresztő szűrő minden szögre
 - sinogram visszavetítése a képtérbe
- **Forrás:** <http://hendrix.ei.dtu.dk/movies/moviehome.html>