

Képrekonstrukció 9. előadás



Balázs Péter

Képfeldolgozás és Számítógépes Grafika Tanszék
Szegedi Tudományegyetem

hv-konvex összefüggő halmazok

	1				
	1	1	1	1	1
1					
1					
1					

	1				
	1	1	1	1	1
1	1	1			
1	1	1			
1					

Mag-burok-szerű rekonstrukció:

- S. Brunetti, A. Del Lungo, F. Del Ristoro, A. Kuba, M. Nivat, 1996, 1998, 2001
- Komplexitás: $O(mn \cdot \log(mn) \cdot \min\{m^2, n^2\})$

Átírás 2SAT kifejezésre:

- M. Chrobak, C. Dürr, 1999, A. Kuba, 1999
- Komplexitás: $O(mn \cdot \min\{m^2, n^2\})$

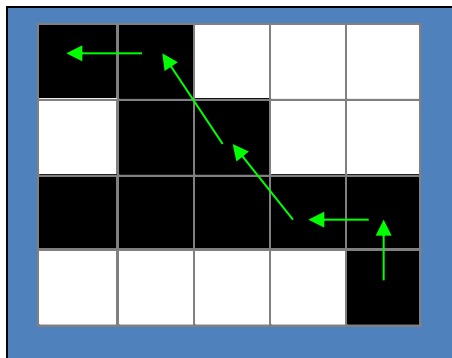
8- de nem 4-összefüggő eset:

- P. Balázs, E. Balogh, A. Kuba, 2003
- Komplexitás: $O(mn \cdot \min\{m, n\})$

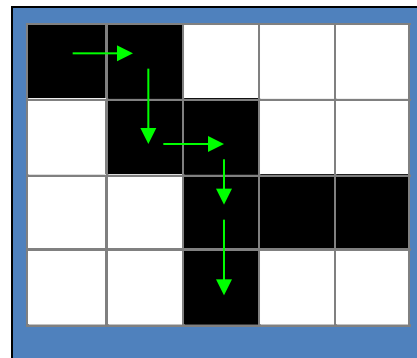
hv-konvex irányított halmazok

- *ÉK-út*: minden pont az előzőtől szomszédosan északra, keletre vagy északkeletre van
- *ÉK-irányított halmaz*: egy kitüntetett pontból (forrás) minden másik pontba van *ÉK-út*
- Egy *hv*-konvex poliomino, akkor és csak akkor *ÉK-irányított*, ha a befoglaló téglalap bal alsó sarkát tartalmazza

ÉNY:

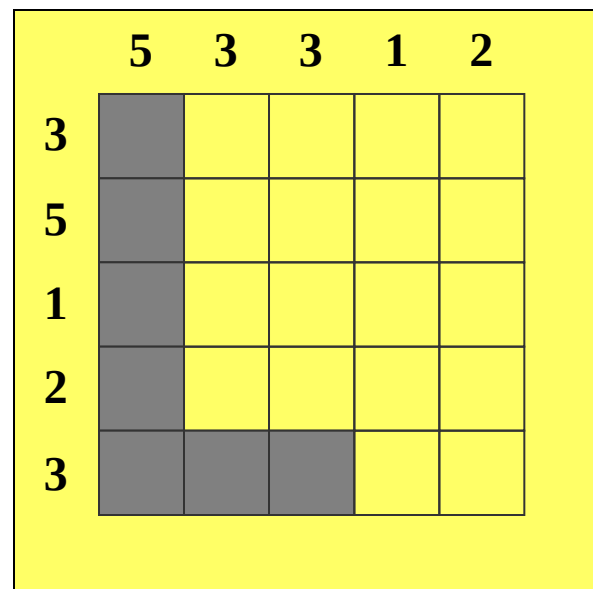


DK:



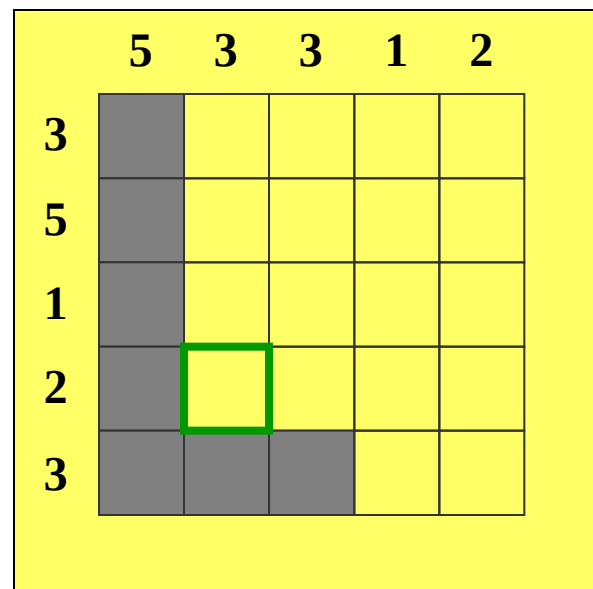
Irányított konvex poliomínók

- [A. Del Lungo '94, A. Kuba, E. Balogh '02]: Minden horizontálisan vagy vertikálisan konvex (ÉK)-irányított poliomínó egyértelműen rekonstruálható a horizontális és vertikális vetületekből $O(mn)$ időben.
- [Balázs '06]: Átlós konvexitás esetén is igaz.



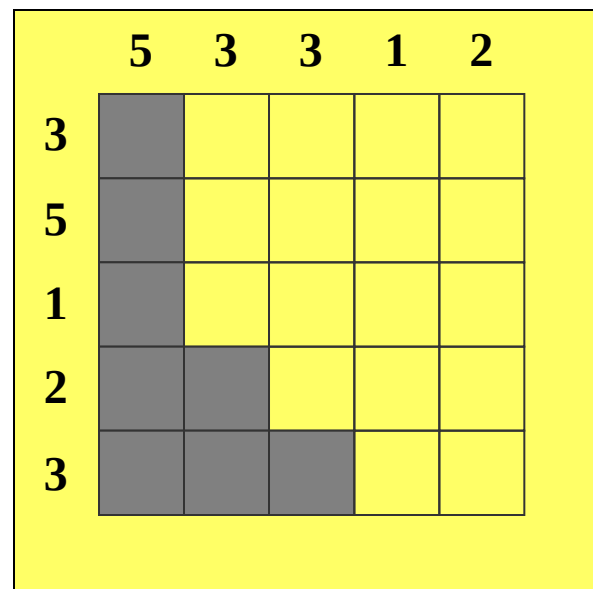
Irányított konvex poliomínók

- [A. Del Lungo '94, A. Kuba, E. Balogh '02]: Minden horizontálisan vagy vertikálisan konvex (ÉK)-irányított poliomínó egyértelműen rekonstruálható a horizontális és vertikális vetületekből $O(mn)$ időben.
- [Balázs '06]: Átlós konvexitás esetén is igaz.



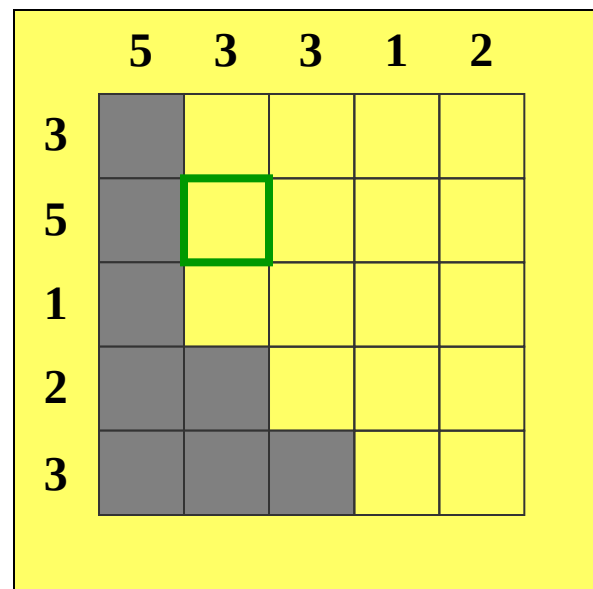
Irányított konvex poliomínók

- [A. Del Lungo '94, A. Kuba, E. Balogh '02]: Minden horizontálisan vagy vertikálisan konvex (ÉK)-irányított poliomínó egyértelműen rekonstruálható a horizontális és vertikális vetületekből $O(mn)$ időben.
- [Balázs '06]: Átlós konvexitás esetén is igaz.



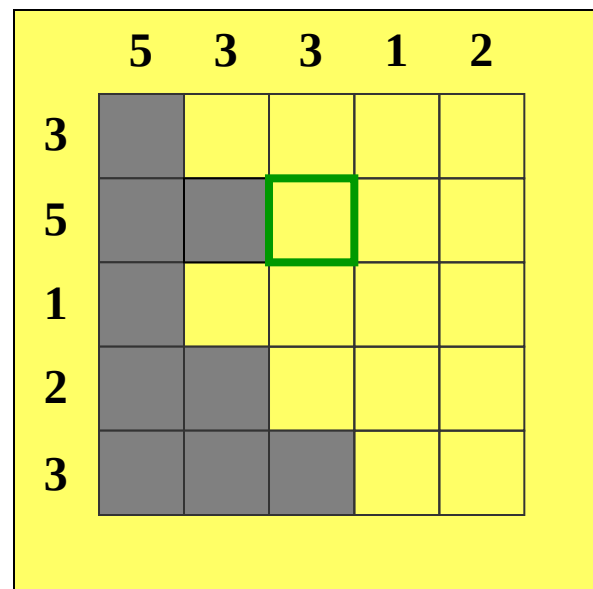
Irányított konvex poliomínók

- [A. Del Lungo '94, A. Kuba, E. Balogh '02]: Minden horizontálisan vagy vertikálisan konvex (ÉK)-irányított poliomínó egyértelműen rekonstruálható a horizontális és vertikális vetületekből $O(mn)$ időben.
- [Balázs '06]: Átlós konvexitás esetén is igaz.



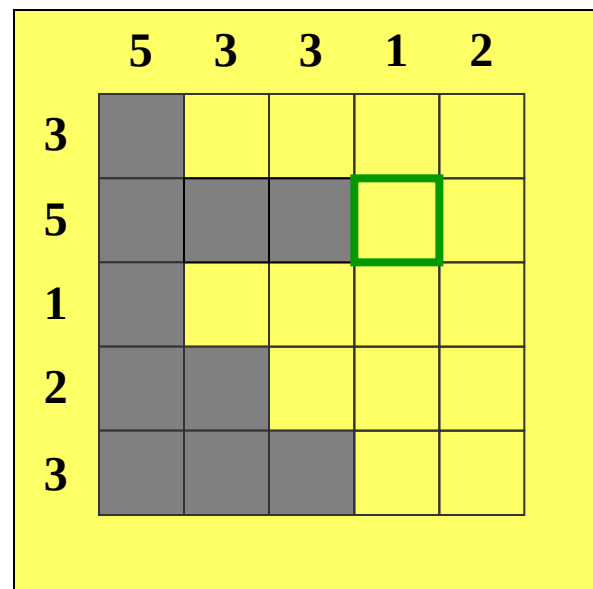
Irányított konvex poliomínók

- [A. Del Lungo '94, A. Kuba, E. Balogh '02]: Minden horizontálisan vagy vertikálisan konvex (ÉK)-irányított poliomínó egyértelműen rekonstruálható a horizontális és vertikális vetületekből $O(mn)$ időben.
- [Balázs '06]: Átlós konvexitás esetén is igaz.



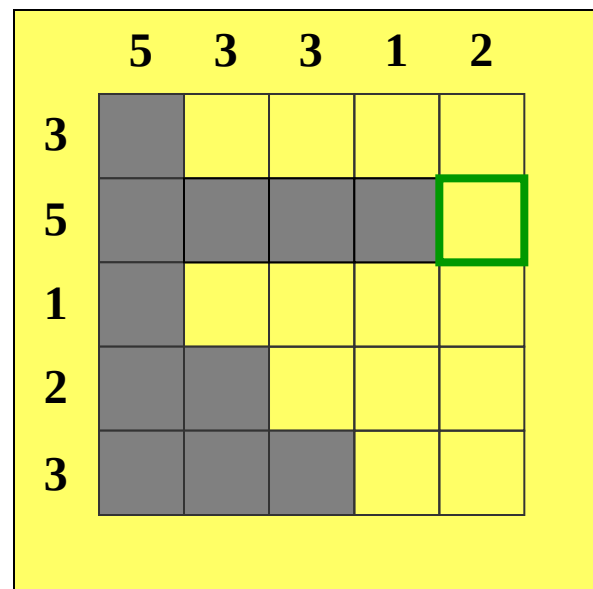
Irányított konvex poliomínók

- [A. Del Lungo '94, A. Kuba, E. Balogh '02]: Minden horizontálisan vagy vertikálisan konvex (ÉK)-irányított poliomínó egyértelműen rekonstruálható a horizontális és vertikális vetületekből $O(mn)$ időben.
- [Balázs '06]: Átlós konvexitás esetén is igaz.



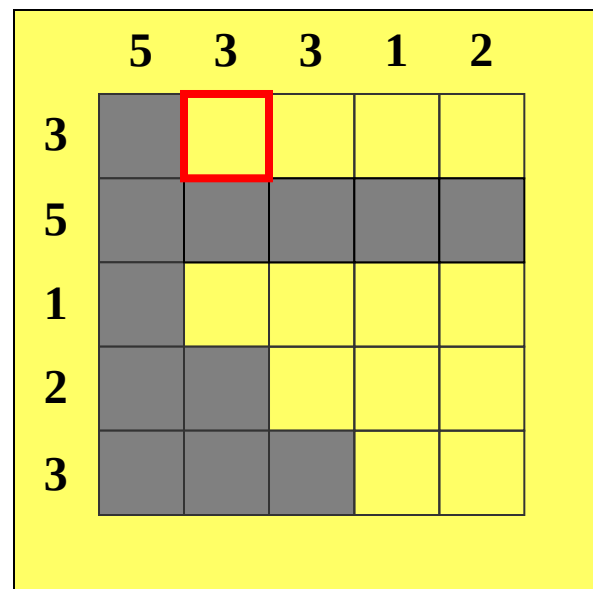
Irányított konvex poliomínók

- [A. Del Lungo '94, A. Kuba, E. Balogh '02]: Minden horizontálisan vagy vertikálisan konvex (ÉK)-irányított poliomínó egyértelműen rekonstruálható a horizontális és vertikális vetületekből $O(mn)$ időben.
- [Balázs '06]: Átlós konvexitás esetén is igaz.



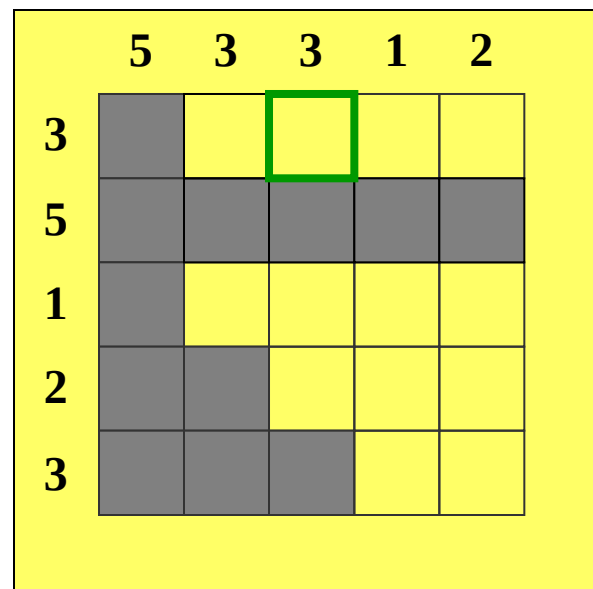
Irányított konvex poliomínók

- [A. Del Lungo '94, A. Kuba, E. Balogh '02]: Minden horizontálisan vagy vertikálisan konvex (ÉK)-irányított poliomínó egyértelműen rekonstruálható a horizontális és vertikális vetületekből $O(mn)$ időben.
- [Balázs '06]: Átlós konvexitás esetén is igaz.



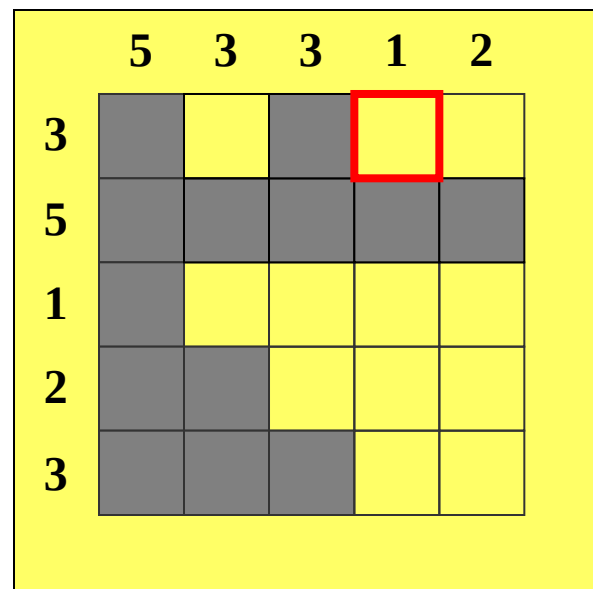
Irányított konvex poliomínók

- [A. Del Lungo '94, A. Kuba, E. Balogh '02]: Minden horizontálisan vagy vertikálisan konvex (ÉK)-irányított poliomínó egyértelműen rekonstruálható a horizontális és vertikális vetületekből $O(mn)$ időben.
- [Balázs '06]: Átlós konvexitás esetén is igaz.



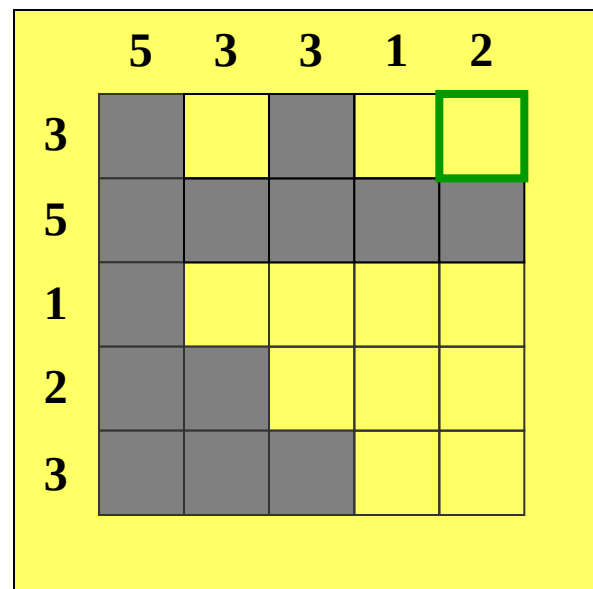
Irányított konvex poliomínók

- [A. Del Lungo '94, A. Kuba, E. Balogh '02]: Minden horizontálisan vagy vertikálisan konvex (ÉK)-irányított poliomínó egyértelműen rekonstruálható a horizontális és vertikális vetületekből $O(mn)$ időben.
- [Balázs '06]: Átlós konvexitás esetén is igaz.



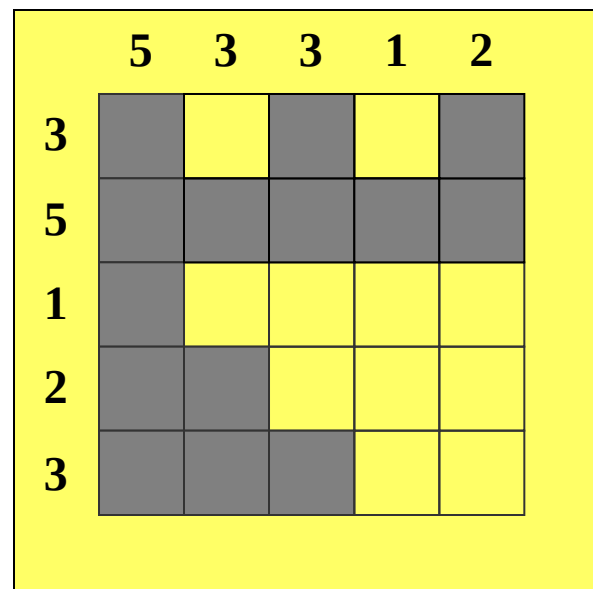
Irányított konvex poliomínók

- [A. Del Lungo '94, A. Kuba, E. Balogh '02]: Minden horizontálisan vagy vertikálisan konvex (ÉK)-irányított poliomínó egyértelműen rekonstruálható a horizontális és vertikális vetületekből $O(mn)$ időben.
- [Balázs '06]: Átlós konvexitás esetén is igaz.



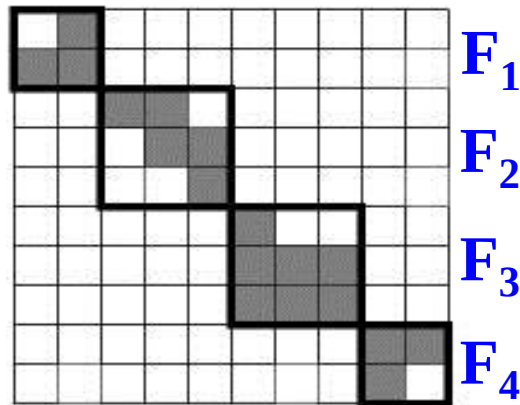
Irányított konvex poliomínók

- [A. Del Lungo '94, A. Kuba, E. Balogh '02]: Minden horizontálisan vagy vertikálisan konvex (ÉK)-irányított poliomínó egyértelműen rekonstruálható a horizontális és vertikális vetületekből $O(mn)$ időben.
- [Balázs '06]: Átlós konvexitás esetén is igaz.

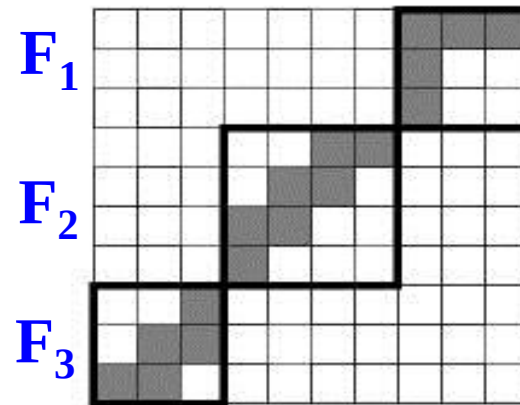


hv-konvex 8-összefüggő halmazok komponensei

- F maximális 4-összefüggő részhalmazai
 - 8-összefüggő halmaz esetén legalább 2 komponens van



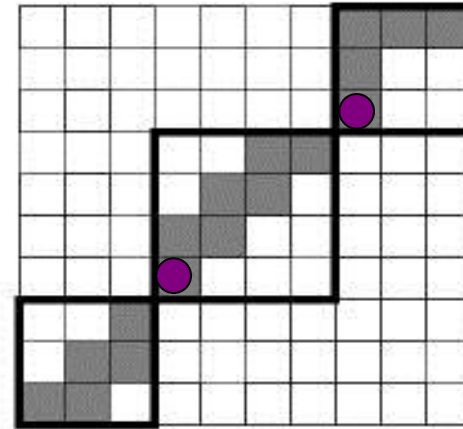
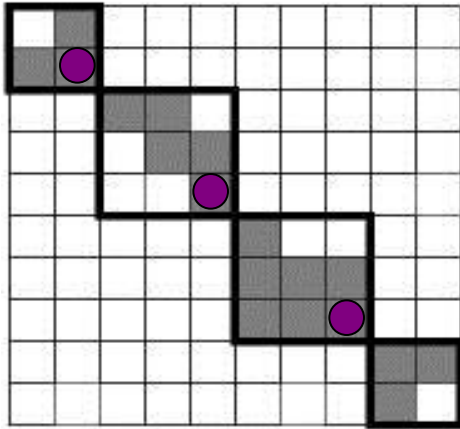
ÉNY típus



ÉK típus

Komponensek irányítottsága

ÉNY
DK, ÉNY
DK, ÉNY
DK



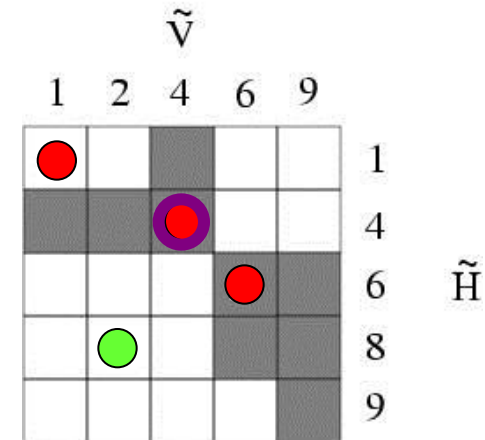
ÉK
ÉK, DNY
DNY

$C_F := \{\text{az } \acute{E}NY\text{- / } \acute{E}K\text{-irányított komponensek forrásai}\}$

- C_F egy tetszőleges elemének ismerete elegendő a rekonstrukcióhoz

Egyenlősségi pozíciók

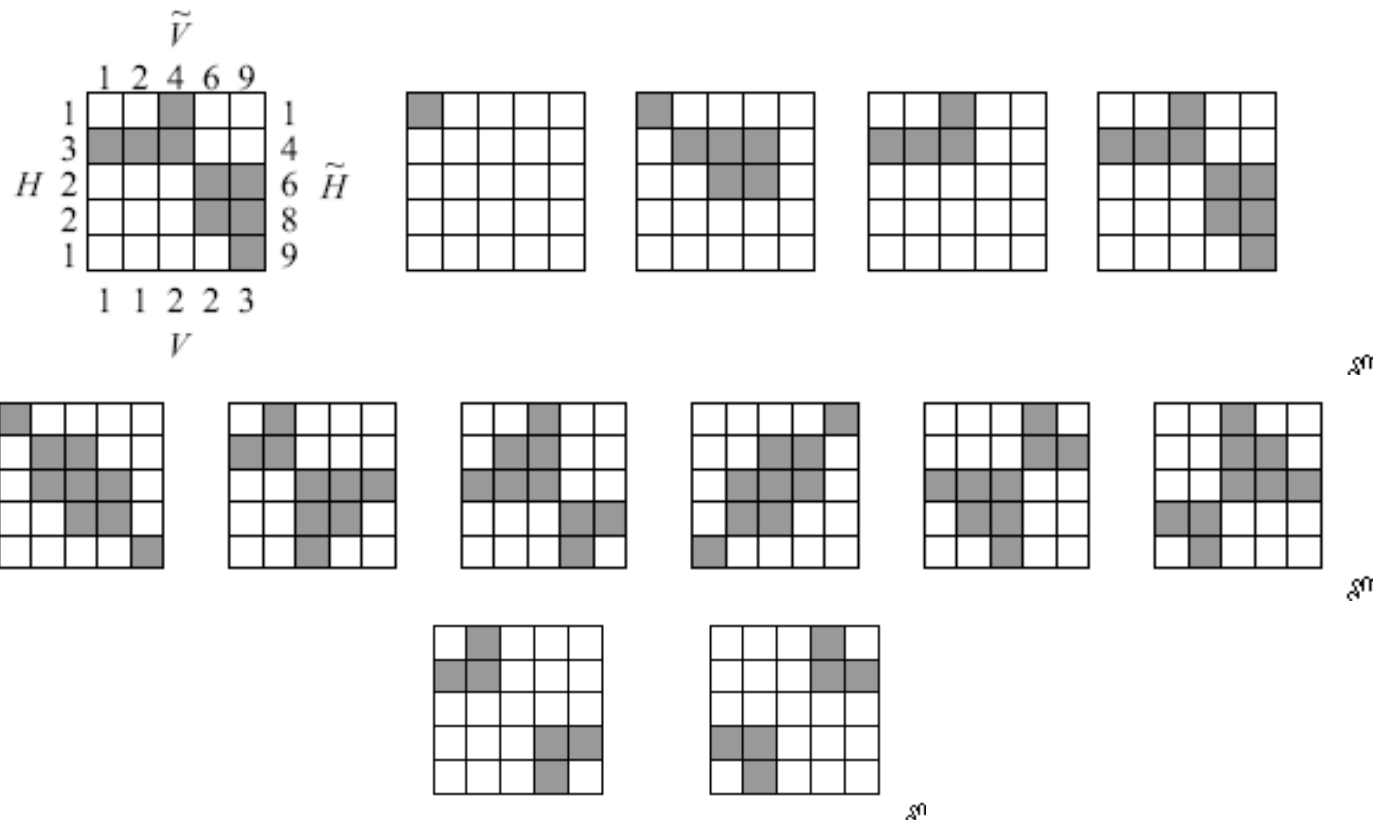
- ÉNY típus: $\tilde{h}_i = \tilde{v}_j$ ●
- ÉK típus: $\tilde{h}_i = \tilde{v}_n - \tilde{v}_{j-1}$ ●
- kivéve (m,n)



- C_F minden eleme ugyanolyan típusú, mint F

Rekonstrukció

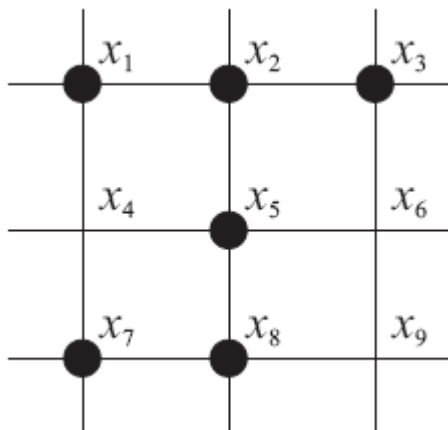
- keressük meg mindkét típusú egyenlőségi pozíciókat
- teszteljük, hogy egy adott egyenlőségi pozíció C_F -ben van-e
- az összes megoldást megtaláljuk, $O(mn \cdot \min\{m, n\})$



Tapasztalati eredmények

	Avg. A (s)	Avg. B (s)
20x20	0,011511	0,000272
40x40	0,032524	0,001064
60x60	0,065897	0,002597
80x80	0,116505	0,004746
100x100	0,178633	0,007831

Rekonstrukció egyenletrendszerrel



$$Ax = b \quad x \in \{0,1\}^{m \times n}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rekonstrukció optimalizálással

Problémák az egyenletrendszer megoldása során:

- bináris változók
- nagy egyenletrendszer
- alulhatározottság (#egyenletek << #ismeretlenek)
- inkonzisztencia (pl.: zaj esetén)

$$x \in \{0,1\}^{m \times n}$$

$$C(x) = \|Px - b\|^2 + g(x) \rightarrow \min$$

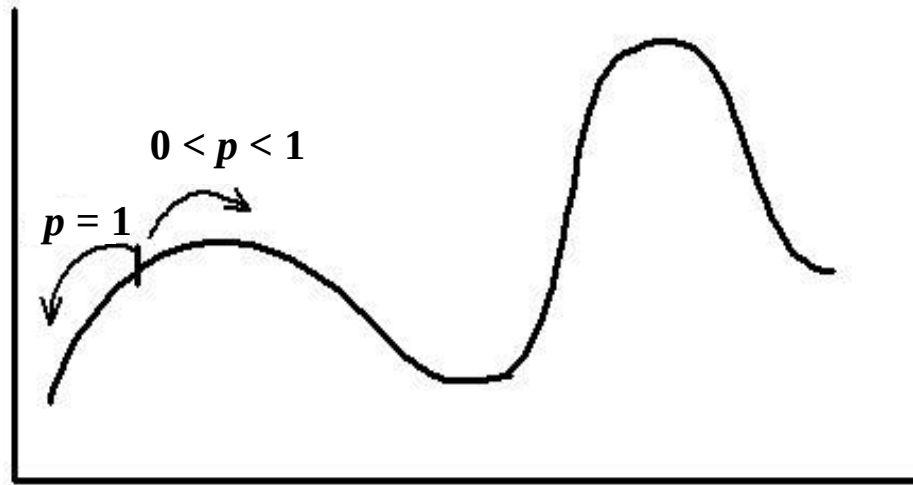


*Tag a prior
információ leírására:
konvexség, modell
képhez való
hasonlóság, stb.*

Megoldható kombinatorikus optimalizálási módszerekkel

Az optimalizálás megoldása

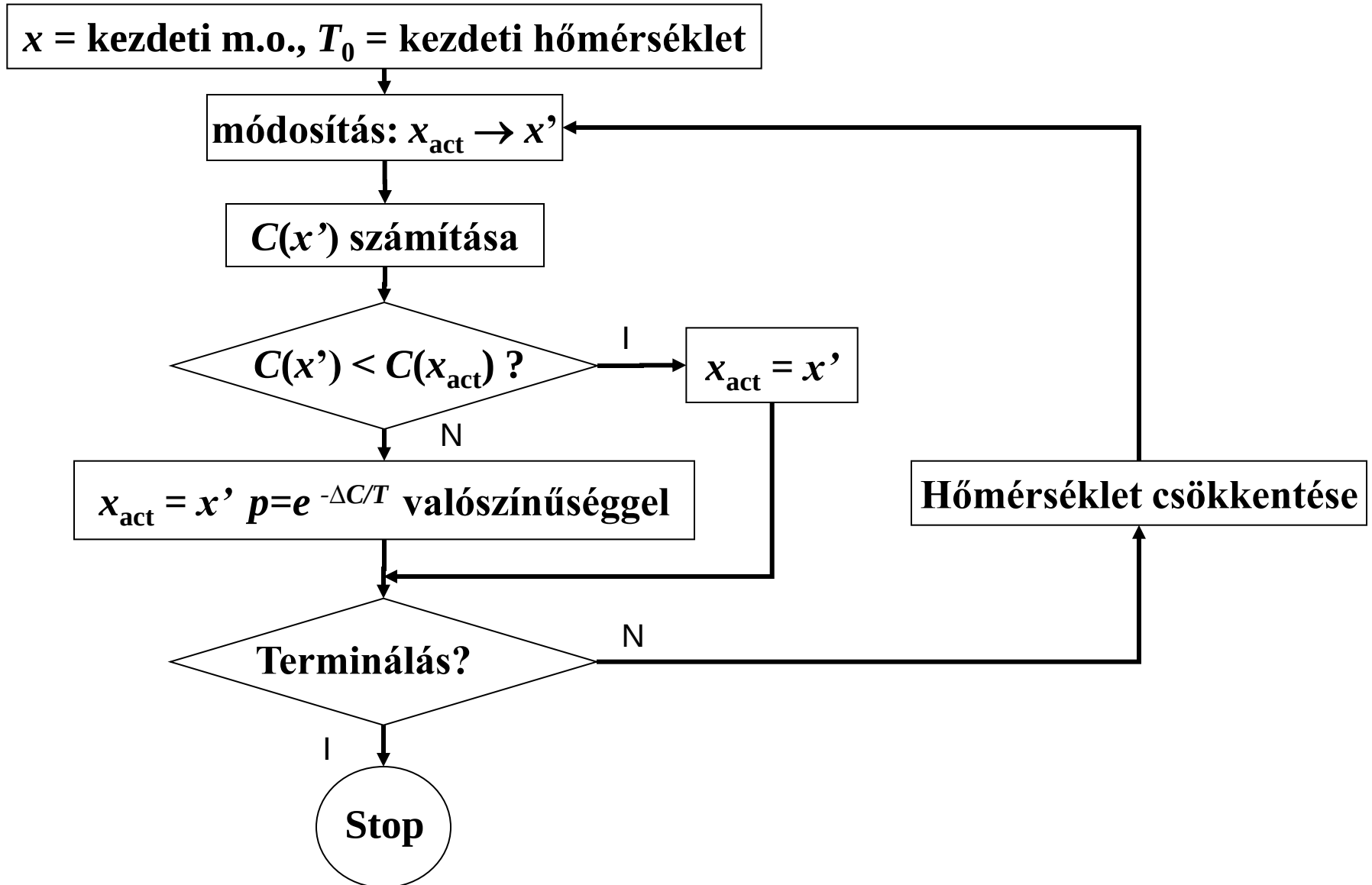
- **Probléma:** A klasszikus hegymászó algoritmusok lokális optimumba ragadhatnak
- **Ötlet:** Engedjük meg célfüggvényt növelő lépéseket is



Szimulált hűtés (SA)

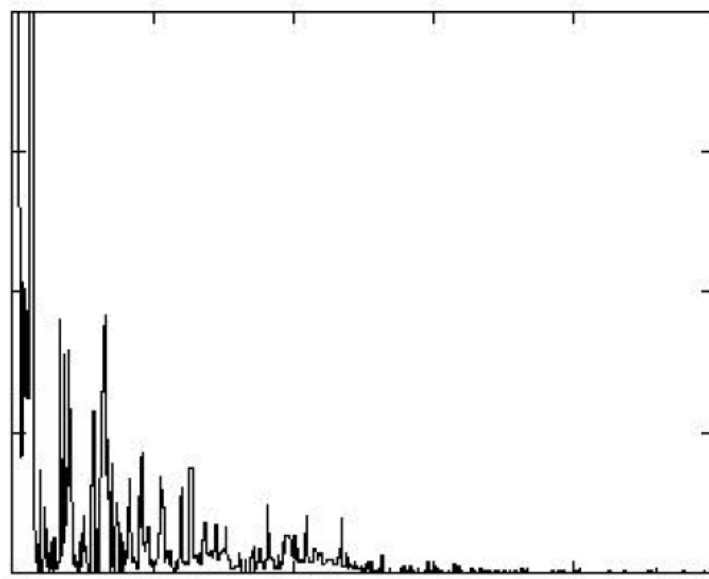
- Hűtés: termodinamikai folyamat, melynek során egy fém lehűl, majd megdermed
- A termikus zajnak köszönhetően a folyékony fém energiája a hűtés során néha növekszik
- A folyékony fém hűtési hőmérsékletét megfelelően szabályozva a fém minimális energiájú kristályszerkezetben dermed meg
- Szimulált hűtés: a fenti észrevételen alapuló véletlenszerű keresési technika

SA folyamata



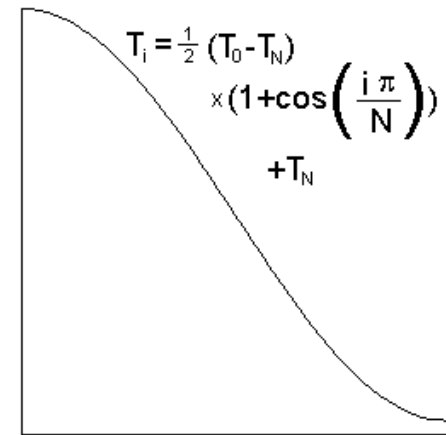
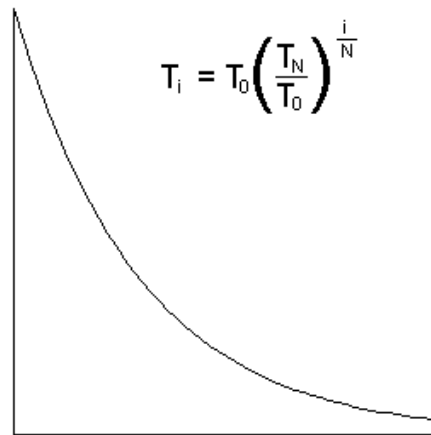
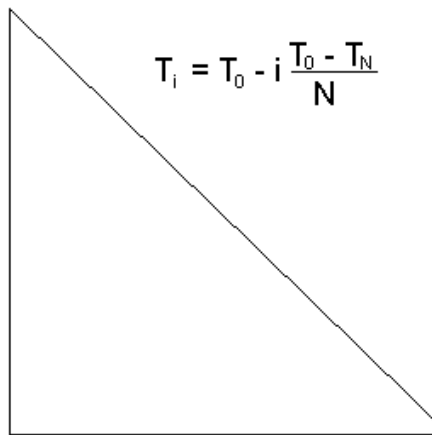
Az optimum megtalálása

- Az SA paramétereit megfelelően hangolva a globális optimum megtalálható
- A paraméterek adott optimalizálási problémára történő finom-hangolása nehézkes



Az SA paramétere

- Kezdeti hőmérséklet: T_0
- Megállási feltétel: pl.: T_N vagy ha tartósan nem találunk jobb megoldást
- Hűtési karakterisztika



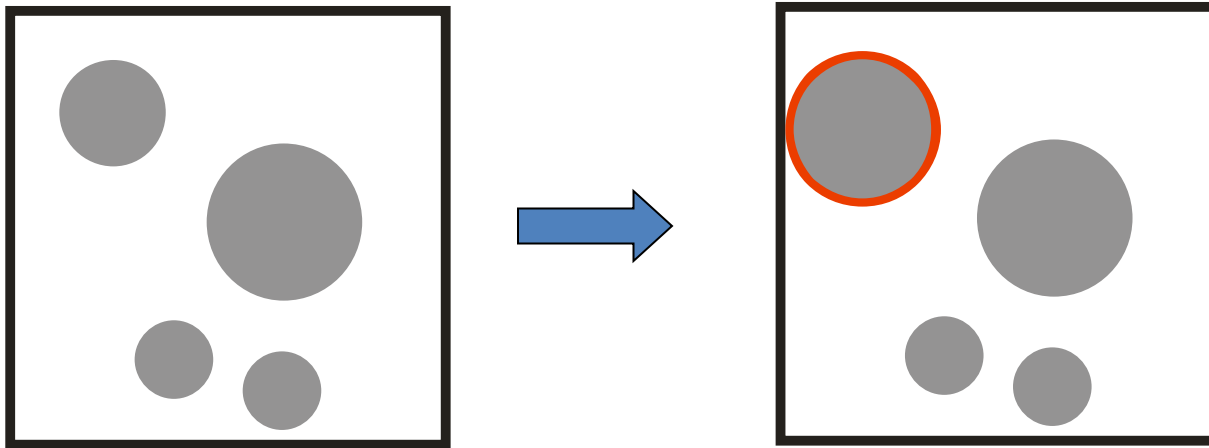
SA - Pixel alapú rekonstrukció

- A bináris képet bináris mátrix írja le
- Egy (több) véletlenszerűen választott pozícióban invertáljuk az értéket

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \boxed{1} \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

SA – Paraméter alapú rekonstrukció

- A bináris kép geometriai objektumok paramétereivel van leírva, pl. (x,y,r)
- Véletlenszerűen változtassuk az objektum(ok) paraméterét (-eit)



$[(16,53,17), (44,35,25), (26,13,12), (43,8,12)] \rightarrow [(13,50,23), (44,35,25), (26,13,12), (43,8,12)]$

Az SA hátrányai

- Nehézen paraméterezhető
- Lassú
- Egy adott rekonstrukciós feladatnak sok lokális optimuma lehet, és ezek között nagy „ellenkező irányú” lépéseket kell tenni
- A szimulált hűtés csak kis lépéseket enged meg, szükség lenne a nagy változtatást biztosító lépésekre is

Evolúciós algoritmusok (EA)

- Evolúció: Egy rendszer fokozatos fejlődése és átalakulása.
- Általános elv: élő szervezetek, tárgyak (autók, mobiltelefonok, ...), absztrakt dolgok (szoftverek, ...)
- Evolúciós algoritmusok: a fenti észrevételen alapuló véletlenszerű keresési technikák

Operátorok

- **Mutáció:** a szülő tulajdonságai részben módosulva jelennek meg az utódban:
 $ABCDEF \rightarrow AB\textcolor{red}{E}DE\textcolor{red}{G}$
- **Rekombináció:** a szülők tulajdonságai keveredve jelennek meg az utódban:
 $ABCDEF + \textcolor{red}{DCCDFE} \rightarrow AB\textcolor{red}{C}D\textcolor{red}{F}E$
- **Szelekció:** csak az “életképes” egyedek maradnak meg

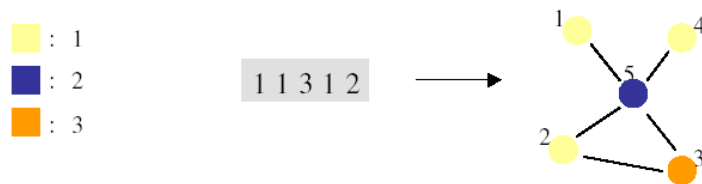
Optimalizálás EA segítségével

- Egyedek: a probléma lehetséges megoldásai
- P - a kezdetben rendelkezésre álló egyedek (kiindulási populáció) (véletlenszerűen “legyártott” egyedekből is állhat)
- f - *fitness* $fv.$: minden egyedhez hozzárendel egy “jósági” értéket, mely az optimális megoldástól való távolságot jelzi
- *Szelekció*: válasszuk ki P -ből a legjobb fitness-értékkel rendelkező egyedeket
- *Rekombináció*: képezzünk a kiválasztott egyedekből új egyedeket a keresztezés operátor segítségével
- *Mutáció*: a mutáció operátor segítségével módosítsunk néhány egyedet

Példa

– gráfszínezés

Reprezentáció:



1. ábra. Adott gráf színezéseinek direkt kódolása.

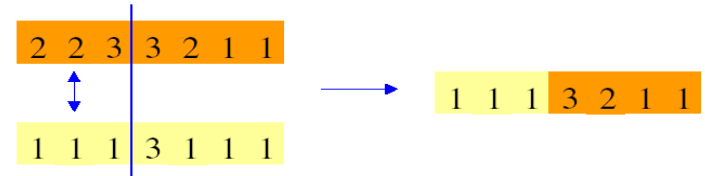
Fitness: az azonos színű szomszédos pontpárok száma (minimalizálási probléma)

Mutáció:

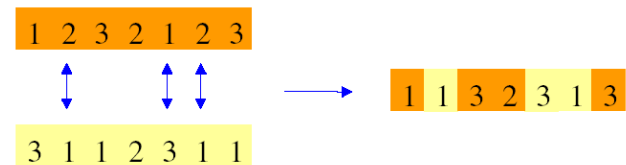


2. ábra. Mutáció operátor.

Rekombináció:



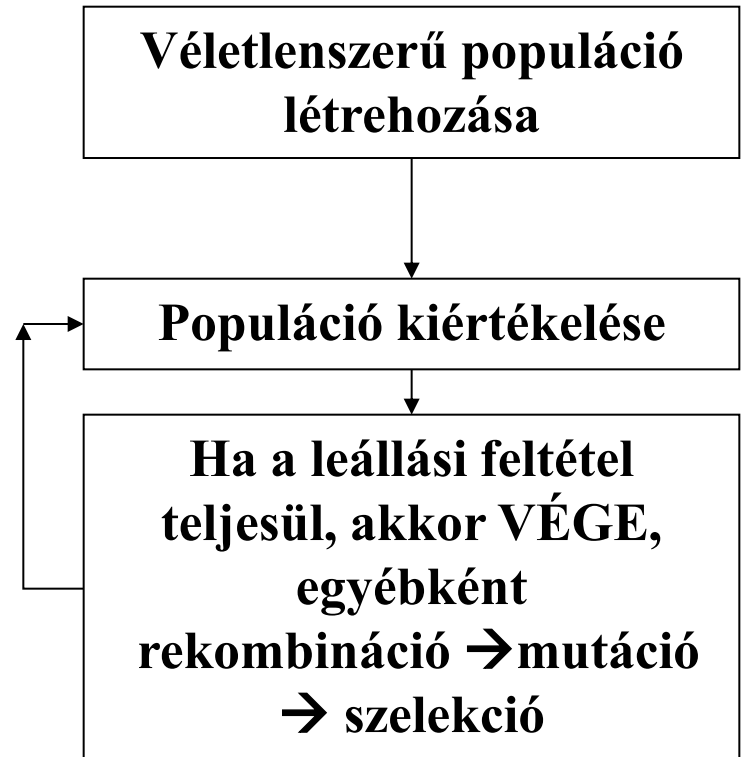
3. ábra. Rekombinációk: egyponos keresztezés.



4. ábra. Rekombinációk: egyenletes keresztezés.

EA folyamata

- **leállási feltétel:** megadott számú iteráció óta nem változik a legjobb fitness-érték, megtörtént megadott fix számú iteráció, stb.



EA előnyei és hátrányai

- Előnyök:
 - Egyszerűen kódolható
 - Széleskörűen alkalmazható (nagy keresési térben is működik és kevés információt igényel a célfüggvényről)
 - Zajos fitnessfüggvény esetén is működik
- Hátrányok
 - Lokális optimumba ragadhat
 - Néha nehéz a probléma reprezentálása
 - Paraméterezés nehéz lehet

A legegyszerűbb lenne...

- Egyedek: $\{0,1\}^{m \times n}$ elemei
- Pontszerű crossover vagy uniform crossover
- Nagyon „elromlanak” a vetületek keresztezés során
- Nem őrződik meg a kép struktúrája

Rekonstrukció modellképpel

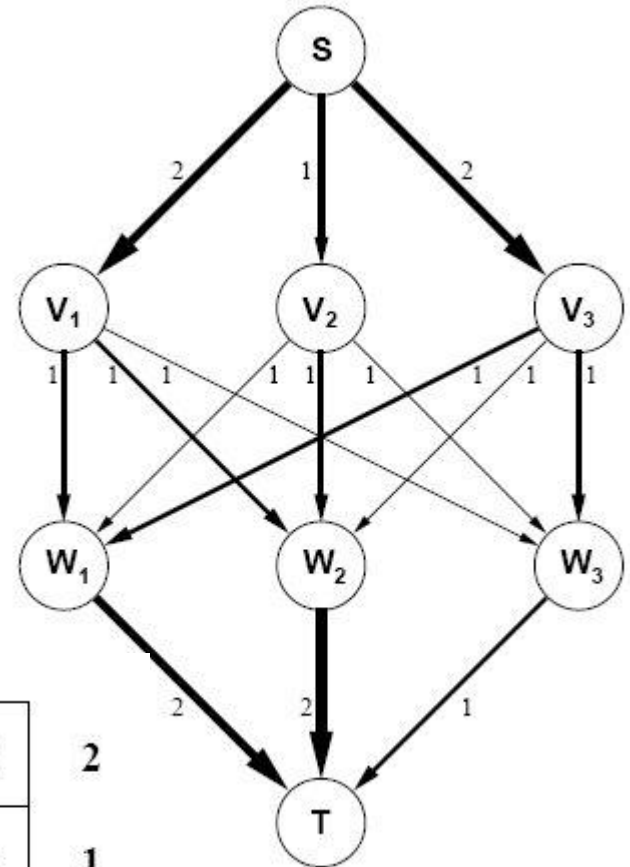
- $\mathcal{A}(R,S)$: azon mátrixok osztálya, melyek sorvetülete R , oszlopvetülete S vektorral egyezik meg
- Egy adott M mátrixhoz való hasonlóság: olyan $A \in \mathcal{A}(R,S)$ -t keresünk, melyre minimális

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |m_{ij} - a_{ij}|$$

Rekonstrukció folyamproblémaként

- Maximális folyam = adott vetületepárt kielégítő rekonstrukció
- $c_{ij} = -m_{ij}$ költségekkel az éleken – minimális költségű maximális folyam: adott vetületepárt kielégítő M -mel legtöbb közös 1-est tartalmazó rekonstrukció

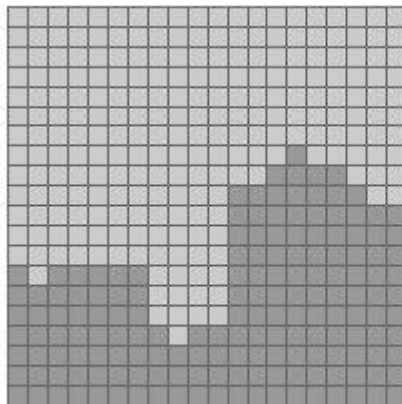
1	1	0	2
0	1	0	1
1	0	1	2
2	2	1	



Rekombináció (crossover)

2-2 kvadránsban az egyik ill. a másik szülő maszkjának kezdeménye (1-1 pont)

```
while (there are border cells) do
begin
  randomly select a border cell  $(x, y)$ ;
  mark all unassigned neighbouring cells of  $(x, y)$  as border cells;
  assign these cells to the same parent as  $(x, y)$ ;
  remove the border status of  $(x, y)$ ;
end
```



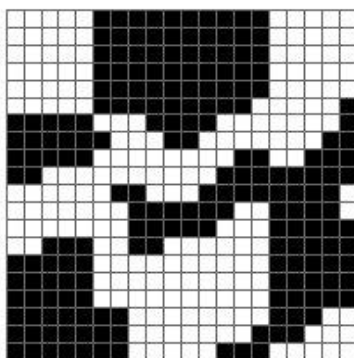
light gray first parent
dark gray second parent

$$m_{ij} = \begin{cases} p_{ij} & \text{if } x_{ij} = 0 \\ q_{ij} & \text{if } x_{ij} = 1 \end{cases}$$

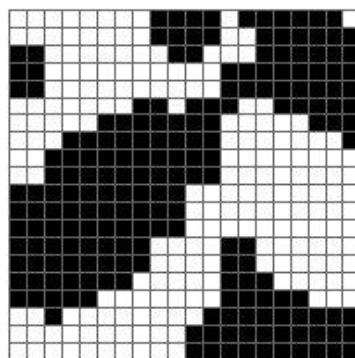
c. crossover mask

Hegymászás kapcsolásokkal

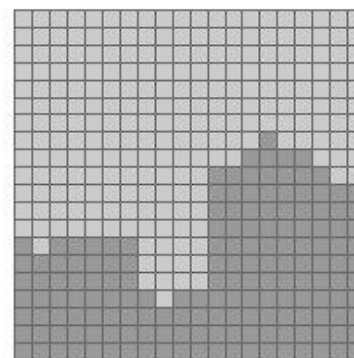
- Kiértékelőfv.: szomszédos fekete pixelek száma



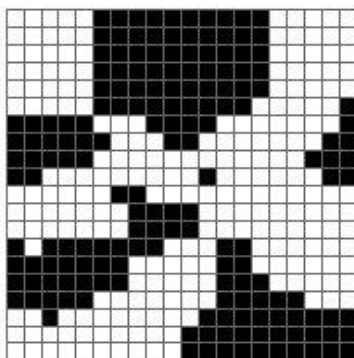
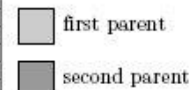
a. first parent



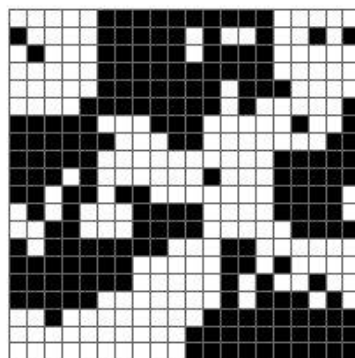
b. second parent



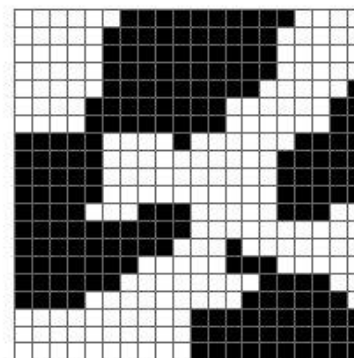
c. crossover mask



d. model image



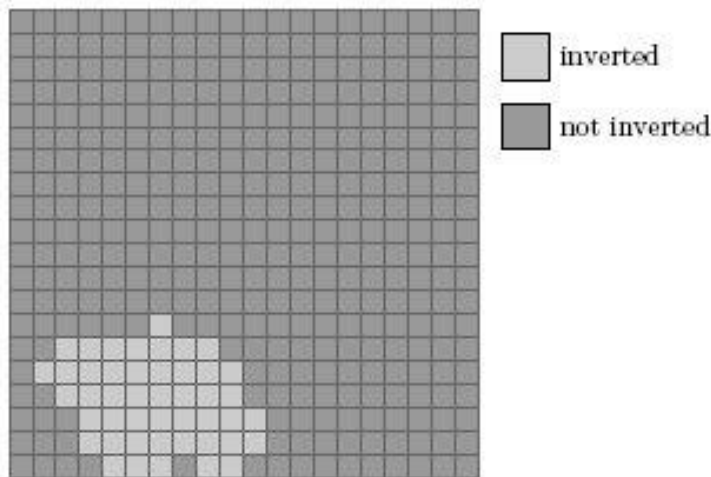
e. child before hillclimb



f. child after hillclimb

Mutáció

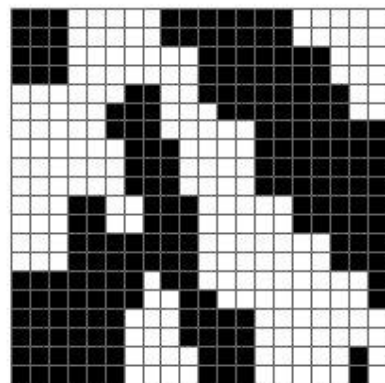
- Véletlen mező és véletlen $k \in [k_{\min}, k_{\max}]$ választása
- k -szor végrehajtjuk a határ bővítését



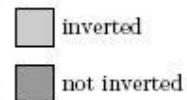
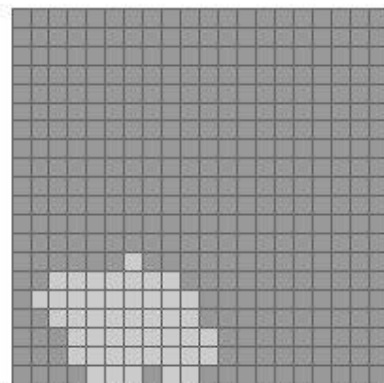
b. mutation mask

$$m_{ij} = \begin{cases} p_{ij} & \text{if } x_{ij} = 0 \\ \text{random} & \text{if } x_{ij} = 1 \end{cases}$$

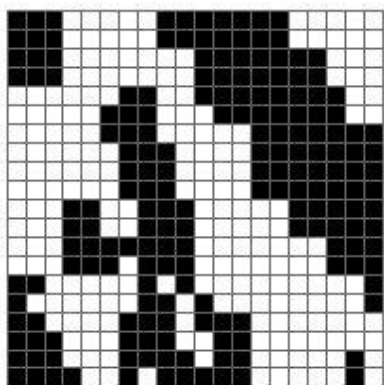
Hegymászás kapcsolásokkal



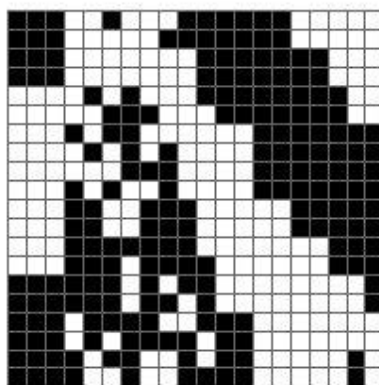
a. parent



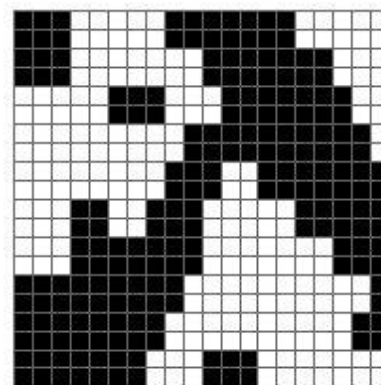
b. mutation mask



c. model image



d. child before hillclimb

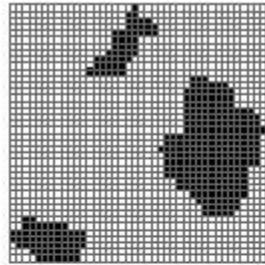


e. child after hillclimb

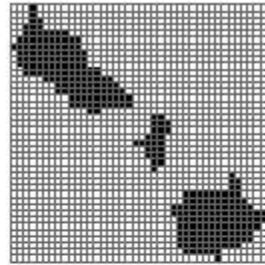
Az evolúciós algoritmus

```
generate initial population  $P_0$  of size  $\lambda$ , consisting of matrices in  $\mathcal{A}(R, S)$ ;  
perform a hillclimb operation on each matrix in  $P_0$ ;  
 $t := 0$ ;  
repeat  
   $P'_t = \emptyset$ ;  
  for  $i := 1$  to  $\mu$  do  
    begin  
      generate a child matrix  $C$ , by crossover or mutation;  
      perform a hillclimb operation on  $C$ ;  
       $P'_t := P'_t \cup \{C\}$ ;  
    end;  
  select new population  $P_{t+1}$  from  $P_t \cup P'_t$ ;  
   $t := t + 1$ ;  
until (stop criterium has been met);  
output the best individual found;
```

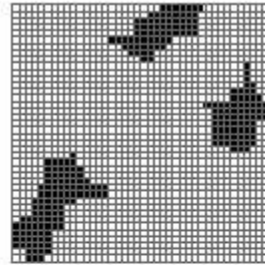
Eredmények: *hv*-konvex osztály



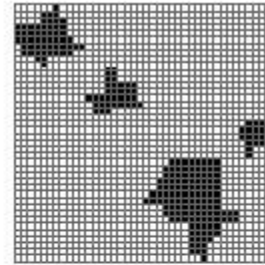
(1)



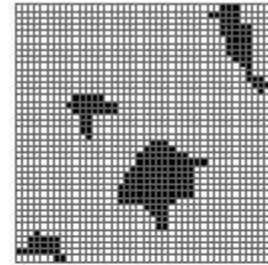
(2)



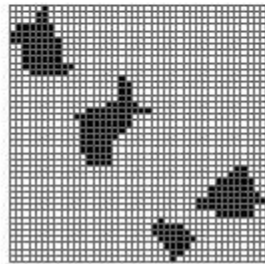
(3)



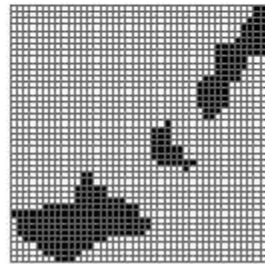
(4)



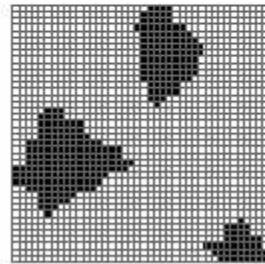
(5)



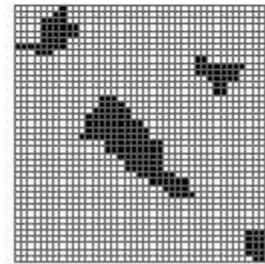
(6)



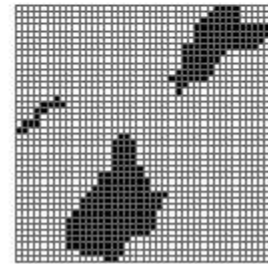
(7)



(8)



(9)

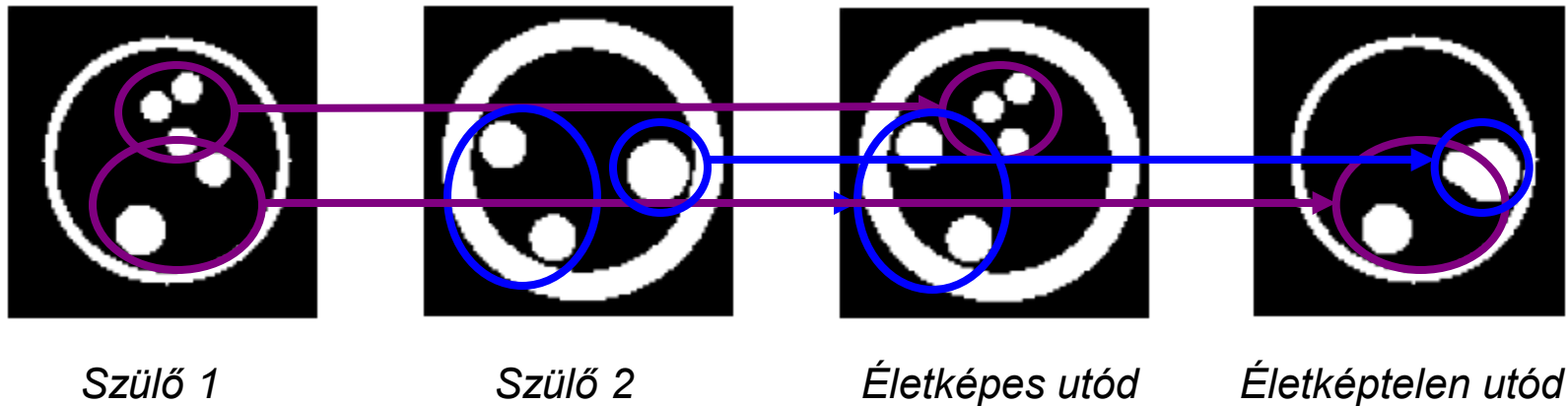


(10)

image	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
#perfect	9	5	8	8	9	6	6	6	6	9
avg.time (m)	25.6	16.6	15.5	8.8	8.5	10.8	17.7	17.7	8.8	15.7
avg. #gen.	24.6	17.3	18.5	14.8	15.8	18.5	30.2	15.0	21.0	23.6

Objektum-alapú genetikus rekonstrukció

- Crossover



- Mutáció

- Körlapok számának növelése/csökkentése
- Körlap középpontjának mozgatása
- Körlap átméretezése