

# Képrekonstrukció 4. előadás

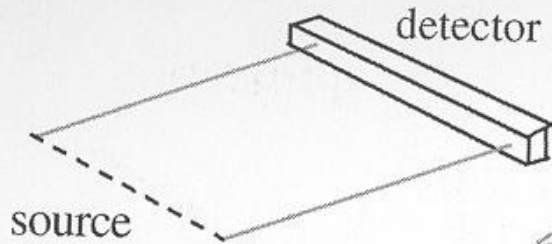


**Balázs Péter**

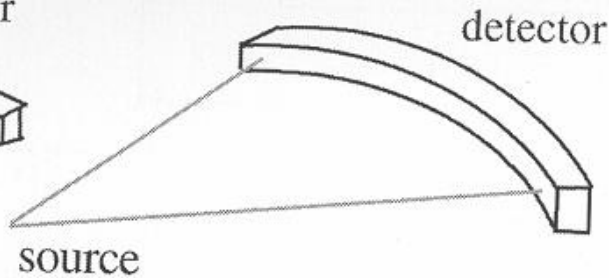
Képfeldolgozás és Számítógépes Grafika  
Tanszék

Szegedi Tudományegyetem

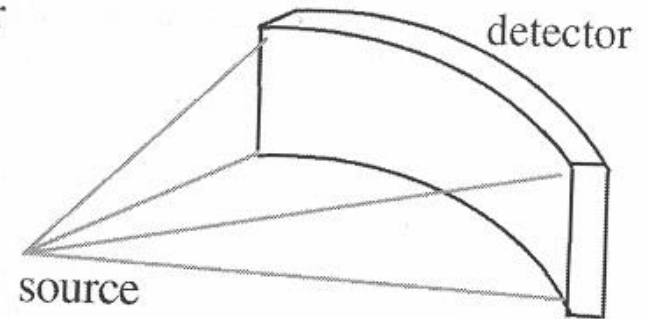
# Vetületi geometriák



parallel beam

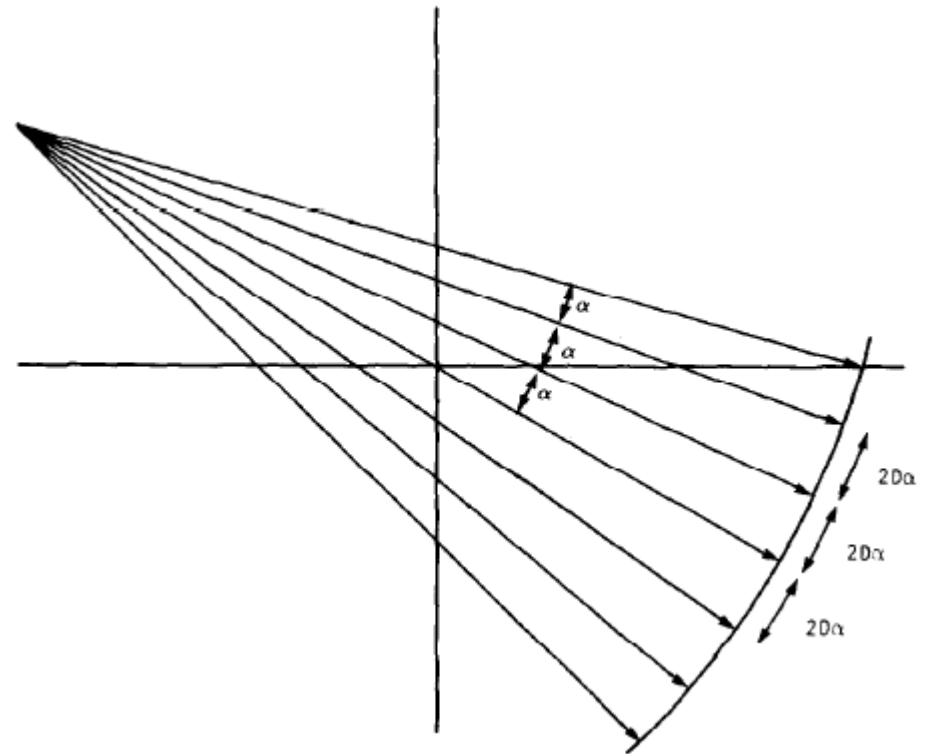
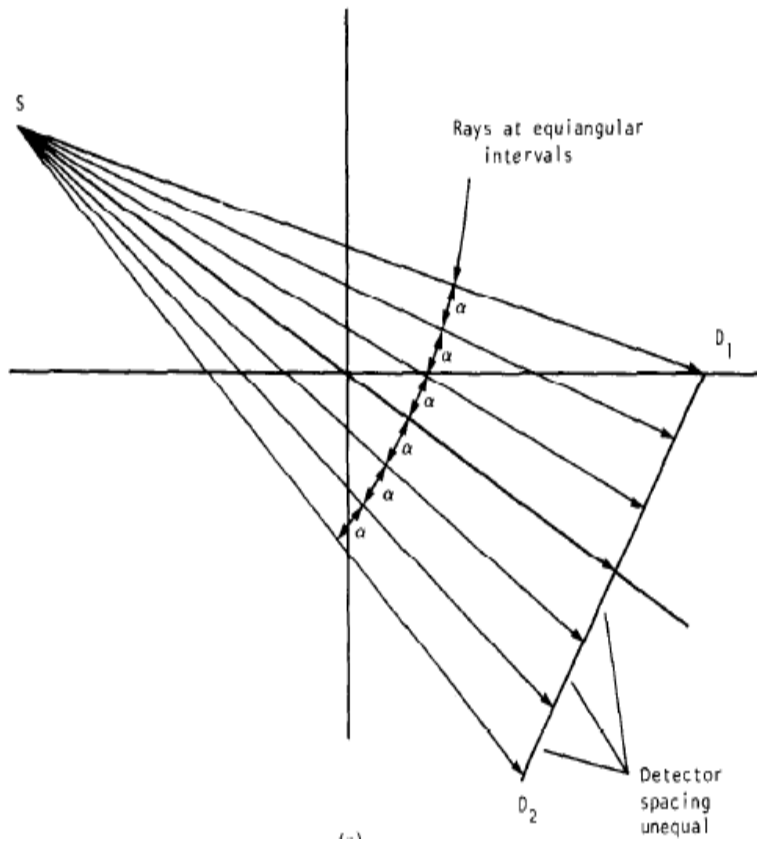


fan beam

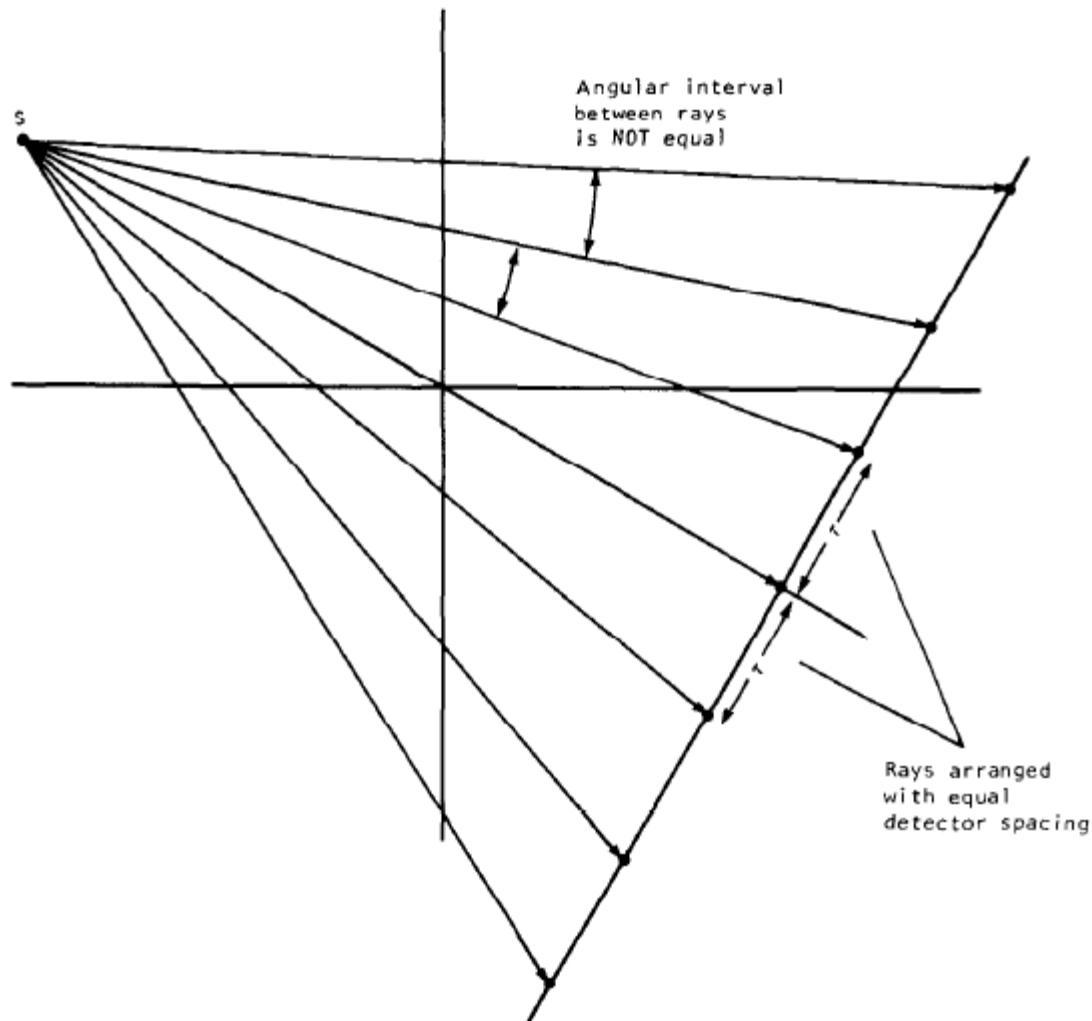


cone beam

# Ekvianguláris nyalábok



# Ekvidisztáns detektorok

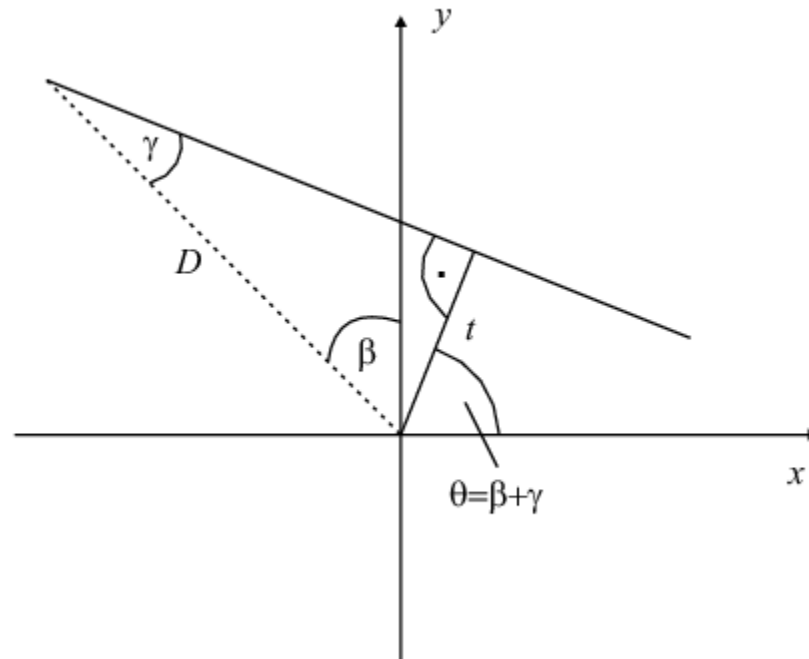


# Rekonstrukció legyezőnyaláb vetületekből

- Algebrai rekonstrukció
- Szűrt visszavetítés módosítása
- Re-binning: a legyezőnyaláb adatokból interpolációval párhuzamos vetületi adatok előállítása

# Áttérés ekvianguláris geometriáról párhuzamosra

- Adott:  $\gamma$ ,  $\beta$ ,  $D$
- $t = D \sin \gamma$
- $\theta = \gamma + \beta$

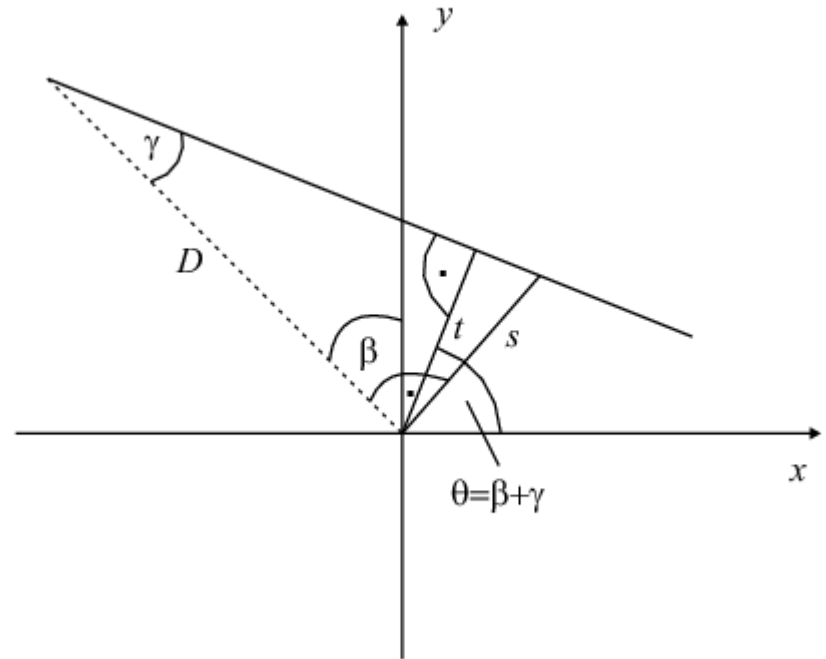


# Áttérés ekvidisztáns geometriáról párhuzamosra

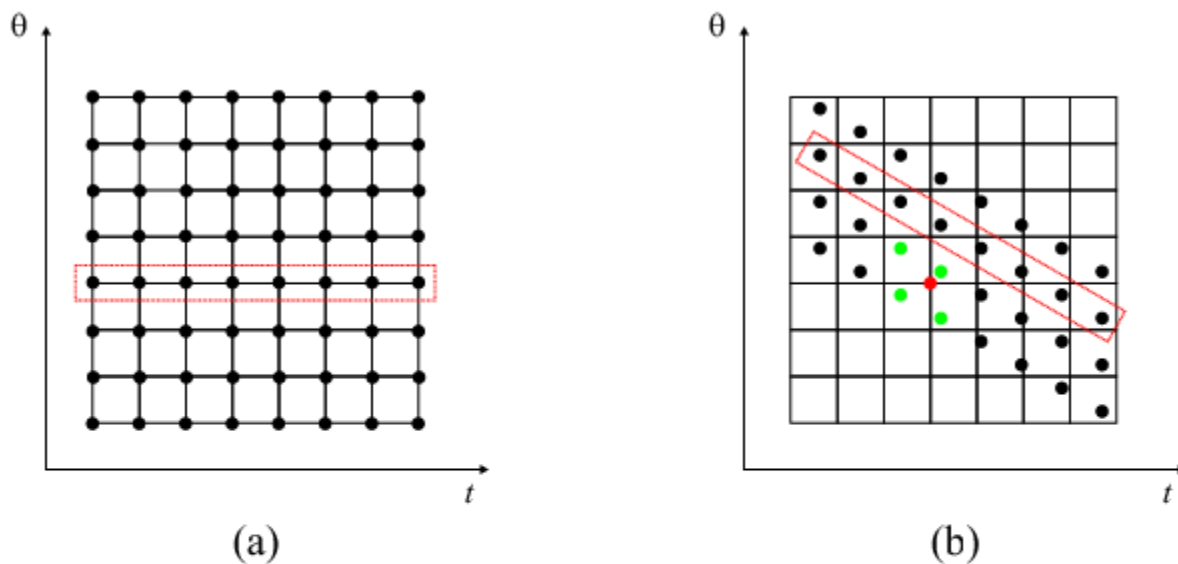
- Adott:  $s$ ,  $\beta$ ,  $D$

$$t = D \sin \gamma = D \frac{s}{\sqrt{D^2 + s^2}}$$

$$\theta = \beta + \gamma = \beta + \tan^{-1} \frac{s}{D}$$



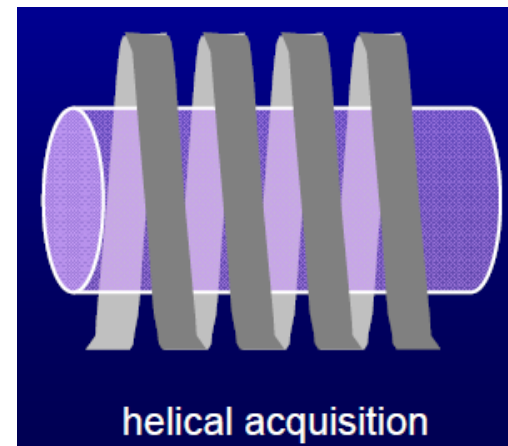
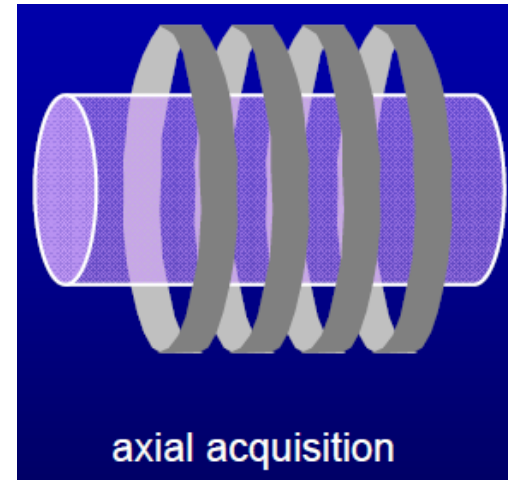
# Rebinning



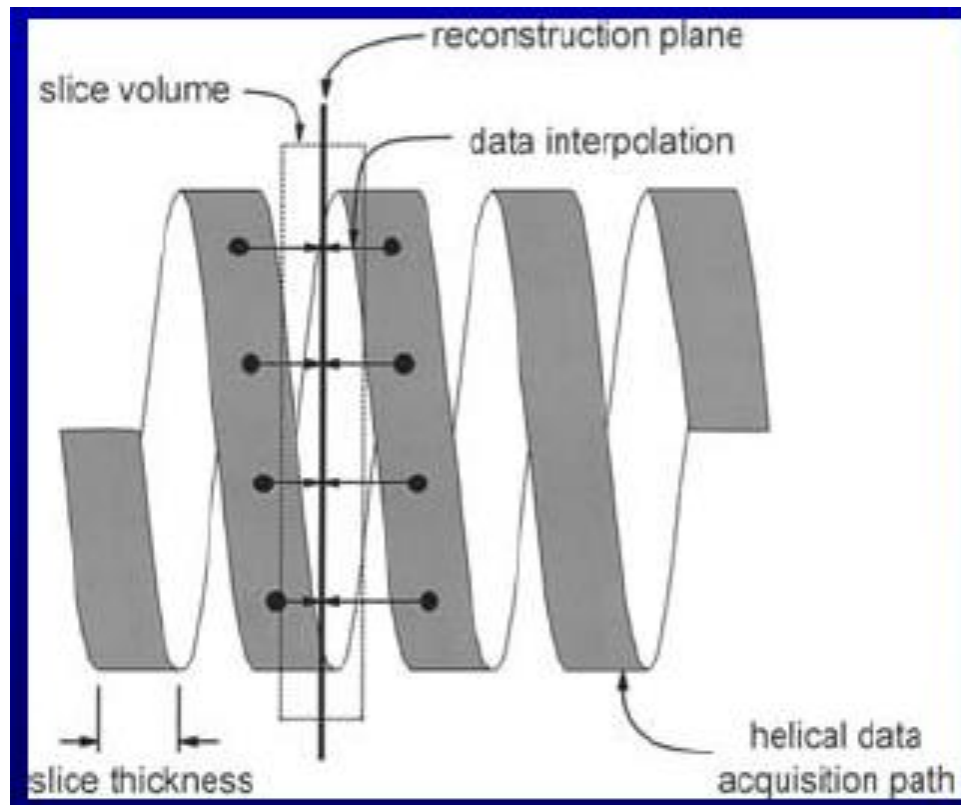
4.4. ábra. A szinogram mintavételezése (a) párhuzamos vetületek és (b) legyezőnyaláb vetületek esetén. Mindkét esetben szaggatott vonallal körülhatárolva az egy vetülethez tartozó vetítősugarakból adódó információ. A (b) ábrán zölddel jelzett pontok vesznek részt a pirossal jelzett rácspont értékének kialakításában az interpoláció során.

# Axiális vs. helikális vetületképzés

- A klasszikus rekonstrukciós eljárások cirkuláris utat feltételeznek → helikális adatot interpolálni kell a megfelelő síkra
- A helikális szkennelés esetén tetszőleges pozícióban számítható a keresztmetszeti kép



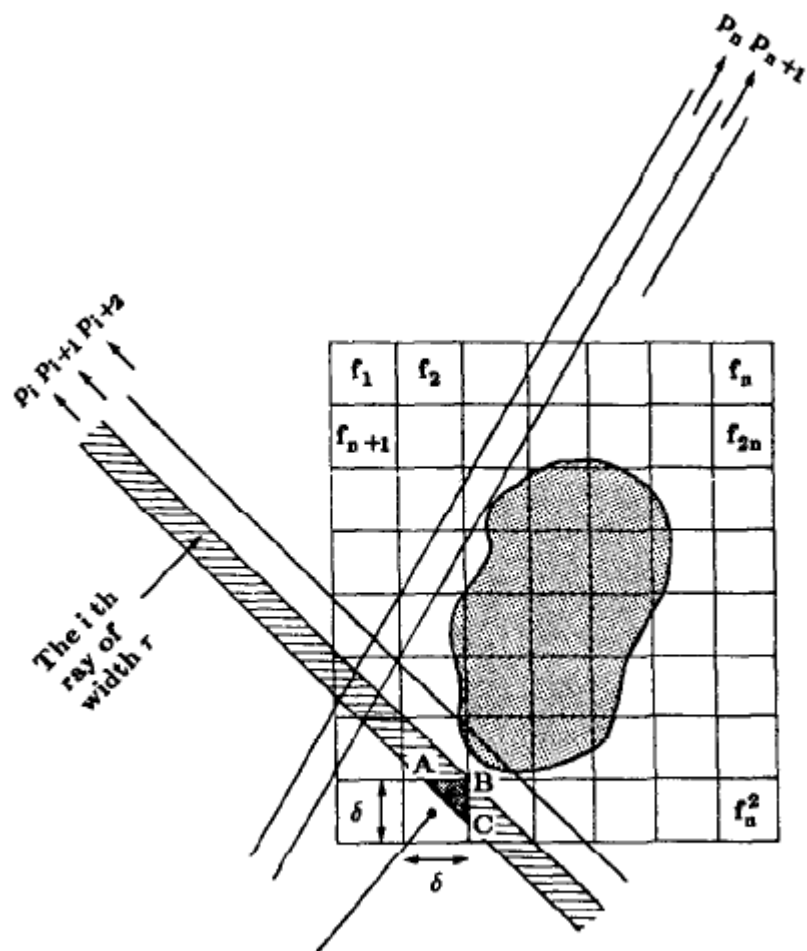
# Helikális interpoláció



# Algebrai rekonstrukciós technikák

- A transzformáció alapú technikák akkor adnak pontos eredményt, ha
  - sok vetület van
  - a vetületek eloszlása egyenletes  $180^\circ$  vagy  $360^\circ$ -on
- Algebrai rekonstrukciós technikák
  - Akkor is alkalmazhatók, ha a fentiek nem, vagy csak részben teljesülnek (pl.: csonkolt vetületek)
  - Kezelni tudják a vetületi vonalak kisebb elhajlását és a vetületi energiák gyengülését is
  - Pontatlanabbak és lassabbak a transzformáció alapú technikáknál
  - Kezelni tudják az a priori információt

# A modell



$$w_{ji} \text{ for this cell} = \frac{\text{area of } ABC}{\delta^2}$$

$$w_{11}f_1 + w_{12}f_2 + w_{13}f_3 + \dots + w_{1N}f_N = p_1$$

$$w_{21}f_1 + w_{22}f_2 + \dots + w_{2N}f_N = p_2$$

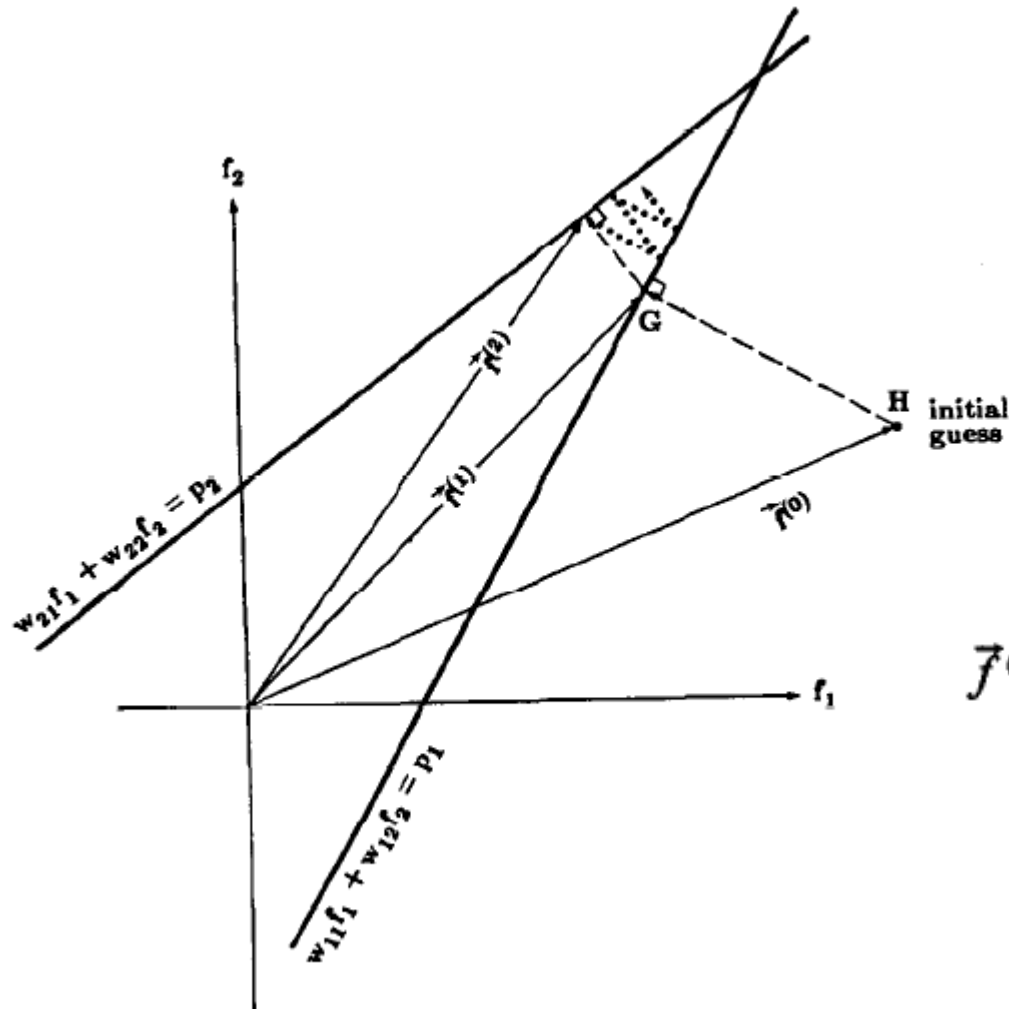
:

$$w_{M1}f_1 + w_{M2}f_2 + \dots + w_{MN}f_N = p_M.$$

# Iteratív megoldás

- Az egyenletrendszer közvetlen megoldása nem lehetséges (nagy méret, aluldefiniáltság, zajból adódó inkonzisztencia)
- $(f_1, f_2, \dots, f_N)$ :  $N$ -dimenziós térbeli pont
- Egyenletek: hipersíkok
- Megoldás: iteratív módon (Kaczmarz eljárása)

# 2 vetület, 2 képpont és egyértelmű megoldás esetén



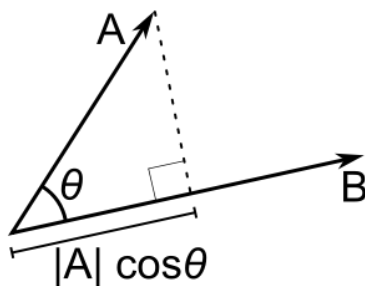
$$w_{11}f_1 + w_{12}f_2 = p_1$$

$$w_{21}f_1 + w_{22}f_2 = p_2.$$

$$\vec{f}^{(i)} = \vec{f}^{(i-1)} - \frac{(\vec{f}^{(i-1)} \cdot \vec{w}_i - p_i)}{\vec{w}_i \cdot \vec{w}_i} \vec{w}_i$$

$$\vec{w}_i = (w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{iN})$$

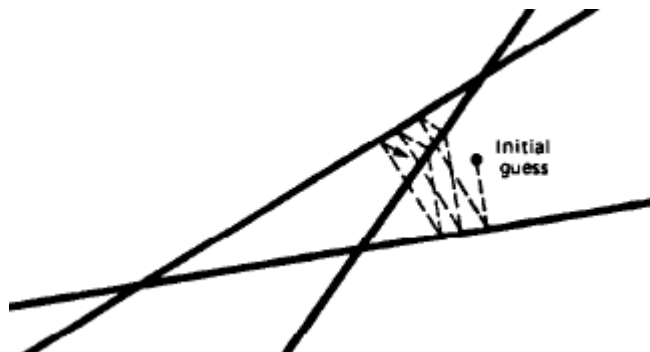
- Az első egyenlet által meghatározott hipersík:  $\vec{w}_1 \cdot \vec{f} = p_1$
- Ez a hipersík az  $\vec{OD} = \vec{w}_1$  vektorra merőleges
- Az  $\vec{OU}$  egységvektorra:  $\vec{OU} = \frac{\vec{w}_1}{\sqrt{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1}}$
- A hipersík origótól vett távolsága:  $|\vec{OA}| = \vec{OU} \cdot \vec{OC} = \frac{1}{\sqrt{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1}}(\vec{w}_1 \cdot \vec{OC}) = \frac{1}{\sqrt{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1}}(\vec{w}_1 \cdot \vec{f}) = \frac{p_1}{\sqrt{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1}}$
- $\vec{f}^{(1)} = \vec{f}^{(0)} - \vec{GH}$
- $|\vec{GH}| = |\vec{OF}| - |\vec{OA}| = \vec{f}^{(0)} \cdot \vec{OU} - |\vec{OA}| = \frac{\vec{f}^{(0)} \cdot \vec{w}_1 - p_1}{\sqrt{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1}}$
- $\vec{GH} = |\vec{GH}| \vec{OU} = \frac{\vec{f}^{(0)} \cdot \vec{w}_1 - p_1}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1} \vec{w}_1$



**$|\mathbf{A}| \cos(\theta)$ : az  $\mathbf{A}$  vetülete  $\mathbf{B}$ -re**

# Finomabb megfontolások

- Ha a hipersíkok merőlegesek, akkor  $M$  lépésben megtaláljuk a megoldást, ha az általuk bezárt szögek kicsik, akkor a konvergencia lassú lehet  $\rightarrow$  válasszuk ennek megfelelően a hipersíkok sorrendjét
- Ha a megoldás nem egyértelmű, akkor a kezdeti megoldásjavaslathoz legközelebbi megoldáshoz konvergál az eljárás
- Inkonzisztenciát okozó zaj esetén nincs konvergencia



# Egy egyszerű példa (Edwin L. Dove)

$$\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} \begin{matrix} 12 \\ 8 \end{matrix}$$

13    11    9    7

vízszintes

$$\begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + (12 - 0) / 2 \\ 0 + (12 - 0) / 2 \\ 0 + (8 - 0) / 2 \\ 0 + (8 - 0) / 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 12 \\ 8 \end{matrix}$$

10    10    10    10

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$$

0    0    0    0

függőleges

$$\begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 + (11 - 10) / 2 \\ 6 + (9 - 10) / 2 \\ 4 + (11 - 10) / 2 \\ 4 + (9 - 10) / 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.5 \\ 5.5 \\ 4.5 \\ 3.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6.5 & 5.5 \\ 4.5 & 3.5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 12 \\ 8 \end{matrix}$$

10    11    9    10

átlós

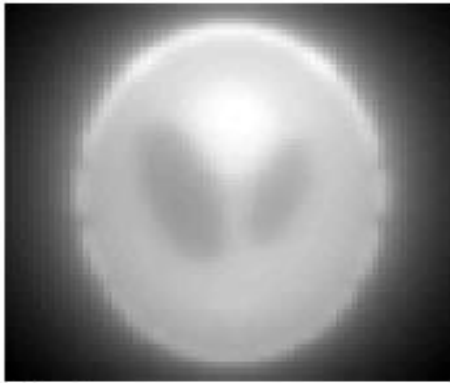
$$\begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.5 + (7 - 10) / 2 \\ 5.5 + (13 - 10) / 2 \\ 4.5 + (13 - 10) / 2 \\ 3.5 + (7 - 10) / 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 12 \\ 8 \end{matrix}$$

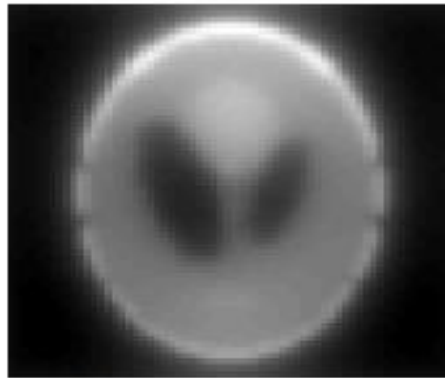
13    11    9    7

# Az iterációk számáról

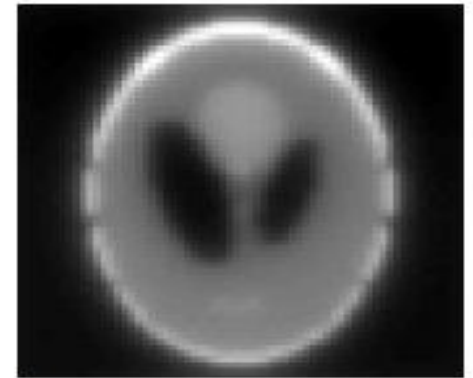
Shepp-Logan fejfantom



$k=1$



$k=2$



$k=3$



$k=5$



$k=10$

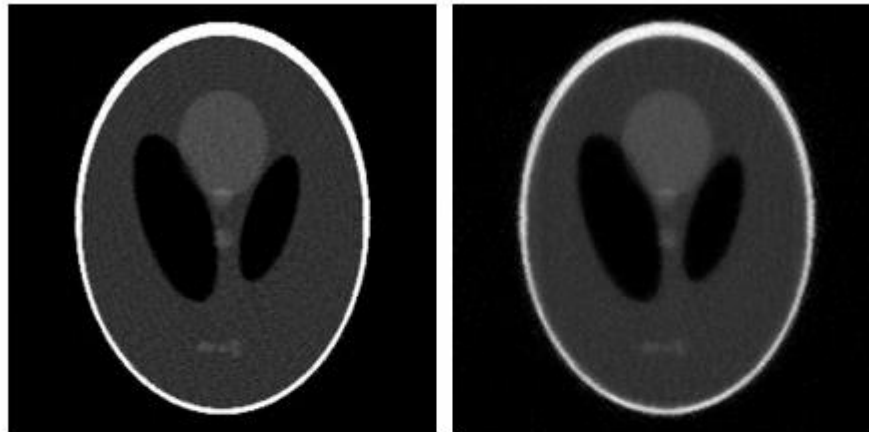


$k=30$

# Simultaneous Iterative Reconstructive Technique (SIRT)

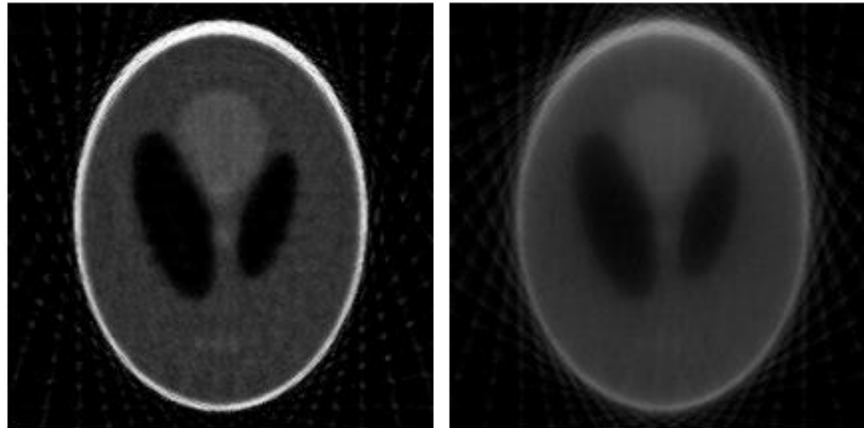
- A pixelek módosítása nem sugaranként történik, hanem az összes vetületi sugárra egyszerre átlagolva
- Lassabb konvergencia, jobb minőségű kép

# ART és SIRT összehasonlítása



3.7. ábra. Példa a SIRT simább képére (45 vetület, 70 iteráció). Balra: ART rekonstrukció, jobbra: SIRT rekonstrukció.

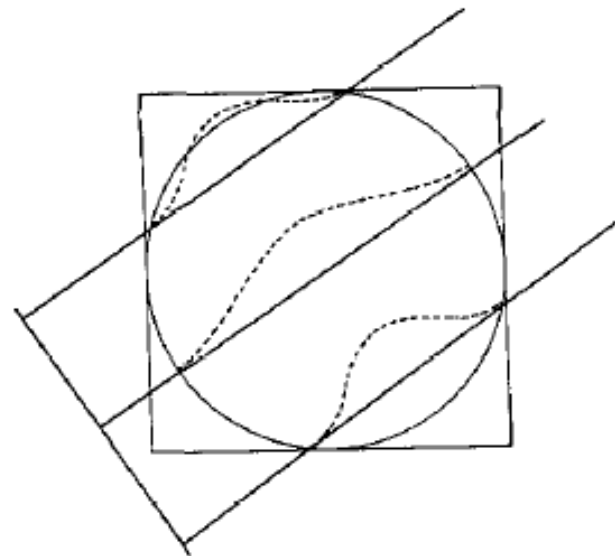
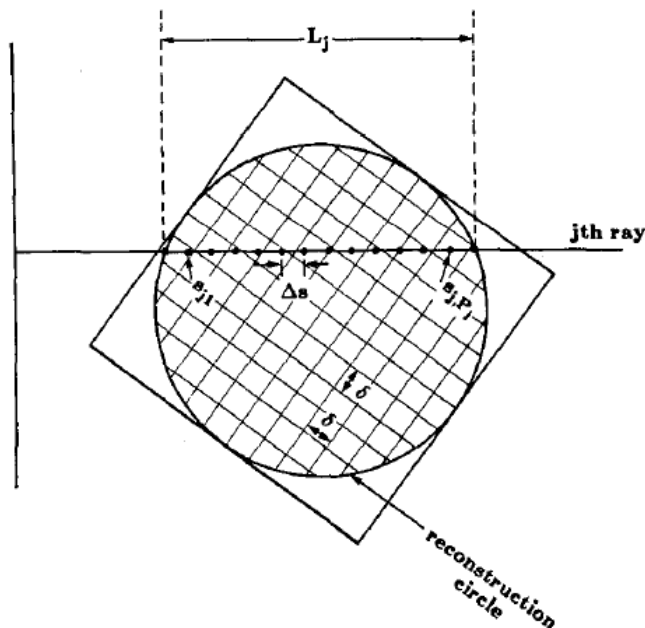
# ART és SIRT összehasonlítása

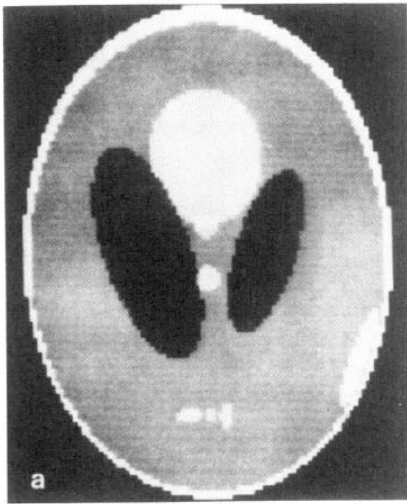


3.6. ábra. Példa a SIRT lassabb konvergenciájára (20 vetület, 10 iteráció).  
Balra: ART rekonstrukció, jobbra: SIRT rekonstrukció.

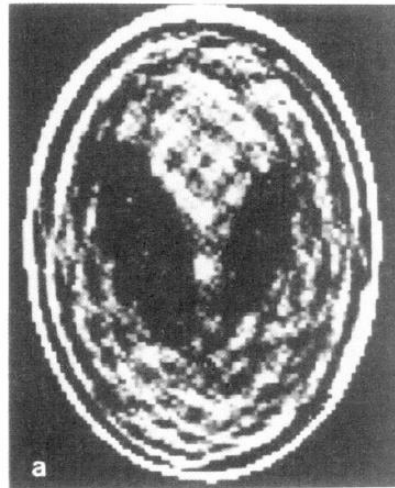
# Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique (SART)

- Vetületek számítása nem pixel alapon, hanem bilineáris interpolációval
- Pixelek korrekciója szimultán módon, nem egyenletes súllyal (Hamming-ablak)

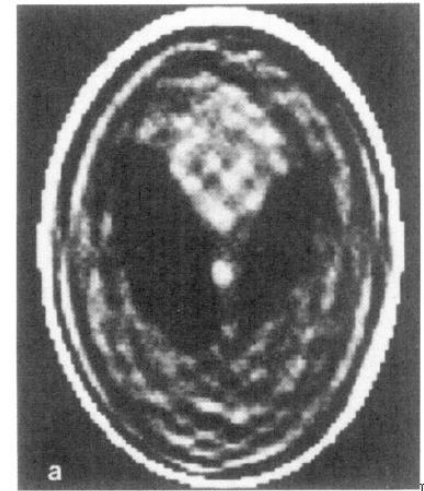




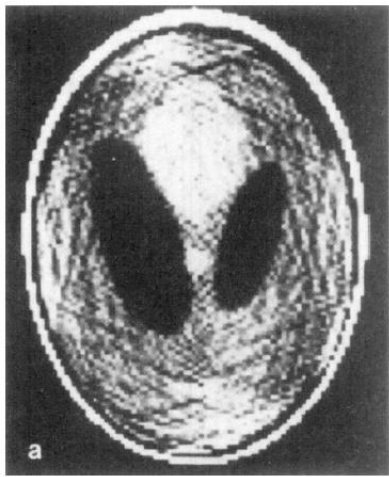
eredeti



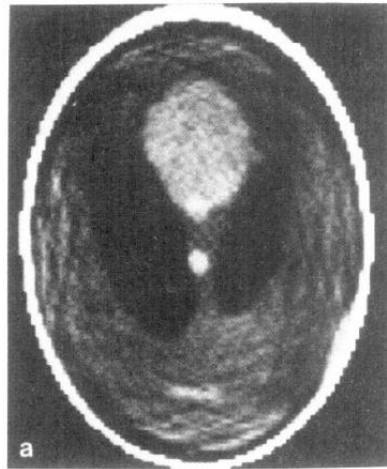
ART (1 iter.)



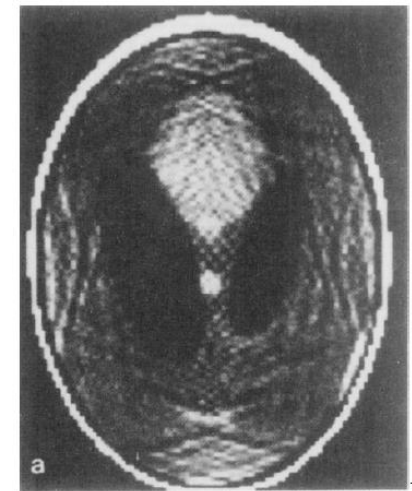
SART (1 iter.)



ART + Hamming (1  
iter.)



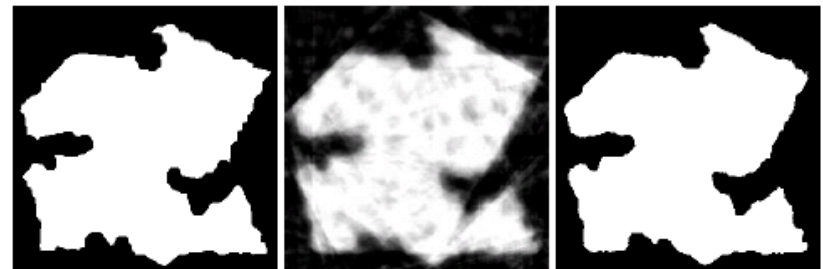
SART + Hamming (1  
iter.)



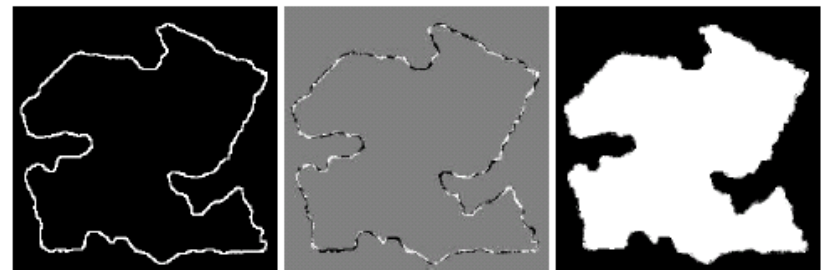
SART + Hamming (2  
iter.)

# DART (Discrete ART)

```
Compute a start reconstruction  $x^0$  using ARM;  
 $t := 0$ ;  
while (stop criterion is not met) do  
  begin  
     $t := t + 1$ ;  
    Compute the segmented image  $s^t = r(x^{t-1})$ ;  
    Compute the set  $I^t$  of non-boundary pixels of  $s^t$ ;  
    Compute the image  $y^t$  from  $x^{t-1}$  and  $s^t$ , setting  
     $y_i^t := s_i^t$  if  $i \in I^t$  and  $y_i^t := x_i^{t-1}$  otherwise;  
    Using  $y^t$  as the start solution, compute the ARM reconstruction  
     $x^t$ , while keeping the pixels in  $I$  fixed;  
    Apply a smoothing operation to the pixels that are not in  $I$ ;  
  end
```

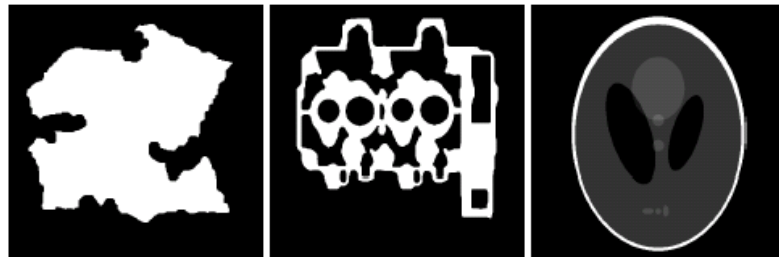


(a) original image    (b) ARM reconstruction    (c) thresholded rec.



(d) boundary pixels    (e) DART update    (f) after DART iter.

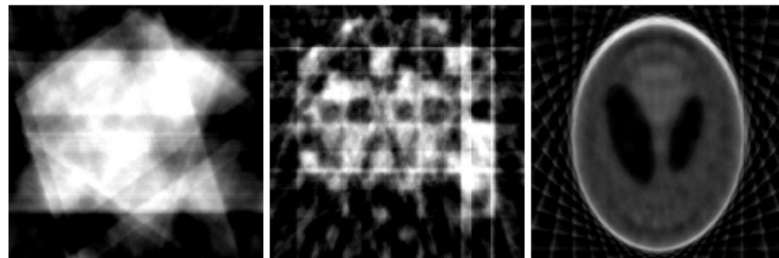
# DART eredmények



(a) Simple

(b) Cylinders

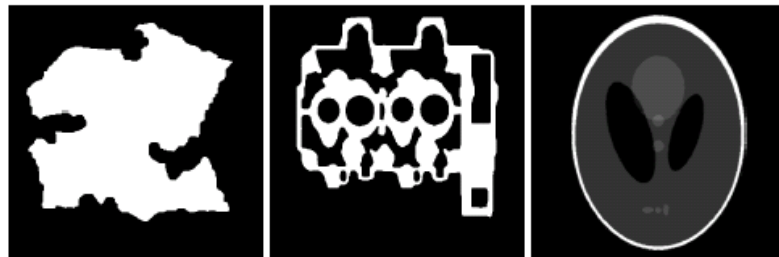
(c) Shepp-Logan



(d) ARM: 5 proj.

(e) ARM: 10 proj.

(f) ARM: 18 proj.



(g) DART: 5 proj.

(h) DART: 10 proj.

(i) DART: 18 proj.

| phantom     | $d$       | #DART<br>iters | pixel error    | running time<br>(sec.) |
|-------------|-----------|----------------|----------------|------------------------|
| Simple      | 4         | 120            | 0.03557        | 8.7                    |
|             | <b>5</b>  | <b>110</b>     | <b>0.00042</b> | <b>9.4</b>             |
|             | 6         | 90             | 0.00026        | 8.6                    |
| Cylinders   | 9         | 130            | 0.08303        | 18.7                   |
|             | <b>10</b> | <b>110</b>     | <b>0.00175</b> | <b>17.4</b>            |
|             | 11        | 120            | 0.00167        | 20.5                   |
| Shepp-Logan | 12        | 110            | 0.14213        | 22.5                   |
|             | 15        | 60             | 0.08440        | 15.3                   |
|             | <b>18</b> | <b>100</b>     | <b>0.02567</b> | <b>29.6</b>            |
|             | 21        | 80             | 0.02355        | 27.4                   |