Kombinatorikus játékok

Pluhár András

March 26, 2003

Bevezetés

A *játék* szó pontos jelentését aligha találjuk meg a szótárakban. Szűken értelmezve néhány szabály által korlátozott cselekvést értünk rajta, s a lefolyástól függően eldöntjük a győztes illetve a vesztes személyét. Valójában játékról beszélhetünk bármely szituációban, amelyben az ember aktívan, új utak, gondolatok keresgélésével megoldani, vagy kedvező irányban módosítani kívánja a helyzetét. Az utóbbi szempontból nézve az emberi tevékenységek egész sora (matematika, sport, tanulás stb, szinte csak a passziv tv nézés kivételével) magán viseli a játék jegyeit.
Mi itt ehhez képest nagyon kevés játékot említhetünk, a matematikai eszközökkel vizsgálhatóaknak is csak a töredékét. Nem célunk a véletlen elemeket tartalmazó játékok, J. von Neumann és J.H. Conway elméleteinek ismertetése sem. Egyrészt ezekről bőséges irodalom áll az Olvasó rendelkezésére, másrészt az általunk ismertetni óhajtott esetekben kevésbé alkalmazhatók.

Fejezet 1

Az alapok

"A beginning is the time for taking the most delicate care that the balances are correct."

Frank Herbert, Dune

A célunk ebben a fejezetben az, hogy néhány egyszerű, valószínűleg jól ismert játékon keresztül ízelítőt adjunk a később részletesen kifejtett módszerekből. Itt és a későbbiekben is többnyire két személy (I és II) által játszott játékokat vizsgálunk, ahol I és II felváltva teszik meg lépéseiket, és I (*az egyes játékos*) kezd.

1.1 A NIM játék

Az első példánk az ősi kínai eredetű, majd a század elején Charles L. Bouton által újrafelfedezett és megoldott NIM játék.
Táblaként néhány kupac kavics szolgálhat. A lépésen levő játékosnak választania kell egy kupacot, és elvenni belőle tetszőleges számú, de legalább egy kavicsot. Az a játékos győz, aki az utolsó kavicsot elveszi. A kavicsok számának végessége miatt a játék nem lehet döntetlen, így ha az egyik játékos képes elkerülni a vesztést, akkor nyerni fog. Ez az alapja a Bouton által kidolgozott stratégiának is. Tegyük fel, hogy lehet definiálni a NIM játék egy pillanatnyi állásának egy T tulajdonságát a következő módon:
(i) Ha minden kupac üres, akkor teljesül T.
(ii) Ha nem teljesül T, akkor lehet olyan lépést tenni, hogy a létrejövő állásban teljesül T.

(iii) Ha egy állásban teljesül T, akkor bármely lépést téve a keletkező állásban már nem fog teljesülni.
Ha a játék kezdetén nem teljesül T, akkor I, (ii) alapján olyan lépést választ, hogy teljesüljön T. Így, (ii) miatt, II bármely válasza után (ha II tudott még lépni egyáltalán) olyan állást kap I, melyre T ismét nem teljesül. Következésképp I-nek lesz szabályos lépése, amely után újra áll a T tulajdonság. Előbb-utóbb persze elfogynak a kövek, a T tulajdonság teljesül és a lépésen levő játékos veszít. Ez viszont csak II lehet az eddigiek alapján. Ha a játék kezdetén teljesül T, akkor, hasonló érveléssel beláthatóan, II nyer. Már csak az maradt hátra, hogy találjunk az i, ii és iii pontoknak eleget tevő T tulajdonságot.
Írjuk fel minden kupacra a benne lévő kavicsok számát kettes számrendszerben, s nézzük meg ezekben a számokban az egy adott helyiértéken előforduló egyesek számát. Ha ezek a számok minden helyiértékre párosak, akkor teljesül T, ha nem, akkor nem.
(i) Ha üresek a kupacok, akkor minden szám 0, következésképp minden helyiértéken is összesen 0 db 1-es áll.
(ii) Ha nem áll T, vegyük a legnagyobb helyiértéket, amelyre páratlan egyes fordul elő. Válasszunk egy K kupacot, ahol a hozzátartozó számban egyes áll ezen a helyiértéken. Vegyük el a K kupacnak annyi elemét, hogy a kupacot jellemző új számban pontosan azok a helyiértékek változzanak (nulláról egyre vagy egyről nullára), amely helyiértékekre az egyesek száma páratlan volt. Így egy T tulajdonságú álláshoz jutunk.
(iii) Egy lépés az érintett K kupachoz tartozó számot megváltoztatja legalább egy jegyben. Ezért ha T teljesült, a lépés után már nem fog.

1.2 Feladatok

1.1 (NIM) *C. L. Bouton a következő táblát javasolta a NIM-re: Vegyünk egy* 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 *és egy* 1 *elemű kupacot.*
a., Mutassuk meg, hogy I nyer.
b., Mi legyen I első lépése ?

1.2 (Bástyajáték) *Egy* 8×8*-as sakktábla első sorára* 8 *db világos, a nyolcadik sorára* 8 *sötét bástyát helyezunk. I és II felváltva léphet a világos illetve a sötét bábokkal oly módon, hogy:*
(i) a bástyák csak függőlegesen léphetnek
(ii) nem üthetik egymást.
Ha a lépésen lévő játékos képtelen lépni, akkor veszít.
a., Mutassuk meg, hogy II nyer.
b., Lássuk be, hogy II nyeréséhez elég 48 *lépés.*

1.3 (Osztójáték) *Adott egy $n > 0$ természetes szám. I-nek és II-nek felváltva kell választaniuk n osztóit oly módon, hogy a már felsorolt osztók többszörösei nem választhatók. Aki az egyet választja, az veszít.*
Mutassuk meg, hogy I nyer.

1.4 (Tic-Tac-Toe) *I és II felváltva tesz egy jelet a 9 négyzetből álló, 3×3-as tábla egy-egy mezőjére. Aki hamarabb elfoglal egy teljes sort, oszlopot vagy főátlót (egy szóval* nyerőhalmazt*), az nyer. Más szabályok szerint is lehet játszani az adott keretek között. Az ún.* **Építő-Romboló** *változatban I nyer, ha elfoglal egy sort (oszlopot vagy főátlót), míg II nyer, ha I nyerését meghiúsítja. A* **fordított** *$Tic - Tac - Toe$-ban az veszít, aki elsőként foglalja el egy nyerőhalmaz összes elemét. Végül a* **mozgó** *változatban újra egy nyerőhalmaz elfoglalása a cél, de csak $3 - 3$ lépést tesznek a játékosok. Ezek után felváltva léphetnek a valamelyik saját jelükkel egy élben szomszédos, üres mezejére a táblának. Lássuk be az alábbiakat:*
a., A $Tic - Tac - Toe$ döntetlen.
b., I nyer az Építő-Romboló változatban.
c., A fordított $Tic - Tac - Toe$ döntetlen.
d., I nyer a mozgó változatban.

1.5 (Lewthwaite játék) *Az alább látható elrendezésben fehér és fekete korongokat helyezünk el egy 5×5-ös táblán. I és II felváltva tolják a fehér illetve a fekete bábokat egyikét az élben szomszédos üres mezőre. Ha a lépésen levő játékos nem tud lépni, akkor veszít. Mutassuk meg, hogy I nyer.*

1.6 (Osztódó kövek) *Ebben a problémában csak egy játékos van. A sakktábla $a1$ mezőjére helyezünk egy követ, amely úgy* mozgatható, *hogy levesszük a tábláról, és az $a2$ és a $b1$ mezőre helyezünk két új követ. Általában egy kő levehető, ha a felső és jobboldali szomszédos mezők üresek, s a levétel után ezekre köveket helyezünk. A játék célja, hogy kőmentessé tegyük az $a1$, $a2$, $a3$, $b1$, $b2$ és $c1$ mezőkből álló területet. Mutassuk meg, hogy a feladat nem teljesíthető.*

1.7 (Teljes információs, véges, kétszemélyes játékok) *Egységes érveléssel mutassuk meg, hogy az eddigi példáinkban (kivéve 1.6 feladatot) az alábbi állítások közül pontosan az egyik teljesül:*
(i) I nyer
(ii) II legalább döntetlent ér el.
(Ez az ún. játékelméleti **tertium non datur** *(a harmadik eset nem létezik) elve.)*

Fejezet 2

Párosítások és Gráfok

Az első fejezetben már megtapasztalhattuk a párosítási stratégiák hasznosságát. Hatékony, tömör és jól áttekinthető leírást nyújtanak a kombinatorikus játékok egy széles osztályára. A továbbiakban először bemutatjuk a Slither játékot, amely a 70-es években Kaliforniában vált népszerűvé. Utánna bevezetünk illetve felelevenítünk néhány gráfelméleti alapfogalmat, lévén ezek nagyon hasznosak a párosítási stratégiák vizsgálatában. Végül a feladatokon keresztül általánosítjuk a Slither játékot. Szintén említünk a feladatok között néhány, látszólag teljesen különböző karakterű problémát, ahol párosítások segítenek a megoldásban.

2.1 Slither játék

A Slither játék táblája egy 6×5-ös téglalap alakú hálózat éleiből áll. Az ábrán bejelöltünk egy élhalmazt, amely már a megoldásra utal. A két játékos felváltva behúz egy-egy élt oly módon, hogy folytonos vonal jöjjön létre. Azaz a behúzandó él egyik végpontja a utolsónak behúzott él azon végpontja, amelyhez másik él nem csatlakozik. Feltétel továbbá, hogy a keletkező vonal nem alkothat hurkot, azaz a behúzandó él másik végpontja nem érinthet már elfoglalt élt. Aki nem tud szabályos lépést tenni, az veszít.

A kezdő játékos a következő stratégiával nyerhet:
Első lépésként válassza pl. a bal felső (jelölt) élt. Az ellenfél válasza egy jelöletlen él lehet, amely újra egy jelöltbe vezet, s ez lesz a kezdő második lépése. Az élek struktúrája miatt a másodhúzó mindig jelöletlen élek közül választhat, és a lépése a a vonalat egy, addig még mindkét végén

érintetlen jelölt élbe vezeti. Így a kezdő választhatja ezt az élt a soron következő lépésben. A játék végessége miatt viszont az egyik fél veszíteni fog, mégpedig az előbbiek miatt a másodhúzó.

2.2 Gráfelméleti alapfogalmak

Mielőtt rátérnénk a probléma általánosítására definiálnunk kell a gráfelmélet néhány alapfogalmát. A tudását elmélyíteni kívánó Olvasónak Lovász László *Combinatorial Problems and Excercises* című könyvét ajánljuk figyelmébe; valójában a jelen fejezet tárgyalása is ezt követi.

Egy G gráf egy $G = (V(G), E(G), I(G))$ hármast jelent, ahol $V(G)$-t a gráf *pontjainak*, $E(G)$-t pedig a gráf *éleinek* nevezzük. $I(G)$ egy függvény, mely G éleihez G pontjainak egy, vagy két elemű rendezett vagy rendezetlen halmazait rendeli. Szemléletesen a G gráf egyes pontjait élek (irányított vagy irányítatlan) kötik össze. Megengedünk továbbá többszörös éleket és hurkokat is. Az utóbbin temészetesen olyan $e \in I(G)$ élt értünk, amelyhez rendelt halmaznak egy eleme van.

Egy hurokél mentes G gráf v pontjának *fokszámán* azon élek számát értjük, amelyekhez $I(G)$ a v-t tartalmazó halmazt rendel, a jele $d(v)$. Tetszőleges G gráf esetében a hurokéleket duplán számítjuk be a fokszámba. Megkülönböztethetjük a *befutó* és a *kifutó* éleket, ezek számát $d_-(v)$ és $d_+(v)$ jelöli. Természetesen $d_-(v) + d_+(v) = d(v)$.

Az $I(G)$ által az $e \in E(G)$ élhez rendelt x és y pontot (ha kételemű halmazról van szó) az e él *összeköti*, vagy x és y *illeszkedik* az e élre. Továbbá k hosszú sétának nevezzünk egy $(x_1, e_1, ..., e_k, x_{k+1})$ sorozatot, ha $x_i \in V(G)$, $i = 1, ..., k+1$, valamint az $e_i \in E(G)$ összeköti x_i-t és x_{i+1}-et, ha $i = 1, ..., k$. Az előbbi séta irányított, ha az e_i-hez x_i és x_{i+1} az (x_i, x_{i+1}) irányítással van hozzárendelve. Ha a sétában $x_1, ..., x_{k+1}$ különbözőek, akkor útról, ha $x_1, ..., x_k$ különbözőek és $x_1 = x_{k+1}$, akkor körről beszélünk. (Irányított séta esetén irányított útról illetve körről.)

A G gráf pontjainak egy S halmaza *független*, ha S elemeit nem köti össze él. Egy független S halmaz *mag*, ha minden $x \in V(G) \setminus S$ esetén van olyan $y \in S$, melyre $(y, x) \in E(G)$.

Egy G gráf összefüggő, ha bármely két pontja között van út. Ha bármely két pont között irányított út is van, *erősen összefüggő*.

Egy G gráf *kromatikus száma*, $\chi(G)$, azon színek számának minimuma, melyekkel kifesthető a gráf ponthalmaza úgy, hogy az egymással összekötött pontok különböző színűek.

Végezetül definiáljuk a gráfelméletnek a kombinatorikus játékok vizsgálatában legfontosabb fogalmát, a párosításokat. Egy $M \subset E(G)$ halmazt *párosításnak* nevezünk, ha bármely $x \in V(G)$ M-nek legfeljebb egy elemére illeszkedik. M *maximális*, ha nem bővíthető, *teljes*, ha minden $x \in V(G)$ pontra van olyan $e \in M$, hogy x illeszkedik az e élre.

2.3 Feladatok

2.1 (Erős összefüggőség) *Lássuk be az alábbiakat:*
a., Egy G irányított gráf ponthalmaza felbomlik erősen összefüggő részgráfjainak (ún. **komponenseinek***) uniójára.*
b., Az előző felbontásban két komponens között az élek egyirányban futnak.
c., Egy G irányított gráf $C(G)$ **kondenzációja** *a következő gráf: A komponenseket egy pontnak tekintjük és két (a komponensekből nyert) pont között behúzunk egy élt, ha a komponens között volt él G-ben, mégpedig ugyanabban az irányban. Mutassuk meg, hogy $C(G)$ nem tartalmaz irányított kört.*
d., Egy G irányítatlan gráfra $\chi(G) \leq 2$, akkor és csak akkor, ha G nem tartalmaz páratlan hosszú kört.
e., Egy irányított, erősen összefüggő G gráfra $\chi(G) \leq 2$, akkor és csak akkor, ha G nem tartalmaz páratlan irányított kört.

2.2 (Gráfok magja) *Egy G irányított gráf* **szimmetrikus***, ha bármely $x, y \in V(G)$ pontokra $(x, y) \in E(G)$ akkor és csak akkor, ha $(y, x) \in E(G)$.*
a., Lássuk be, hogy a G gráfnak van magja.
b., Egy körmentes G irányított gráfnak pontosan egy magja van.
c., Ha egy G irányított gráfban minden kör páros hosszú, akkor a gráfnak van magja.
d., Adjunk meg egy gráfot, aminek nincs magja.

2.3 (Általánosított Slither) *A bevezető példánk mintájára definiáljuk a következő játékot:*
Adott egy G irányított gráf, melynek I kiválasztja egy pontját. Ezek után II és I felváltva választ egy még nem választott pontot úgy, hogy ha az ellenfél utolsó lépése x_i és az új lépés x_{i+1}, akkor $(x_i, x_{i+1}) \in E(G)$. A lépni nem tudó játékos veszít.
a., Tegyük fel, hogy G körmentes. Mutassuk meg, hogy I nyer, és határozzuk meg a pontokat, melyekkel kezdve nyerhet.
b., Tegyük fel, hogy van olyan $x_0 \in V(G)$, melyre $d_-(x_0) = 0$, azaz x_0-ba nem fut él. Lássuk be, hogy I-nek van nyerő stratégiája.
c., Egy tetszőleges G irányított gráfra II nyer akkor és csak akkor, ha G minden erősen összefüggő komponensében játszva is nyerne.
d., Egy szimmetrikus G gráf esetén I pontosan akkor nyer, ha a gráfban nincs teljes párosítás.

2.4 (Dirac feltétel) *Mutassuk meg, hogy*
a., Ha egy irányítatlan, $2k$ pontú G gráfban minden $x \in V(G)$ pontra $d(x) \geq k$, akkor a gráfban van teljes párosítás.
b., Az előző feltétel mellett $2k$ hosszú kör is van a G gráfban.

2.5 (Silverman játéka) *A játék egy $n \times n$-es sakktáblán zajlik, egy speciális báb, a* **szöcske** *felhasználásával. A szöcske lehetséges lépései a vezér és a huszár lépéseinek uniója.*
Először I elhelyez egy szöcskét a táblán, majd II egy másikat, úgy, hogy ne üssék egymást. Ezek után I és II felváltva felveszi a saját szöcskéjét, megjelöli a helyet ahol volt, és újra visszateszi a táblára. Természetesen oly módon, hogy a bábú ne legyen ütésben és a már megjelölt mezők nem használhatók. Az a játékos, aki nem nem tud szabályos lépést tenni, veszít.
a., Ha $n \leq 5$, akkor I nyer.
b., Ha $n \geq 6$ és n páros, akkor II nyer.
c., Ha $n \geq 7$ és n páratlan, akkor I nyer.

2.6 (Sávszélesség) *Egy $n \times n$-es sakktábla mezőire elhelyezzük a természetes számokat 1-től n^2-ig. Két mező szomszédos, ha élben találkoznak. Mutassuk meg, hogy lesz két szomszédos mező, ahol a rajtuk lévő számok különbsége legalább n.*

2.7 (Sávszélesség játék) *I és II felváltva írnak egy-egy, még nem választott számot az $1, ..., n^2$ közül az $n \times n$-es saktáblára. Amelyik játékos előbb beír egy k számot egy mezőre úgy, hogy a mező egy szomszédján van egy k-tól legalább n-nel eltérő szám, az veszít.*
a., I nyer, ha n páratlan.
b., II nyer, ha n páros.

2.8 (Black játéka) *Egy 5×5-ös tábla bal felső sarkában elindítunk egy vonalat. I és II felváltva rajzolják be a következő három alakzat egyikét oly módon, hogy a vonal legyen hosszabb minden lépésben. Az a játékos, aki a tábla szélébe kormányozza a vonalat, veszít. A vonal különben átmetszheti önmagát, s felhasználhat már a táblára rajzolt részeket. Mutassuk meg, hogy I nyer.*

Fejezet 3

Hipergráf játékok

Ezen fejezetben rátérünk a kombinatorikus játékok egy speciális osztályának vizsgálatára. A közös bennük, hogy valamely tábla mezőinek (pontjainak) választása zajlik a játék során, míg a cél a tábla mezőinek néhány részhalmazából egynek a minél gyorsabb elfoglalása. Néhány példával kezdjük az általános definiciót motiválandó.
Az első lényeges példát már láttuk, ez a *Tic-Tac-Toe* játék. Innen ered a játékosztály másik neve is, a hipergráf játék mellett használatos a *Tic-Tac-Toe* típusú, *Pozíciós* és a *Stratégiai* játék elnevezés is.

3.1 Amőba

Az amőba a tic-tac-toe általánosítása végtelen négyzetrácsra (a gyakorlatban egy kockás füzet lapjára). I és II felváltva jelöli a mezőket, s aki hamarabb képes öt, egymást követő mezőt vízszintesen, függőlegesen vagy átlós irányban elfoglalni, az nyer. Érdemes definiálni a *k-amőbát*, ahol k egy természetes szám. Ebben k jelet kell elérni a győzelemhez.

3.2 Hex

A tábla a jelen esetben egy hatszögrács, általában $n \times n$-es. (Látni fogjuk, hogy $n \times m$-es tábla esetén ha $n \neq m$, akkor a játék leegyszerűsödik.) A felváltva lépő játékosok egy utat akarnak kiépíteni a tábla két, átellenes oldala között; egyik a bal alsót szeretné összekötni a jobb felsővel, a másik a bal felsőt a jobb alsóval. (Az út alatt élben szomszédos mezők sorozatát értjük.) Aki sikerrel jár, nyer.

3.3 Bridgit

A játékosok egymást nem keresztező éleket húzhatnak be egy $2(n+1)\times n$ pontból álló hálózat pontjai között. I vízszintes vagy függőleges éleket a fehér, II pedig a fekete szomszédos pontok között. A játékosok célja a Hexhez hasonlóan két átellenes oldal összekötése. (I az alsót a felsővel, míg I a balt a jobbal kívánja összekötni.)

3.4 Shannon-féle kapcsoló játék

Mielőtt ismertetnénk a játékot, egy újabb gráfelméleti fogalmat definiálunk.
Egy irányítatlan G gráf éleinek egy T halmaza *feszítőfa*, ha:
1. Minden $x,y\in V(G)$-re van olyan út x és y között, mely csak T-beli éleket tartalmaz.
2. Nincs olyan kör, melynek minden éle T-ből való.
Adott egy G irányítatlan gráf. I és II felváltva megjelölik a még nem választott éleket. II nyer, ha eléri, hogy az általa választott élek tartalmazzák G egy tetszőleges T feszítőfáját. Ha nem, akkor I nyer.

3.5 Definíciók

Ha adott egy X halmaz és egy $H\subset 2^X$ halmaz, akkor az (X,H) párt *hipergráfnak* nevezzük. X az *alaphalmaz*, vagy a *pontok* halmaza, míg H elemeire mint *élekre* utalunk.
Az előkészítés után rátérhetünk a hipergráf játékok bevezetésére. Kissé tágabbra vesszük a definiciót, mint az a példák alapján indokolt lenne, mert ennek a későbbi fejezetekben látjuk majd hasznát. Legyen X egy tetszőleges halmaz, H_1 és H_2 pedig X részhalmazainak halmazai, p és q természetes számok.
(X,H_1,H_2,p,q) *hipergráf játéknak* vagy röviden (X,H_1,H_2,p,q) *játéknak* nevezzük a következő játékot:
I és II felváltva választ lépésenként p illetve q elemet X-ből. I nyer, ha megszerzi egy $A\in H_1$ halmaz összes elemét, ha közben II nem szerezte meg valamely $B\in H_2$ halmaz összes elemét. Hasonlóan, II nyer, ha elfoglal egy $B\in H_2$ halmazt és I közben nem szerez meg egyetlen H_1-beli halmazt sem teljes egészében.

3.6 Megjegyzések:

1. Az (X, H_1, H_2, p, q) játék döntetlen is lehet.
2. Megmutatható, hogy jétékok nagyon széles osztálya leírható ilyen módon.
3. A hipergráf játékok átírhatók az általánosított Slither, vagy a Conway játékokra. A hipergráf játékok viszont többnyire nem bonthatók fel diszjunkt játékok összegére, így az átírások nem segítenek sem a konkrét esetekben, sem az általános tételek bizonyításánál.
4. A nehézkes (X, H_1, H_2, p, q) jelölés helyett használni fogjuk az (X, H)-t, ha $p = q = 1$ és $H_1 = H_2 = H$, az (H, p, q)-t, ha $H_1 = H_2 = H$, valamint az (X, H_1, H_2) jelölést, ha $p = q = 1$ teljesül.
5. A tic-tac-toe általánosításaival analóg játékok (lásd 1.4 feladat) elképzelhetők a (X, H_1, H_2, p, q) struktúrán is. Az *Építő-Romboló* (X, H) hipergráf játék az a játék lesz, amelyben I nyer, ha elfoglalja H egy élét, míg II nyer, ha ezt képes megakadályozni. A *fordított* (X, H) hipergráf játékban pedig az a játékos veszít, aki elsőként megszerzi $A \in H$ él összes elemét.

3.7 Feladatok

3.1 (Példák) *Írjuk fel a tic-tac-toe-t, az amőbát, a hexet, a bridgitet és a Shannon-féle kapcsoló játékot* $(X, H_1, H_2, 1, 1)$ *illetve Építő-Romboló* (X, H) *játék formában.*

3.2 (Ekvivalenciák) *Mutassuk meg, hogy egy Építő-Romboló* (X, H, p, q) *játék mindig felfogható egy olyan* (X, H_1, H_2, p, q) *játékként is, amely nem végződhet döntetlennel.*

3.3 (Stratégia lopás az (X, H) játékra) *Mutassuk meg, hogy az* (X, H) *játékban* I *nyer, vagy a játék döntetlen. Mi történik a fordított* (X, H) *játékban?*

3.4 (Kromatikus szám) *Tegyük fel, hogy egy* (X, H) *hipergráf alaphalmazát oly módon akarjuk kiszínezni, hogy minden él tartalmazzon legalább két, különböző színű pontot. A minimálisan szükséges színek számát a hipergráf* **kromatikus számának** *nevezzük, jele* $\chi(H)$.
a., Ha egy (X, H, p, q) *játékra* $\chi(H) \geq 3$*, akkor a játék nem lehet döntetlen.*
b., Ha egy (X, H) *játékra* $\chi(H) \geq 3$*, akkor* I *nyer.*

3.5 (Hex) *Lássuk be, hogy*
a., Nincs döntetlen az $n \times n$*-es hex játékban.*
b., I *nyeri az* $n \times n$*-es hexet.*
c., Az $n \times (n+1)$*-es esetben, ha* I*-nek kell a két távolabb lévő oldalt összekötni, akkor* II *nyer.*

3.6 (Amőba, k-amőba) *Az alábbiak igazak az k-amőbára:*
a., II nem nyerhet a k-amőbában semmilyen $k \in N$ *esetén.*
b., I nyer a k-amőbában, ha $k = 1, 2, 3$, *vagy* 4.
c., A k-amőba döntetlen, ha $k \geq 9$.
d., Adjunk párosítási stratégiát, mely döntetlent eredményez a k-amőbában $k \geq 9$ *esetén.*
e., A k-amőba döntetlen, ha $k \geq 8$.

3.7 (Fák) *Lássuk be, hogy egy* n *pontú* G *gráfra az alábbi tulajdonságok ekvivalensek:*
a., G *fa (azaz összefüggő és körmentes).*
b., G *összefüggő és bármely élt eltávolítva* G*-ből a maradék gráf már nem összefüggő˙*
c., G *körmentes, de egy tetszőleges éllel bővítve az* $E(G)$ *élhalmazt már keletkezik kör.*
d., G *körmentes, és* $n - 1$ *éle van.*
e., G *összefüggő és* $n - 1$ *éle van.*

3.8 (Shannon-féle kapcsoló játék) *Lássuk be, hogy*
a., Egy G *gráfra II pontosan akkor nyeri meg a Shannon-féle kapcsoló játékot, ha* G *tartalmaz két diszjunkt feszítőfát.*
b., A Bridgit visszavezethető a Shannon-féle kapcsoló játékra.
c., Adjunk meg egy olyan párosítási stratégiát, amelyet használva I nyer a Bridgitben.
d., Konstruáljunk egy gráfot, amelyre II nyeri a Shannon-féle kapcsoló játékot, de nem létezik (II számára nyerő) párosítási stratégia.
e., Egy (X, H) *hipergráf* matriod, *ha*
1. $\forall\ A, B \in H$ *esetén* $A \not\subset B$
2. $\forall\ A, B \in H$, $\forall\ x \in A \setminus B$ *esetén* $\exists\ y \in B \setminus A$, *hogy* $\{A \setminus \{x\}\} \cup \{y\} \in H$.
Tegyük fel, hogy az Építő-Romboló (X, H) *játékot II kezdi meg, aztán felváltva lép I és II. Mutassuk meg, hogy I pontosan akkor nyer, ha léteznek* A *és* B H*-beli halmazok úgy, hogy* $A \cap B = \emptyset$.
f., Lássuk be, hogy az előző (e) pontban leírt játék a Shannon-féle kapcsoló játék általánosítása. Adjunk meg egy matroidot, amelyhez tartozó játék nem fogható fel úgy, mint egy Shannon-féle kapcsoló játék.
g., Tegyük fel, hogy felosztjuk egy G *gráf pontjait* A *és* B *nem üres halmazok uniójára. A gráf* A *és* B *között húzódó éleit* (A, B) vágásnak *nevezzük. Mutassuk meg, hogy I akkor és csak akkor nyeri a Shannon-féle kapcsoló játékot, ha valamely* (A, B) *vágás összes élét meg tudja szerezni.*

Fejezet 4

Párosítások hipergráf játékokban

A következőkben ismertetett hipergráf játékok a kombinatorika régi, híres problémáihoz kapcsolódnak. Kevesebb közük van a ténylegesen játszottakhoz, a velük való foglalkozás jobbára matematikai tevékenységgé válik.

4.1 Hales-Jewett játékok

A Hales-Jewett játékcsalád (elemei a $H(n, d)$-vel jelölt játékok, ahol n és d természetes számok) a tic-tac-toe általánosítása. A $H(n, d)$ táblája egy d dimenziós kocka, amelyik n^d kisebb kockából van összerakva úgy, hogy nagy kocka minden éle mentén n kis kocka fekszik. Formálisan a hipergráf alaphalmaza a d hosszú sorozatok, ahol minden koordináta egy 1 és n között lévő egész szám, azaz $X = \{1, ..., n\}^d$. A hipergráf élei azon n elemű részhalmazok, melyeknek elemei sorba rendezhetőek oly módon, hogy egy rögzített koordinátában az $1, 2, ..., n$, az $n, n-1, ..., 1$ vagy konstans értéket vesznek fel a sorozatok. Könnyen ellenőrizhető hogy a $H(3, 2)$ nem más, mint a tic-tac-toe. Különösen érdekes a $H(4, 3)$ (más néven Tic-Toc-Tac-Toe), hisz ez egy izgalmas, nem triviális játék. Sokáig tisztázatlan volt, van-e a kezdőnek nyerőstratégiája, mígnem 1977-ben Owen Patashnik közel 2000 óra gépidő felhasználásával bebizonyította, hogy van. A Tic-Toc-Tac-Toe példa arra, hogy I-nek lehet nyerő stratégiája egy (X, H) játékban akkor is, ha $\chi(H) = 2$, s példa arra is, hogy egy viszonylag kis játék is lehet teljesen kezelhetetlen az emberi elme számára.

4.2 van der Waerden játékok

$W(N, n)$-nel jelöljük az ún. van der Waerden játékokat, ahol N és n természetes számok. $X = \{0, 1, ..., N-1\}$, míg H az X-ben lévő n elemű számtani sorozatokból áll.

4.3 Ramsey jétékok

Az $R(N, n)$-nel jelölt Ramsey játék (n és N természetes számok) X alaphalmaza egy N pontú G teljes gráf élei. A H halmaz elemei pedig a G gráf n elemű klikkjeiben lévő élhalmazok, azaz H egy-egy eleme a G gráf valamely n pontja között húzódó *összes* él.

4.4 Kombinatorikai motiváció

Ezekről a játékokról tudjuk, hogy bizonyos feltételek mellett nem végződhetnek döntetlenre. Bár a feltételek kissé különböznek, az állítás mindhárom esetben ugyanaz: a játék alapjául szolgáló (X, H) hipergráf kromatikus száma nagyobb, mint kettő:

Tétel 4.1 (Hales-Jewett) *Bármely n természetes számra létezik olyan $d > 0$ egész, hogy a $HJ(n, d)$ játék (X, H) hipergráfjára $\chi(H) > 2$.*

Tétel 4.2 (van der Waerden) *Bármely n természetes számra létezik olyan $N > 0$ egész, hogy a $W(N, n)$ játék (X, H) hipergráfjára $\chi(H) > 2$.*

Tétel 4.3 (Ramsey) *Bármely n természtes számra, ha $N > 4^n$, akkor az $R(N, n)$ játék (X, H) hipergráfjára $\chi(H) > 2$.*

A klasszikus kombinatorikai megközelítés ezekben az esetekben mindig azt célozza, hogy a paraméterek mely értékeire lesz az adott hipergráf kromatikus száma kettő , illetve három. Vegyük például a Ramsey problémát. Megmutatható, ha $N < 2^{n/2}$, akkor $\chi(H) \leq 2$, míg ha $N > 4^n$, akkor $\chi(H) > 2$. A rés (azaz az ismeretlen terület) a két korlát között lehangolóan nagy. Még rosszabb a helyzet a van der Waerden és a Hales-Jewett játékok hipergráfjai esetén. Ezekre explicit felső korlátokat nem is ismerünk, annyi bizonyos csak, hogy a korlátok nem nőhetnek nagyon gyorsan n függvényében. (Ún. *rekurzív* függvények.) A problémák játék változata (főként az Építő-Romboló játékként tárgyalása) kellemes meglepetést hoz. Az ún. *játékelméleti korlátok* (az alsó, amelyre II döntetlent tarthat, a felső amelyre I nyer az Építő-Romboló (X, H) játékban) sokkal közelebb vannak egymáshoz. A teljesség igénye nélkül próbálunk ezekből ízelítőt adni a továbbiakban. Első lépésként a párosítási stratégiákat terjesztjük ki a hipergráf játékokra. Ehhez újra tennünk kell egy kis gráfelméleti kitérőt, és megismerkedni König Gyula és Philip Hall tételeivel.

4.5 A König-Hall és Hales-Jewett tétel

Egy G gráfot *páros gráfnak* hívunk, ha $V(G)$ felbomlik A és B halmazok uniójára oly módon, hogy $E(G)$ az megegyezik az (A, B)-vágással, azaz a gráf minden éle A és B között húzódik. Egy $F \subset E(G)$ élhalmaz B *párosítása*, ha F párosítás és minden B-beli pont illeszkedik egy F-beli élre. Ez a látszólag nyakatekert fogalom sokszor felbukkan a kombinatorika különböző problémáiban és a gyakorlatban egyaránt. A felhasználhatóságot (számunkra is) az adja, hogy a B párosításának létezése ún. *jól karakterizált probléma*, azaz *könnyen* eldönthető akár pozitív, akár negatív irányban.
Egy G gráfban tetszőleges $X \subset V(G)$ ponthalmazra $N(X)$ az X *szomszédsága*, azaz azon pontok halmaza, amelyek legalább egy X-beli ponttal össze vannak kötve. Ha a G páros gráfban van olyan $X \subset B$, hogy $|X| > |N(X)|$, akkor B-nek nyilvánvalóan nem lehet párosítása. A König-Hall tétel azt mondja ki, ha B-nek nincs párosítása, akkor ez mindig ezzel az okkal magyarázható.

Tétel 4.4 (König) *Egy G véges páros gráfban, ahol $V(G) = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ és A, B független halmazok, a B halmaznak pontosan akkor van párosítása, ha minden $X \subset B$ esetén az $|X| \leq |N(X)|$ teljesül.*

Philip Hall eltérő formában mondta ki a tételt, amelyhez szükségünk van egy további definícióra: Adott véges halmazoknak egy $\{A_i\}_{i=1}^m$ véges rendszere. Egy $S = \{s_1, ..., s_m\} \subset \cup_{i=1}^m A_i$ *diszjunkt reprezentáns rendszer*, ha $s_i \neq s_j$ $i \neq j$, és $s_i \in A_i$ $i = 1, ..., m$ esetén.

Tétel 4.5 (Ph. Hall) *A véges halmazokból álló $\{A_i\}_{i=1}^m$ halmazrendszernek pontosan akkor létezik diszjunt reprezentáns rendszere, ha minden $I \subset \{1, ..., m\}$ esetén $|\cup_{i \in I} A_i| \geq |I|$.*

A tétel második alakja különösen alkalmas a célunkra, a párosítási stratégiák keresésére hipergráf játékokban.

Tétel 4.6 (Hales-Jewett) *Ha egy véges (X, H) hipergráf játékban minden $G \subset H$ esetén $|\cup_{A \in G} A| \geq 2|G|$, akkor a játék döntetlen.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $H = \{A_1, ..., A_m\}$. Tekintsük a

$$H^* = \{A_1, A_1^*, A_2, A_2^*, ..., A_m, A_m^*\}$$

halmazrendszert, ahol $A_i = A_i^*$ minden $i = 1, ..., m$-re. Könnyen ellenőrizhető, hogy az $|\cup_{A\in G} A| \geq 2|G|$ feltételből következik, hogy minden $G^* \subset H^*$ választásra

$$|\cup_{A\in G^*} A| \geq |G^*|,$$

azaz a H^* rendszerre alkalmazható a König-Hall tétel. Legyen a diszjunkt reprezentáns rendszer $S = \{a_1, a_1^*, a_2, a_2^*, ..., a_m, a_m^*\}$. II kövesse az alábbi stratégiát: Valahányszor I választ egy elemet S-ből (a_i-t vagy a_i^*-ot), akkor II válassza a megegyező indexűt (a_i^*-ot vagy a_i-t), különben tetszőlegesen léphet. I nem szerezheti meg A_i összes elemét egyetlen $i = 1, ..., m$-re sem, mert az $a_i, a_i^* \in A_i$ közül legalább az egyiket II szerzi meg.

□

4.6 Feladatok

4.1 (Kromatikus számok) *Az egyszerűség kedvéért jelöljük a feladaton belül az $R(N, n)$ játék hipergráfját R-rel, a $W(N, n)$-ét játékét W-vel és a $HJ(n, d)$-ét pedig H-val. Lássuk be az alábbiakat.*
a., $\chi(R) \geq 3$, ha $N > 4^n$.
b., $\chi(R) \leq 2$, ha $N < 2^{n/2}$.
c., $\chi(W) \leq 2$, ha $N < 2^{n/2}$.
d., $\chi(H) = 3$, ha $n = d = 3$.
e., $\chi(H) = 2$, ha $n = 3$ és $d = 4$.
f., $|H| = \frac{1}{2}((n+2)^d - n^d)$
g., H hipergráfban minden pont legfeljebb $\frac{1}{2}(3^d - 1)$ nyerőhalmaznak eleme, ha n páratlan. Páros n-re ez a szám $2^d - 1$.
h., $\chi(H) \leq 2$, ha $n = 2l + 1$ és $n - 3 - \log_2 n > (\log_2 3)d$, vagy ha $n = 2l$ és $n - 3 - \log_2 n > d$.
i., $\chi(H) \leq 2$, $n \geq d + 1$.
j., $\chi(R) = 3$, ha $N = 6$ és $n = 3$.
k., $R_k(N, n)$ olyan Ramsey típusú játékot jelöl, ahol I és II egy N pontú halmaz k elemű részhalmazait választják lépésenként, és az nyer, aki egy n pontú részhalmaz összes k elemű részhalmazát elsőként megszerzi. Lássuk be, hogy I nyer, ha N elég nagy.

4.2 (Párosítások gráfokban) *Lássuk be az alábbi állításokat.*
a., Ha egy G gráf fa, akkor G páros.
b., Egy G gráf akkor és csak akkor páros, ha minden köre páros pontból áll.
c., Legyen G egy páros gráf, ahol $|A| = |B|$ és minden pont fokszáma k, ahol $k \geq 1$. Ekkor G-ben van teljes párosítás.

d., A König és a Hall tétel ekvivalens, azaz indokolt a König-Hall tétel *elnevezés.*
e., Van olyan megszámlálhatóan végtelen pontból álló G páros gráf ($V(G) = A \cup B$), amely teljesíti a König-Hall tétel feltételét, de nincs B-nek párosítása.
f., Legyen G egy megszámlálható pontszámú páros gráf, ahol a König-Hall feltétel áll B-re, és minden pont fokszáma véges. Ekkor van B-nek párosítása.

4.3 (Hales-Jewett játékok) *Mutassuk meg, hogy*
a., I nyer az Építő-Romboló $HJ(n,d)$ játékban, ha $n < \sqrt{\frac{2d}{\log 2}}$.
b., A $HJ(n,d)$ döntetlen, ha $n \geq 3^d - 1$ és $n = 2l + 1$, vagy ha $n \geq 2^{n+1} - 2$ és $n = 2l$.
c., I (II) nem veszít a fordított $HJ(n,d)$-ben, ha d páratlan (páros).

4.4 (Amőba a Hales-Jewett és M. Hall tétellel) *Mutassuk meg Marshall Hall tételének (a 4.2 feladat f pontja) felhasználásával, hogy*
a., A 14-*amőbában van döntetlenre vezető párosítási stratégia.*
b., Általánosítsuk az előző eredményt d-dimenziós k-amőbára.

4.5 (Párosítás fordított hipergráf játékokra) *Vizsgáljuk meg, hogy igaz-e egy Hales-Jewett típusú tétel fordított hipergráf játékokra.*

4.6 (Tournamentek 1.) *Egy T_n* tournament *(azaz irányított teljes gráf)* tranzitív, *ha a pontjai rendezhetők úgy, hogy az élek a kisebb indexűből a nagyobb indexűbe futnak. I és II a következő játékot játszák K_N élein: Felváltva színezik és egyben irányítják is a még szabad (színezetlen) éleket. I nyer, ha létrehoz egy T_n tranzitív tournamentet az általa színezett élekből. Bizonyítsuk be, hogy*
a., I nyer, ha

$$N > 2^{4^n}$$

b., A játék döntetlen, ha $N < 2^{\frac{n}{2}-2}$.

Fejezet 5

Súlyfüggvények

A súlyfüggvények ötlete a század 20-as éveinek szórakoztató matematikájában bukkant fel először. Más formában (potenciál függvények) régtől használatos a fizikában is, az energia megmaradás tételével egyidős. Bár a hipergráf játékok elmélete sokat fejlődött a 40-es évek vége óta, mégis csak 1973-ban látott napvilágot az Erdős-Selfridge tétel, amely áthozta a súlyfüggvény módszert erre a területre. Ennek a tételnek az ismertetésével kezdjük majd a bevezetés után. A következő részben néhány szót szentelünk a súlyfüggvények, a valószínűségszámítási módszer és az algoritmusok elméletének viszonyáról. A tapasztalatok szerint a véletlen eseményekkel kapcsolatos fogalmak nagy (bár főként pszichikai) nehézséget jelentenek a legtöbb embernek. Ennek megfelelően úgy tárgyaljuk a témát, hogy ezek kihagyása esetén is érthetőek legyenek a továbbiak. Ugyanakkor szeretnénk bátorítani az Olvasót, ha rászánja magát, akkor a fáradozása kifizetődik. A hátralevő részekben a súlyfüggvény módszer hajlékonyságát igyekszünk illusztrálni. A bemutatandó problémák nehézsége emiatt teljesen különböző. Őszintén reméljük, hogy mindenki megtalálja az ízlésének és képességeinek megfelelőt, és a könyv áttanulmányozása után is gazdagítani fogja mind az ismereteit, mind a kombinatorikus játékok elméletét.

5.1 Az Erdős-Selfridge tétel

A tétel kimondása előtt pár szóban vázoljuk az alapötletet. Tegyük fel, hogy egy (X, H) hipergráf játékban a védekező $((II))$ szerepét játszuk. Egy $A \in H$ halmaz addig *veszélyes* számunkra, amíg el nem vettük egy elemét. Ez a veszély annál nagyobb, minél kevesebb elemet kell már I-nek választania ahhoz, hogy megszerezze A összes elemét. Azaz célszerű a veszélyt (a halmaz súlyát) egy olyan pozitív függvénnyel leírni, amely monoton nő ha I újabb elemet vesz belőle, illetve nullává válik, ha nekünk sikerült egy elemét megszereznünk. Az *egész játék veszélyességét* a halmazok súlyának összegével jellemezhetjük. Stratégiánk pedig az lesz, hogy ezt az összeget ne hagyjuk nőni a játék folyamán, s ez garantálja majd a védelmet.

Tétel 5.1 (Erdős-Selfridge) *Tegyük fel, hogy egy (X, H) hipergráf játékra*

$$\sum_{A \in H} 2^{-|A|+1} < 1.$$

Ekkor II elérheti a döntetlent.

Bizonyítás: Néhány jelöléssel kezdünk: $A_i(I)$ illetve $A_i(II)$ rendre az $A \in H$ halmazból I illetve II által kiválasztott elemek számát jelenti I i-edik lépése *után* és II i-edik lépése *előtt.* I i-edik lépését x_i, míg II-ét y_i jelöli. Egy $A \in H$ halmaz *súlya* (I i-edik lépése után):

$$w_i(A) = \begin{cases} 2^{-|A|+A_i(I)} & \text{ha } A_i(II) = 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Egy $x \in X$ *elem súlya*

$$w_i = \sum_{x \in A} w_i(A),$$

az *össz súly* vagy *potenciál* pedig:

$$w_i = \sum_{A \in H} w_i(A).$$

II az ún. *mohó algoritmust* követi. Az i-edik lépésban a még választható elemek közül azt a $z \in X \setminus \{x_1, ..., x_{i-1}, y_1, ..., y_{i-1}\}$ elemet veszi, amelyre a $w_i(z)$ éték maximális. Ez a stratégia azt eredményezi, hogy w_i monoton csökken i-ben, azaz $w_1 \geq w_2 \geq ... \geq w_i$. Valóban, II i-edik lépése után a w_i súlyfüggvény értéke $w_i(z) = w_i(y_i)$-vel csökken. I az $i+1$-edik lépésével legfeljebb $w_i(x_{i+1})$-el növelheti az értéket, hisz pontosan azoknak az x_{i+1}-et tartalmazó halmazok súlyát duplázza meg, amelyeknek nem eleme y_i. (Az utóbbi halmazok értéke nullára csökkent.) A mohó algoritmus miatt $w_i(y_i) \geq w_i(x_{i+1})$, így adódik a potenciál monotonitása. Másrészt

$$w_1 \leq \sum_{A \in H} 2^{-|A|+1} \quad \text{mivel } w_0 \leq \sum_{A \in H} 2^{-|A|}$$

és x_1 azon halmazok súlyát duplázza, amelyeknek eleme. A legrosszabb esetben mindegyiknek, ekkor $w_1 = 2w_0 = \sum_{A \in H} 2^{-|A|+1}$.

Tegyük fel, hogy I megnyeri a játékot, mondjuk az i-adik lépésben. Ez azt jelenti, hogy van olyan $A^* \in H$, amelyre $|A^*| = A_i^*(I)$, így

$$w_1 \geq w_i = \sum_{A \in H} w_i(A) \geq w_i(A^*) = 2^{-|A^*|+A_i^*(I)} = 2^0 = 1.$$

Az előbb viszont beláttuk, hogy $w_1 \leq \sum_{A \in H} 2^{-|A|+1}$, és így $w_1 < 1$ a tétel feltétele miatt. Azaz a feltevésünk, hogy I nyer ellentmondásra vezet, és ezáltal a tételt beláttuk.

□

5.2 Megjegyzés

Tanulságos összehasonlítani a párosításokat és a súlyfüggvényeket alkalmazó stratégiák erejét. Egy (X, H) hipergráf játék esetén nem létezhet Hales-Jewett párosítás, ha $|X| < 2|H|$. Ezzel szemben a globális megközelítést alkalmazó súlyfüggvény módszer működhet akkor is, ha $|H| > c^{|X|}$, ahol $c > 1$. Jelentős különbséget vehetünk észre (ezt később még részletesen tárgyaljuk) végtelen hipergráfokat vizsgálva. A 4.2 feladat f pontjának segítségével megadhatók párosítási stratégiák ezekben az esetekben is, míg a súlyfüggvények definiálásánál számos nehézség adódik.

5.3 Feladatok

5.1 (Conway békái) *A síkot végtelen négyzetrácsra osztjuk, és az x tengely alatt elhelyezünk véges sok követ (ezek a békák), úgy, hogy egy négyzetben csak egy kő lehet. Ha két vízszintesen vagy függőlegesen szomszédos mezőben kövek vannak, és a folytatólagos harmadik mező üres, akkor a következő lépés tehető :*
Áthelyezzük az egyik követ az üres mezőre, a másikat pedig eltávolítjuk a tábláról. Mutassuk meg, hogy:
a., Van olyan kezdőállapot, melyből egy kő feljuttatható 4 magasságra a pozitív térfélre.
b., 5 magasságra nem juttatható fel kő.
c., Ha módosítjuk a lépésszabályt, és átlós ugrás is lehetséges, akkor sem juthat béka 9 magasságra az x tengely fölé.

5.2 (Az E-S tétel éles n-uniform hipergráfra) *Egy (X, H) hipergráf* n-uniform, *ha $|A| = n$ minden $A \in H$ halmazra. Minden n természetes* *számra adjunk meg olyan (X, H) n-uniform hipergráfot, amelyre*

$$\sum_{A \in H} 2^{-|A|+1} = \sum_{A \in H} 2^{-n+1} = 1,$$

és I nyer az (X, H) hipergráf játékban.

5.3 (Az Erdős-Selfridge tétel klasszikus problémakra) *Bizonyítsuk be, hogy II elérheti a döntetlent*
a., az $R(N, n)$ játékban, ha $n > 2\log_2 N$,
b., a $W(N, n)$ játékban, ha $n > 2\log_2 N$,
c., a $HJ(n, d)$ játékot, ha $d \leq n/\log_2 n$.

5.4 (Az Erdős-Selfridge tétel fordított hipergráf játékokra) *Mindkét fél elérheti a döntetlent a (X, H) fordított hipergráf játékban, ha*

$$\sum_{A \in H} 2^{-|A|+1} < 1,$$

és az egyenlőtlenség éles.

5.5 (Festő-Megbízó játék) *Az (X, H) hipergráfra a következő játékot jatsza a Festő és a Megbízó: Minden lépésben a Megbízó kijelöl két, még színezetlen elemet X-ből, amit a Festő kékre-pirosra, vagy pirosra-kékre festhet. (Egyszínűre nem, azaz a kék-kék és a piros-piros nem megengedett.) A Megbízó nyer, ha a játék során keletkezik egyszínű $A \in H$ halmaz, a Festő nyer, ha el tudja ezt kerülni. Mutassuk meg, ha*

$$\sum_{A \in H} 2^{-|A|+1} < 1,$$

akkor a Festő nyer, de ha egyenlőség teljesül, akkor már nyerhet a Megbízó.

5.6 (Véglegesítés játék) *Adott egy egyetemi tanszék, különböző beosztású oktatókkal. A T tanszékvezető és a D dékán a következő (kissé abszurd) játékot űzik: T tetszőlegesen két csoportra osztja embereit, míg D választhat a két csoport között, az egyikben mindenkit egy fokozattal előléptet, a többieket elbocsátja. T célja, hogy legalább egy embert végleges álláshoz juttasson, ahonnan már nem rúgható ki. Jelöljük a_k-val azon oktatók számát, akik k előléptetésre vannak a véglegesítéstől.*
a., Ha $\sum_{k=1}^{\infty} a_k 2^{-k} < 1$, akkor D nyer.
b., Legyenek $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_r$ kettő negatív hatványai úgy, hogy $\sum_{i=1}^{r} x_i = 1$. Ekkor az $\{x_i\}_{i=1}^{r}$ halmaz két részre osztható oly módon, hogy mindkét részben levő számok összege $\frac{1}{2}$.
c., Lássuk be, ha $\sum_{k=1}^{\infty} a_k 2^{-k} \geq 1$, akkor T nyer.

5.7 (Kitöltés lemma) *Az* (X, H) *hipergráf játékban* II*-nek van olyan stratégiája, melynek alkalmazása mellett ha a* k*-adik lépésben* $A_k(I) = i$ *és* $A_k(II) = 0$*, akkor* $i \leq 1 + \log_2 |H|$.

Fejezet 6

Valószínűségszámítási módszer

"Maybe from the madness some beautiful will grow."

H.G. Wells, War of the Worlds (Musical version)

A valószínűségszámítási módszerek behatolása a XX. század matematikájába rendkívüli volt jelentőségében és kiterjedésében egyaránt. Nem is vállalhatjuk ennek még csak a vázlatos ismertetését sem. A diszkrét matematikánál maradva is a bőség zavarával küzdünk, így csupán két kérdéskört kívánunk megragadni. Az egyik a hipergráfok véletlen színezéseinek és a súlyfüggvények kapcsolata, a másik pedig a véletlen gráfok által sugallt játékok elmélete.

6.1 Derandomizáció

Már az egyik első alkalmazásnál felmerült (6.1 feladat *a* pontja), hogy mennyiben tekinthető indokoltnak a valószínűségek használata véges halmazok esetén, hiszen a gondolatmenet helyettesíthető egy leszámlálással. Minden tiszteletünk ellenére is ki kell jelentenünk, hogy Doob ezt hangsúlyozó kritikája elhamarkodott volt. Egyrészt bármely mély matematikai eredmény felfogható, mint trivialitások láncolata, másrészt a lényegre törő rugalmas definíciók és jelölések megsokszorozzák az emberi agy teljesítő képességét. Az igazságnak persze az is része, hogy már a kezdetektől fogva nagy erőfeszítéseket tettek a véletlent használó bizonyítások, algoritmusok hatékony *derandomizálására*, azaz determinisztikussá tételére. Számos esetben a súlyfüggvény módszer automatikusan, amíg más esetekben hosszas munka árán hozzásegít a fenti célhoz. Meg kell jegyezzük, hogy ez nem tette kiküszöbölhetővé a véletlen események használatát. Egyrészt jónéhány problémára csak részben sikerült a derandomizáció, másrészt a valószínűségszámítási eszközök betekintést adnak egy-egy probléma mélyébe, előre látható, hogy mit lehet bizonyítani, s mit nem. A már említett Erdős-Selfridge tétel a következő állítás derandomizált alakjának tekinthető:

Tétel 6.1 (Erdős) *Ha egy* (X, H) *hipergráfra* $\sum_{A\in H} 2^{-|A|+1} < 1$*, akkor* $\chi(H) \leq 2$.

Bizonyítás: Színezzük X elemeit egymástól függetlenül véletlenül $1/2$ valószínűséggel pirosra illetve kékre. (Azaz az ún. Ω *eseménytér* az összes lehetséges piros-kék színezéseket tartalmazza egyenlő valószínűséggel.) A függetlenség miatt egy $A \in H$ halmaz $2^{-|A|}$ valószínűséggel lesz piros vagy kék, s így $2^{-|A|+1}$ valószínűséggel egyszínű. Legyen $I_{\mathcal{A}}$ valószínűségi változó az Ω azon részhalmazának a karakterisztikus függvénye, amely színezésekre A egyszínű, azaz egy $\omega \in \Omega$ színezésre

$$I_{\mathcal{A}} = \begin{cases} 1 & \text{ha } \omega\text{-ban } A \text{ egyszínű} \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Ha T jelöli az egyszínű halmazok számát, akkor $T = \sum_{A\in H} I_{\mathcal{A}}$. Számoljuk ki T várható értékét.

$$E[T] = E[\sum_{A\in H} I_{\mathcal{A}}] = \sum_{A\in H} E[I_{\mathcal{A}}] = \sum_{A\in H} 2^{-|A|+1} < 1,$$

ahol a várható érték linearitását vettük figyelembe, illetve azt, hogy egy tetszőleges $I_{\mathcal{A}}$ karakterisztikus függvényre $E[I_{\mathcal{A}}] = P(\mathcal{A})$. Mivel $E[T] < 1$, van olyan $\omega \in \Omega$ színezés, melyre $T(\omega) < 1$. Másrészt $T(\omega)$ természetes szám, így $T(\omega) = 0$, azaz X ω színezése mellett nincs egyszínű $A \in H$.

□

Az előbbi módszert a várható érték másik neve (első momentum) után *első monentum módszernek* hívjuk. Az Erdős- Selfridge tételben használt súlyfüggvények általában is alkalmazhatók minden olyan esetben, ahol a várható érték kisebb, mint 1. A $w_i(A)$ súlyokra valószínűségszámítási interpretáció is adható. Tegyük fel, hogy I színez pirossal, II kékkel. Ekkor $w_i(A)$ annak az eseménynek a valószínűsége, hogy A piros lesz, ha I i-edik lépése után X maradék pontjait egymástól függetlenül $1/2$ valószínűséggel festjük pirosra illetve kékre. A másik fontos észrevétel, hogy az eljárás $|X|$-ben és $|H|$-ban polinomiális idejű algoritmust ($c|X||H|$) ad egy jó színezés megtalálására, míg az összes lehetséges színezések száma $2^{|X|}$, azaz exponenciális. Ez a módszer számítástudománybeli népszerűségének oka, mivel reménytelennek látszó feladatokra is gyors algoritmust adhat.

6.2 Véletlen gráfok

A másik kérdéskör, amire röviden utalunk, a *véletlen gráfok* elmélete. Több, nagyjából ekvivalens modell használatos, a legszemléletesebb (és legkényelmesebb is egyben) a következő:
Rögzítünk n pontot, majd minden pontpár között, egymástól függetlenül $p \in (0,1)$ valószínűséggel élet húzunk. A valószínűségi kísérlethez tartozó Ω eseményteret $G_{n,p}$-vel jelöljük.
A modellen belül rengeteg kérdés merül fel, számunkra a legérdekesebbek az ún. *monoton gráftulajdonságok* teljesülésének valószínűsége. Egy $\mathcal{P}$ halmazt n pontú gráftulajdonság nevezünk, ha $\mathcal{P} \subset G_{n,p}$. Egy $\mathcal{P}$ gráftulajdonság *monoton*, ha $G_1 \in \mathcal{P}$ és $G_1 \subset G_2$ (G_1 részgráfja G_2-nek) esetén következik, hogy $G_2 \in \mathcal{P}$. Monoton gráftulajdonság például a $\mathcal{C}_n$, az n pontú összefüggő gráfok halmaza, a $\mathcal{T}_n$, a háromszöget tartalmazó gráfok, vagy $\mathcal{H}_n$, az n hosszú (Hamilton) kört tartalmazó gráfok halmaza.
Tegyük fel, hogy az n pontú üres gráf $E_n \notin \mathcal{P}$, míg $K_n \in \mathcal{P}$. Ekkor az

$$f(p) = P(\{G \in G_{n,p} : G \in \mathcal{P}\})$$

hozzárendeléssel definiált f függvény monoton p-ben. Számtalan esetben (pl ha $\mathcal{P} = \mathcal{C}_n, \mathcal{T}_n$, vagy $\mathcal{H}_n$) az f függvény rendkívül sajátosan viselkedik. A $p = 0$ pontban az értéke 0, s egészen lassan nő p-t növelve, majd egy viszonylag kis intervallumon közel 1-re ugrik fel az értéke. Egy jellemző példa az Erdős-Rényi tétel:

Tétel 6.2 (Erdős-Rényi) *Ha $p < (1-\epsilon)\log n/n$, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} P(\{G \in G_{n,p} : G \in \mathcal{C}_n\}) = 0,$$

ha $p > (1+\epsilon)\log n/n$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} P(\{G \in G_{n,p} : G \in \mathcal{C}_n\}) = 1,$$

ahol $\epsilon > 0$.

A 6.2 tételből következik, ha I és II véletlenszerűen választják a K_n éleit, lépénként $b : 1$ arányban, akkor $b > \frac{n}{(2-\epsilon)\log n}$ esetén II majdnem biztosan megszerez egy feszítőfát, míg ha $b < \frac{n}{(2+\epsilon)\log n}$, akkor I

ezt majdnem biztosan megakadályozza. Márészt (lásd az *elfogult játékokat* a 9 fejezetben), az előző játék kimenetele akkor is csak a $b:1$ aránytól függ, ha I és II teljesen tudatosan és tökéletesen játszik. Ez az analógia többször is felbukkan a gráfokon definiált játékokkal kapcsolatban. Az elv hasznossága abban áll, hogy egy $\mathcal{P}$ tulajdonság valószínűségét többnyire egyszerű kiszámolni, és ez ötletet adhat a $\mathcal{P}$ tulajdonsághoz tartozó játék kimenetelére. Hangsúlyoznunk kell azonban, hogy ez csak heurisztika, amely nem mindig ad helyes becslest, és a működésének feltételei nincsenek teljesen feltárva.

6.3 Feladatok

6.1 (Véletlen színezések) *Véletlen színezések használatával lássuk be, hogy*
a., $\chi(R(N,n)) \leq 2$, *ha* $2\log_2 N \leq n$
b., $\chi(W(N,n)) \leq 2$, *ha* $2\log_2 N \leq n$

6.2 (Hamilton utak tournamentben) *Egy* T_n *irányított* n*-pontú teljes gráfot tournamentnek nevezzünk.* Irányított Hamilton útnak *nevezzük* T_n *összes pontját tartalmazó irányított utat.*
a., Minden T_n *tournamentben van legalább egy irányított Hamilton út.*
b., Van olyan T_n *tournament, amelyik legalább* $n!/2^{n-1}$ *irányított Hamilton utat tartalmaz.*

6.3 (Függetlenségi szám) *Mutassuk meg, hogy egy tetszőleges* n*-pontú* G *gráfban az* $\alpha(G)$ *függetlenségi számra teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek:*
a.,

$$\alpha(G) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i+1},$$

ahol d_i *az* i*-edik pont fokszáma.*
b.,

$$\alpha(G) \geq \frac{n}{t+1}, \text{ ahol } t = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n},$$

az átlagfokszám.

6.4 (Hipergráfok Turán tétele) *Egy* (X,H) *hipergráfot* r-uniformnak *hívunk, ha minden* $A \in H$ *halmazra* $|A| = r$*. Egy* $S \subset X$ független*, ha nem létezik olyan* $A \in H$*, melyre* $A \subset S$*. Az* (X,H) *hipergráf* $\alpha(H)$ függetlenségi száma *X legnagyobb független S részhalmazának elemszáma. Lássuk be az alábbi egyenlőtlenségeket, ha az* (X,H) *hipergráf* r*-uniform:*

a., $\alpha(H) \geq np - |H|p^r$, ahol $p \in (0,1)$ tetszőleges.
b., Ha $t = \frac{r|H|}{n}$, azaz az átlagfokszám, *akkor*

$$\alpha(H) \geq (1 - \frac{1}{r})\frac{n}{t^{\frac{1}{r-1}}}.$$

6.5 (Lefedő halmazok) *Egy (X, H) hipergráfra a $C \subset X$ halmaz* lefedő, *ha minden $A \in H$ halmazra a $C \cap A \neq \emptyset$. Az (X, H) hipergráf* lefedési száma, *$\tau(H)$, a legkisebb lefedő halmaz elemszáma. Mutassuk meg, hogy*
a., $\tau(H) \leq |X|p + \sum_{A \in H}(1-p)^{|A|}$, bármely $p \in (0,1)$-re.
b., $\tau(H) \leq 2\sqrt{|X|}$, ha $A, B \in H$ és $A \neq B$-ből $|A| \neq |B|$ következik.
c., Ha egy n pontú G gráfban nincs két egyforma hosszú kör, akkor G éleinek maximális elemszáma $n + \sqrt{2n}$ és $n + 2\sqrt{n + 3\sqrt{n}}$ között van.

6.6 (Markov egyenlőtlenség) *Az integrálható X valószínűségi változóra igaz:*
a., Ha $X \geq 0$, akkor minden $a > 0$ számra

$$P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}.$$

b., Ha egy M konstansra $M \geq X \geq 0$, akkor minden $a < M$-re

$$P(X > a) \geq \frac{E[X] - a}{M - a}.$$

6.7 (Chebyshev egyenlőtlenség) *Ha X valószínűségi változóra létezik $E[X]$ és $E[X^2]$, valamint $\lambda > 0$, akkor*

$$P(|X - E[X]| > \lambda) \leq \frac{E[X^2] - E[X]^2}{\lambda^2}.$$

6.8 (Hardy-Ramanujan tétel) *Legyen $\nu(n)$ az n természetes számot osztó prímek száma, $o(n)$ illetve $O(n)$ olyan menyiségek, melyek n-nel osztva 0-hoz kovergálnak, illetve korlátosak $n \to \infty$ esetén.*
Bizonyítsuk be, ha egy $f : N \to R$ függvényre $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$, akkor

$$|\{x : x \in \{1, ..., n\} \text{ és } |\nu(x) - \log\log n| > f(n)\sqrt{\log\log n}\} = o(n).$$

Útmutatás: Válasszunk egy véletlen x-et egyenletes eloszlással az $\{1, ..., n\}$ halmazból. Egy p prímre definiáljuk az X_p valószínűségi változót:

$$X_p(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } p|x \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \quad \text{és } X = \sum_{p \leq n} X_p.$$

Mutassuk meg, hogy $E[X] = \log\log n + O(1)$, $var(X) = \log\log n + o(1)$, és használjuk a Chebyshev egyenlőtlenséget.

6.9 (Lovász Local Lemma) *Tegyük fel, hogy* $A_1, ..., A_n$ *egy* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *valószínűségi mező eseményei.* G *gráf az* $A_1, ..., A_n$ függőségi gráfja, *ha* $V(G) = \{1, ..., n\}$ *és minden* i*-re* A_i *független az* $\{A_j\}_{j \in J}$ *események által generált* σ*-algebrától, ahol* $J = V(G) \setminus N(i)$*, azaz az* i *ponttal nem szomszédos pontok halmaza.*
Lássuk be, ha az $A_1, ..., A_n$ *eseményekre* $P(A_i) \leq p$ *és a* G *függőségi gráfra* $deg(i) \leq d$ *minden* i*-re, valamint* $4dp < 1$*, akkor* $P(\cap_{i=1}^n \overline{A}_i) > 0$.
Útmutatás: s *szerinti teljes indukcióval megmutatható, ha egy* $S \subset \{1, ..., n\}$*, és* $|S| \leq s$*, akkor* $P(A_i | \cap_{j \in S} \overline{A}_j) \leq 2p$*, minden* i*-re.*

6.10 (Lovász Lemma hipergráfokra) *Tegyük fel, hogy egy* k*-uniform* (X, H) *hipergráf minden* $x \in X$ *pontjára* $deg_H(x) = |\{A : A \in H, \ x \in A\}| < 2^{k-3}/k$*. Lássuk be, hogy* $\chi(H) \leq 2$.

6.11 (van der Waerden alsó korlát) *Legyen* W *a* $W(N, n)$ *a van der Waerden játék hipergráfja. Mutassuk meg, ha* $N \leq 2^n/8n$*, akkor* $\chi(W) \leq 2$.

Fejezet 7

Az Építő által használt súlyfüggvények

“A győzelem a háború fő célja. Elhúzódó háborúban a fegyverek kicsorbulnak, és a morál süllyed.”

Szun-cu, A háború művészete

Az előzőekben láttuk, hogyan használhatja II (a védekező fél) a súlyfüggvényeket a döntetlen elérésére. Természetesen vetődik fel a kérdés, vajjon a támadó fél veheti-e hasznát hasonló gondolatmenetnek ? Az igenlő választ az alábbi hasznos kritérium adja:

Tétel 7.1 (Beck) *Tegyük fel, hogy az Építő-Romboló (X, H) hipergráf játékban az élek n eleműek és X bármely két pontját legfeljebb d él tartalmazza. Ha $|H| > d2^{n-3}|X|$, akkor I nyer.*

Bizonyítás:

Ahogy korábban, jelentse $x_1, x_2, ..., x_i$ I illetve $y_1, y_2, ..., y_i$ II által választott elemeket az i-edik lépés végéig. Egy $A \in H$ halmaz súlya az i-edik lépéspár (azaz y_i választása) után:

$$w_i(A) = \begin{cases} 2^{-|A|+A_i(I)} & \text{ha } A(II) = 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases},$$

ahol $A_i(I) = |A \cap \{x_1, ..., x_i\}|$ és $A_i(II) = |A \cap \{y_1, ..., y_i\}|$. A korábbiakhoz hasonlóan egy $x \in X$ pont súlya

$$w_i(x) = \sum_{x \in A} w_i(A),$$

a totális súly pedig

$$w_i = \sum_{A \in H} w_i(A).$$

I a mohó algoritmust követi, azaz x_{i+1}-et úgy választja meg, hogy a

$$w_i(x_{i+1}) = \max\{w_i(z) : z \in X \setminus \{\{x_1, ..., x_i\} \cup \{y_1, ..., y_i\}\}\}.$$

Ekkor a $w_{i+1} \geq w_i - d/4$ egyenlőtlenség teljesül. Ezt a következőképpen igazolhatjuk: x_{i+1} választása megduplázza azon halmazok értékét, amelyek tartalmazzák x_{i+1}-et, míg II y_{i+1} válasza annyival csökkenti a totális súlyt, amennyi az y_{i+1}-et tartalmazó halmazok *új* súlyainak összege. Figyelembe kell ugyanis vennünk, hogy az y_{i+1} lenullázza azon halmazok értékét is, melyeket x_{i+1} éppen kétszeresére növelt. Formálisan

$$w_{i+1} = w_i + w_i(x_{i+1}) - w_i(y_{i+1}) - \psi_i,$$

ahol

$$\psi_i = \sum_{A \in H, \{x_{i+1}, y_{i+1}\} \subset A} w_i(A).$$

Mivel $w_i(A) \leq 1/4$, ha $\{x_{i+1}, y_{i+1}\} \subset A$, ezért $\psi_i \leq d/4$. Továbbá $w_i(x_{i+1}) \geq w_i(y_{i+1})$, így

$$w_{i+1} = w_i + w_i(x_{i+1}) - w_i(y_{i+1}) - d/4.$$

Teljes indukcióval következik ebből, hogy

$$w_i \geq w_{i-1} - d/4 \geq w_{i-2} - 2d/4 \geq ... \geq w_0 - id/4.$$

Másrészt $w_0 = \sum_{A \in H} 2^{-|A|} = 2^{-n}|H|$ és $i \leq |X|/2$, azaz

$$w_{|X|/2} \geq 2^{-n}|H| - \frac{d|X|}{8} > 0$$

a feltételek miatt. Így a játék végén is lennie kell olyan $A \in H$ halmaznak, melyre $w_i(A) > 0$. A súly definiciójából látható, hogy A összes elemét I szerezte meg.

□

7.1 Feladatok

7.1 (Építő-Romboló van der Waerden játék) *Lássuk be, hogy I nyer az Építő-Romboló $W(N, n)$ játékban, ha $N \geq n^3 2^n$.*

7.2 (Építő-Romboló Ramsey játék) *I nyer az Építő-Romboló* $R_k(N,n)$ *játékban, ha* $N \geq n^{k+3} 2^{\binom{n}{k}}$.

7.3 (Építő-Romboló Hales-Jewett játék) *I nyerhet az Építő-Romboló* $HJ(n,d)$ *játékban, ha* $d > \frac{\log 2}{2} n^2$.

7.4 (Feszített részgráf játék) *Egy rögzített* G *gráfra és egy* N *természetes számra jelöljük a következő játékot* $Sp(G,N)$*-nel: I és II felváltva színezi* K_N *éleit. I akkor nyer, ha* K_N*-ben lesz olyan* $|V(G)|$ *elemű ponthalmaz, amelyen az I által színezett élek* G*-vel izomorf részgráfot alkotnak, míg a többi élt II szerezte meg. Jelölje* C_5 *az* 5*-hosszú (átló nélküli) kört. Mutassuk meg, ha* $N > 3842$, *akkor I nyer az* $Sp(C_5,N)$ *játékban.*

7.5 (Színezett van der Waerden játék) *I és II ebben a játékban az* $\{1,...,N\}$ *számokat színezi felváltva, I kékre, II pedig pirosra. Rögzítünk* $f : \{1,...,n\} \mapsto \{\text{kék,piros}\}$ *függvényt, s I nyeri a játékot, ha keletkezik olyan* n*-hosszú számtani sorozat* $\{a_i\}_{i=1}^n \subset \{1,...,N\}$, *amelyben az* a_i *színe* $f(i)$. *Lássuk be, hogy I nyer, ha* $N \geq n^3 2^n$.

Fejezet 8

A fokszám játék

A tárgyalandó *fokszám játék* látszólag eltér az eddigi megközelítésünktől, főleg mivel technikai okokból nem (X, H) hipergráf játék alakjában vizsgáljuk. A probléma nehézsége is eltérő a megszokottaktól, ez talán a legkomplikáltabb eredmény, amelyet ismertetünk. Mégsem lenne célszerű kihagyni a válogatásból, mert a súlyfüggvény módszer két nagyon fontos variánsa is előkerül a probléma megoldása során.
A játék egyik lehetséges definiciója a következő: I és II felváltva választják a $K_{n,n}$ (a $2n$-pontú teljes páros gráf) éleit. I célja, hogy minél nagyobb maximális fokszámot érjen el az általa választott részgráfban, azaz legyen olyan pont, amelyhez illeszkedő élek közül nagyon sokat megszerzett. Mivel az $n/2$ fokszámot könnyen elérheti I, a természetes paraméterezés az az, hogy $n/2 + k$ alakban írjuk fel a követelményt, és azt kérdezzük, k mely értékeire nyer I, illetve melyekre nem. Könnyen látható, hogy a játék ekvivalens az alábbival: Adott egy $n \times n$-es négyzetes tábla, s ennek a mezőit színezi I és II felváltva pirosra, illetve kékre. I célja, hogy egy sorban vagy oszlopban elérjen legalabb $n/2 + k$ piros négyzetet.

Tétel 8.1 (Székely-Beck) *A fokszám játékban elegendően nagy n esetén*
(i) ha $k \geq \sqrt{n}\sqrt{\log n}$, akkor döntetlen az eredmény.
(ii) ha $k \leq \frac{1}{12}\sqrt{n}$, akkor I nyer.

Bizonyítás: (i) A tábla mezői alkotják X-et, az oszlopai és sorai H-t az (X, H) hipergráf játékban. Feltéve, hogy I illetve II lépései az i-edik forduló végéig $x_1, ..., x_i$ illetve $y_1, ..., y_i$ a következő súlyfüggvényt definiáljuk egy $A \in H$ sorra vagy oszlopra:

$$w_i(A) = (1+\lambda)^{|\{x_1,...,x_i\} \cap A| - (n/2+k)}(1-\lambda)^{|\{y_1,...,y_i\} \cap A| - (n/2-k)},$$

ahol a $\lambda > 0$ értéket később határozzuk meg. A már megszokott módon az $x \in X$ elem súlya

$$w_i(x) = \sum_{x \in A} w_i(A),$$

illetve a totális súly

$$T_i = \sum_{A \in H} w_i(A).$$

Legyen y_i a maximális súlyú a választható elemek között. Mint látható, a lényeges különbség az eddigiekhez képest az az, hogy egy $A \in H$ halmaz súlya nem válik nullává, ha II elfoglalja egy elemét. Továbbra is áll viszont a szokásos egyenlőtlenség:

$$T_{i+1} \leq T_i - \lambda w_i(y_i) + \lambda w_i(x_{i+1}) \leq T_i.$$

Másrészt

$$T_1 \leq 2n(1+\lambda)(1+\lambda)^{-n/2+k}(1-\lambda)^{-(n/2-k)} < 4n(1-\lambda^2)^{-n/2}(\frac{1-\lambda}{1+\lambda})^k.$$

Következésképpen

$$T_i < 4n(1-\lambda^2)^{-n/2}(\frac{1-\lambda}{1+\lambda})^k$$

minden $i = 1, ..., n^2/2$-re. Tegyük fel, hogy I színezett $n/2 + k$ mezőt valamelyik sorban vagy oszlopban, mondjuk az i-edik lépésben. Természetesen ez azt jelenti, hogy

$$1 \leq T_i < 4n(1-\lambda^2)^{-n/2}(\frac{1-\lambda}{1+\lambda})^k,$$

vagy ami ezzel ekvivalens

$$(1-\lambda^2)^{n/2}(\frac{1+\lambda}{1-\lambda})^k < 4n.$$

Legyen $k = \sqrt{n \log n}$ és $\lambda = \sqrt{\frac{\log n}{n}}$. Használva az $1-\epsilon \approx e^{-\epsilon}$ és az $1+\epsilon \approx e^{\epsilon}$ közelítéseket kis ϵ-ra kapjuk, hogy

$$(1-\lambda^2)^{n/2} \approx e^{-\lambda^2 n/2} = e^{-\frac{\log n}{2}} = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

$$(\frac{1+\lambda}{1-\lambda})^k = (1 + \frac{2\lambda}{1-\lambda})^k > (1+2\lambda)^k \approx e^{2\lambda k} = e^{2\log n} = n^2.$$

Ezzel az adódik, hogy

$$4n > (1-\lambda^2)^{n/2}(\frac{1+\lambda}{1-\lambda})^k \approx \frac{1}{\sqrt{n}}n^2 = n^{3/2},$$

ami ellentmondás, ha n elegendően nagy, s ezzel beláttuk a tétel első felét.

□

Az (ii) rész bizonyítása előtt célszerű két dolgot megejteni. Egyrészt megérteni, miért is $c\sqrt{n} = k$ nagyságrendű eredmény várható, másrészt végigcsinálni egy bizonyítás kísérletet, amely kiemeli a tényleges bizonyítás lényegi részét.
Használjuk tehát a véletlen heurisztikát, azaz feltételezzük, hogy I és II találomra színezik a táblát. Ekkor az egy sorban/oszlopban levő piros/kék jelek száma az $X_1 + X_2 + ... + X_n$ eloszlását követi, ahol X_i-k független, azonos eloszlású valószínűségi változók és $P(X_1 = 1) = P(X_1 = 0) = 1/2$. Így az šszeg várható értéke $E(\sum_{i=1}^n X_i) = n/2$, míg a varianciája

$$Var(\sum_{i=1}^n X_i) = E(\sum_{i=1}^n X_i - E(\sum_{i=1}^n X_i))^2 = \sum_{i=1}^n E(X_i - \frac{1}{2})^2 = n/4.$$

Ez $\sigma(\sum_{i=1}^n X_i) = \sqrt{n}/2$ szórást jelent az összegre, azaz nagy valószínűséggel lesz olyan sor vagy oszlop, amelyben a piros és kék mezők számának különbsége legalább, mondjuk, $\sqrt{n}/10$. (Figyelembe vettük, hogy a $\sum_{i=1}^n X_i$ binomiális eloszlást követ.)
I stratégiája ezen a heurisztikán alapszik, s így valamilyen értelemben a *második momentum módszer* derandomizálásának tekinthető. Ezt a következőképpen tehetjük meg:
Legyen egy A sor/oszlop súlya

$$w_i(A) = A_i(I) - A_i(II),$$

ahol $A_i(I) = |A \cap \{x_1, ..., x_i\}|$ és $A_i(II) = |A \cap \{y_1, ..., y_i\}|$. Egy $x \in X$ mező súlya

$$w_i(x) = \sum_{x \in A} w_i(A),$$

illetve a totális súly

$$T_i = \sum_{A \in H} w_i^2(A).$$

Kövesse I a már szokásos stratégiát, azaz válassza azt az x_{i+1} mezőt az $(i+1)$-edik lépésben úgy, hogy a $w_i(x_{i+1})$ érték a lehető legnagyobb legyen.

Nézzük meg, hogyan változtatják meg I és II lépései a T_i súlyfüggvényt. Ha $x_{i+1} \in A$ és $y_{i+1} \notin A$, akkor

$$w_{i+1}^2(A) = (A_i(I) - A_i(II) + 1)^2 = (A_i(I) - A_i(II))^2 + 2(A_i(I) - A_i(II)) + 1 =$$

$$= w_i^2(A) + 2w_i(A) + 1.$$

Ha $x_{i+1} \notin A$ és $y_{i+1} \in A$, akkor

$$w_{i+1}^2(A) = (A_i(I) - A_i(II) - 1)^2 = (A_i(I) - A_i(II))^2 - 2(A_i(I) - A_i(II)) + 1 =$$

$$= w_i^2(A) - 2w_i(A) + 1.$$

Tegyük fel, hogy $x_{i+1} \in A \cap B$ és $y_{i+1} \in C \cap D$, ahol az A, B, C és D sorai illetve oszlopai a táblának. Mivel $w_i(x_{i+1})$ maximális volt,

$$w_i(A) + w_i(B) \geq w_i(C) + w_i(D).$$

Azaz, ha A, B, C és D mind különbözőek, akkor

$$T_{i+1} \geq T_i + 4,$$

míg ha például $A = C$, akkor

$$T_{i+1} \geq T_i + 2,$$

vagyis a T_i totális súlyfüggvény értéke legalább 2-vel nő lépésenként. Összesen $n^2/2$ lépéspár tehető így

$$T_{n/2} \geq T_0 + 2n^2/2 = n^2.$$

Másrészt

$$n^2 \leq T_{n^2/2} = \sum_{A \in H} w_i^2(A) \leq 2n \max\{w_{n^2/2}^2(A) : A \in H\},$$

hiszen $|H| = 2n$. Tehát létezik egy olyan A^* sor vagy oszlop, amelyre

$$w_{n^2/2}^2(A^*) \geq n/2 \text{ azaz } |w_{n^2/2}^2(A^*)| \geq \sqrt{n/2}.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy *valamelyik* játékos legalább $\sqrt{n/2}$ mezővel többet szerzett meg A^*-ból, mint a másik. Azt sajnos nem garantálja a bizonyítás, hogy I az a fél, aki megszerezte az A^*-beli mezők többségét. Az *igazi* bizonyítás hátralevő része a feladatokban található.

8.1 Feladatok

8.1 (Fokszám játék) *Definiáljunk egy új súlyfüggvényt,*

$$w_i(A) = |A_i(I) - A_i(II) + \frac{\sqrt{n}}{4}|^+,$$

ahol

$$|\alpha|^+ = \begin{cases} \alpha & ha\ \alpha > 0 \\ 0 & ha\ \alpha \leq 0 \end{cases}.$$

Egy $x \in X$ *mező súlya hasonlóan, mint az előb, és* $T_i = \sum_{A \in H} w_i^2(A)$ *szintén. A játék során az* $i+1$*-edik lépéspárban előálló helyzet* stagnáló, *ha* $x_{i+1}, y_{i+1} \in B$ *és* $w_i(B) = 0$ *valamely* B *sorra vagy oszlopra. (Azaz a* B *sor/oszlop legalább* $\sqrt{n}/4$*-gyel több* II *által jelölt mezőt tartalmaz, mint* I *által választottat.)*
Mutassuk meg az alábbiakat:
a., Ha az $i+1$*-edik lépés nem stagnáló, akkor* $T_{i+1} \geq T_i + 2$*, ha stagnáló, akkor* $T_{i+1} \geq T_i$.
b., Ha az i*-edik lépés stagnáló, akkor* $w_i(C) = 0$*, ha* C *a* másik y_{i+1}*-et tartalmazó sor/oszlop. Továbbá, ha* z *egy még jelöletlen eleme* A*-nak, és* D *egy a* z*-t tartalmazó sor/oszlop, akkor* $w_i(D) = 0$.
Ezek után vizsgáljunk meg két esetet. Az elsőben feltesszük, hogy az összes $n^2/2$ *lépésnek kevesebb, mint fele volt stagnáló lépés.*
c.,

$$T_{n^2/2} \geq n^2/2 \quad \max\{w_{n^2/2}^2(A) : A \in H\} \geq n/4,$$

és van olyan $A^* \in H$*, amelyben* I *legalább* $\sqrt{n}/4$*-gyel több mezőt választott, mint* II.
Így tehát feltehetjük, hogy a lépéseknek több, mint felében stagnáló lépés történt. Feltehetjük azt is, hogy legalább $n^2/8$ *stagnáló lépésben az* x_{i+1} *és* y_{i+1} *mezőket valamely sor tartalmazza. (Különben elforgatjuk a táblát.) Továbbá, ha az* $i+1$*-edik lépés stagnáló, legyen* $STAG(A,i)$ *az* $A \ni x_{i+1}, y_{i+1}$ *sor jelöletlen mezőinnek halmaza az* i*-edik lépés után.*
d., Létezik olyan i_0*, amire*

$$|STAG(A, i_0)| \geq \frac{n}{4}.$$

e., Minden lépéspár után

$$\sum_{D \text{ oszlop}} (D(I) - D(II)) = 0.$$

Legyen

$$\sum_1 = \sum_{\substack{D \text{ oszlop} \\ D(I)-D(II)>0}} D(I) - D(II),$$

$$\sum_2 = \sum_{\substack{D \text{ oszlop} \\ D(II)-D(I)>0}} D(II) - D(I).$$

f.,

$$\sum_1 = \sum_2$$

g., Az i_0-adik lépés után

$$\sum_2 \geq \frac{n^{3/2}}{16} \quad \textit{és így} \quad \sum_1 \geq \frac{n^{3/2}}{16}.$$

h., Az i_0-adik lépésben

$$\frac{3}{4} n \max\{D(I) - D(II) : D \;\; \textit{oszlop}\} \geq \sum_1,$$

azaz

$$\max\{D(I) - D(II) : D \;\; \textit{oszlop}\} \geq \frac{\sqrt{n}}{12},$$

ami bizonyítja a tétel második állítását.

Fejezet 9

Elfogult játékok és végtelen hipergráfok

"As no better man advances to take this matter in hand, I hereupon offer my own poor endeavor. I promise nothing complete; because any human being supposed to be complete, must for that very reason infallibly be faulty. I shall not pretend to a minute anatomical description of the various species, or - in this place at least - to much of any description. My object here is simply to project the draught of systematization of cetology. I am the architect, not the builder."

Herman Melville, Moby Dick

Egy (X, H, p, q) hipergráf játék *elfogult*, ha $p \neq q$. Először az Erdős-Selfridge tételt általánosítjuk erre az esetre, majd bemutatjuk egy alkalmazását egy gráf játékra. Az elfogult játékok jelentősége igazából a végtelen hipergráf játékok vizsgálatánál mutatkozik meg. Egy (X, H) hipergráf játékban ha X végtelen, akkor sokszor kézenfekvő az X halmazt kisebb (véges) darabokra vágni, s a részeken definiálni stratégiákat. Erre már láttunk példát, a párosítási stratégiák is ilyenek, ahol a résztáblák kettő eleműek. Különösen fontos a megfelelő felbontás akkor, ha súlyfüggvényeken alapuló stratégiákat szeretnénk használni, ugyanis végtelen H esetén végtelen súly adódhat. A részekre vágással ez a probléma megszűnik, a helyébe az lép, hogy pontosan kell követnünk, miféle interakciók vannak a részek között. A nehézségek kezelésére új, többnyire elfogult (másodlagos) hipergráf játékokat vezetünk be. Ennek egy érdekes és nem túl bonyolult megvalósítását részletesen ki is dolgozzuk.

9.1 Az Erdős-Selfridge tétel általánosításai

Tétel 9.1 (Beck) *Az $(X, H, p, 1)$ hipergráf játék döntetlen, ha*

$$\sum_{A \in H} 2^{-|A|/p} < \frac{1}{2}.$$

Bizonyítás: Hasonlóan járhatunk el, mint az Erdős-Selfridge tétel igazolásánál. Legyen I ii-edik lépéssorozata $x_i^1, ..., x_i^p$, míg II lépése y_i. Egy $A \in H$ halmaz súlya II i-edik lépése előtt:

$$w_i(A) = \begin{cases} \lambda^{A_i(I)-|A|} & \text{ha } A_i(II) = 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases},$$

ahol $A_i(I) = |A \cap \{x_1^1, ..., x_1^p, ..., x_i^1, ..., x_i^p\}|$, $A_i(II) = |A \cap \{y_1, ..., y_{i-1}\}|$, és $\lambda = 2^{1/p}$. Egy $x \in X$ súlya, illetve a teljes súly $w_i(x) = \sum_{x \in A} w_i(A)$, és $w_i = \sum_{A \in H} w_i(A)$, mint korábban. II most is a mohó algoritmus szerint jár el, azaz az i-edik lépése maximális súlyú.
Ha I az A halmaz egy elemét kiválasztja, az a halmaz értékét λ-szorosára növeli. A legrosszabb esetben I mind a p $i+1$-edik lépése A-ba esik, így az érték $w_i(A)\lambda^p$ lesz, azaz a növekmény $(\lambda^p - 1)w_i(A)$:

$$w_i - w_i(y_i) + (\lambda^p - 1) \max_{1 \le j \le p} (w_i(x_i^j)) \ge w_{i+1}.$$

Mivel $w_i(y_i)$ maximális volt, és $\lambda^p = 2$, a $w_i \ge w_{i+1}$. Hasonlóan belátható, hogy

$$w_1 \le \sum_{A \in H} \lambda^{-|A|+p} = \sum_{A \in H} 2^{\frac{-|A|}{p}+1} < 1.$$

Másrészt ha I nyerne, például k-adik lépésben, akkor lenne egy $A \in H$, melyre $1 = w_k(A) \le w_k \le w_1 < 1$.

$\square$

Bizonyítás nélkül közöljük a $q \neq 1$ általánosítást. Megjegyezzük továbbá, hogy mindkét állítás éles.

Tétel 9.2 (Beck) *Az (X, H, p, q) hipergráf játék döntetlen, ha*

$$\sum_{A \in H} (1+q)^{-|A|/p} < \frac{1}{1+q}$$

9.2 Feszítőfa játék

Vizsgáljuk meg a következő játékot: Egy n természetes számra I és II felváltva választja az n-pontú teljes gráf, a K_n éleit. I lépésenként p élt vehet, míg II egyet. II célja K_n egy feszítőfájának megszerzése, I ennek megakadályozására törekszik. Ha $p = 1$, akkor a játékunk nem más, mint a 3 fejezetben ismertetett Shannon-féle kapcsoló játék speciális esete, melyet $n \geq 4$-re II könnyedén nyer. I esélye növekszik tehát, ha $p > 1$. A 6 fejezet véletlen heurisztikája szerint alkalmas c_1 és c_2 konstansokkal $p > c_1 n/\log n$ esetén I, míg $p > c_1 n/\log n$-re II nyerése várható. S valóban, Chvátal, Erdős és Beck eredményeit összegezve:

Tétel 9.3 *A feszítőfa jétékban I nyer, ha $p > (1+\epsilon)n/\log n$, de II nyer, ha $p < (\log 2 - \epsilon)n/\log n$, ahol $\epsilon > 0$ és $n > n_0(\epsilon)$.*

Bár a tétel első fele sem nehéz vagy érdektelen, itt csak a második részt bizonyítjuk, mivel az megkapható, mint a 9.1 tétel egyszerű következménye.
Bizonyítás: Egy feszítőfa elfoglalását szeretnénk garantálni II számára, azaz az Építőnek keresünk súlyfüggvényen alapuló algoritmust. A korábbi megközelítés (7.1 tétel) most nem vezetne eredményre, így más ötletre van szükség. A 3.2 feladatban láttuk, hogy egy Építő-Romboló (X, H, p, q) játék átírható egy (X, H^*, p, q) alakú játékra, ahol (X, H^*) az (X, H) *duális hipergráfja*, azaz

$$H^* = \{A : A \subset X \text{ minimális és } A \cap B \neq \emptyset,\ \forall B \in H\}.$$

Könnyen látható, ha $H = \{F : F \text{ feszítőfa } K_n\text{-ben}\}$, akkor $H^* = \{V : V \text{ vágás } K_n\text{-ben}\}$ (lásd a 3.8 feladat g pontját.)
Ha V egy (A, B)-vágás, ahol $|A| = k$, $|B| = n - k$, akkor $|V| = k(n-k)$, továbbá $\binom{n}{k}$ vágás létezik, amely K_n pontjait $k : n-k$ arányban osztja. Így a 9.1 tétel feltétele leegyszerűsödik:

$$\sum_{k=1}^{k=\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{k} 2^{-k(n-k)/p} < \frac{1}{2}.$$

Másrészt a $p < (\log 2 - \epsilon)n/\log n$ egyenlőtlenséget behelyettesítve az összeg tagjai a következőképpen becsülhetők:

$$k = 1: \quad \binom{n}{1} 2^{-1(n-1)\frac{\log n}{n \log 2 - \epsilon}} \approx 2^{-\frac{\log n}{\log 2 - \epsilon}} = (e^{-\log n})^{1+\epsilon} = \frac{1}{n^{1+\epsilon}}$$

$$k = 2: \quad \binom{n}{2} 2^{-2(n-2)\frac{\log n}{n \log 2 - \epsilon}} \approx (\frac{1}{n^{1+\epsilon}})^2 \binom{n}{2} \approx (\frac{1}{n^{\epsilon}})^2$$

és így tovább

$$k = i : \quad \binom{n}{i} 2^{-i(n-i)\frac{\log n}{n \log 2 - \epsilon}} \approx (\frac{1}{n^{1+\epsilon}})^i \binom{n}{i} \approx (\frac{1}{n^{\epsilon}})^i.$$

Azaz összeg majorálható (aszimptotikusan) a

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{n^{\epsilon}})^k$$

mértani sorral, amelynek első eleme $\frac{1}{n^{\epsilon}} < 1/2$, ha n elég nagy, és ebből következően az összeg is kisebb, mint 1.

$\square$

9.3 Megjegyzés:

A K_n-en definiálható elfogult játékokra vonatkozó egyik legszebb eredmény Beck tétele, melyet bizonyítás nélkül megemlítünk. Az feszítőfa játékhoz hasonlóan definiálhatjuk a *Hamilton játékot*, ebben II célja egy Hamilton kör megszerzése. Meglepő módon (illetve a véletlen heurisztika miatt nem is olyan meglepő), az eredmény: II alig valamivel több él választásának lehetőségével, mint amivel egy feszítőfát szerezhet, egy Hamilton kört is garantálhat. A fő nehézséget az okozza, hogy ebben az esetben a duális hipergráf karakterizációja nem ismert.

Tétel 9.4 (Beck) *A Hamilton jétékban II nyer, ha $p < (\frac{\log 2}{27} - \epsilon)n/\log n$, ahol $\epsilon > 0$ és $n > n_0(\epsilon)$.*

9.4 Kaplansky játék rácson és recirkulált játékok

A súlyfüggvény módszer sok, nagyon fontos elméleti probléma megoldását hozta, lásd Epilógus. Jelen fejezetet lezárásaképp egy ezeknél jóval könnyebb témát választunk, ahol újra megcsodálhatjuk a módszer rendkívüli rugalmasságát.

9.4.1 Vonal játék

Először is definiáljuk egy családját a végtelen négyzetrácson játszott játékoknak. $L_k(p, 1; n)$ jelöli azt a játékot amelyben:
i I P mezőt, II egy mezőt választhat lépésenként.

ii I nyer, ha egy olyan vízszintes, függőleges vagy átlós egyenes mentén megszerez k mezőt, amelyben II egyet sem szerzett meg. Különben II nyer.
iii A játék n lépésen át tart.

9.5 Megjegyzés:

A fenti játékok a k-amőba módosított változatai. Az n lépés utáni megállásra azért van szükség, mert különben bármely k természetes számra nyer I $p \geq 1$ esetén, lásd 9.7 feladat. Kaplansky eredeti kérdésében a sík pontjai és egyenesei szerepelnek.

Tétel 9.5 (Vonal játék) *II nyer az $L_k(p, 1; n)$ játékban, ha $k \geq p \log_2 n + p \log_2 p + 3p$.*

Bizonyítás:

Jelöljük a tábla vízszintes, függőleges vagy átlós egyeneseinek halmazát H-val, az egyes elemeit L-lel. $L_j(I)$ illetve $L_j(II)$ pedig I j-edik lépése után I illetve II L-ben birtokolt mezőinek száma. A súlyfüggvény szokásos formája nem visz előbbre, mert a

$$w_1 = \sum_{L \in H} w_1(L) = \infty,$$

ha $w_1(L) > 0$ $L_1(I) = L_1(II)$ esetén. A megoldás az 5.7 feladat ötletének (pozitív hatványkitevők használata) és annak az elgondolásnak az ötvözése, miszerint $w_j(L)$-nek csak akkor tulajdonítunk pozitív értéket, ha $L_j(I) > 0$. Ezzel elveszítjük a teljes súlyfüggvény monotonitását, cserébe azt kapjuk, hogy a a függvényünk nem nő *túl gyorsan.*

$$w_j(L) = \begin{cases} \lambda^{L_j(I)} & \text{ha } L_j(I) \geq 1 \text{ és } L_j(II) = 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases},$$

ahol $\lambda = 2^{1/p}$. Egy q mező súlya $w_j(q) = \sum_{q \in L} w_j(L)$, a teljes súly pedig $w_j = \sum_{L \in H} w_j(L)$ a j-edik lépésben. II a már jól ismert mohó algoritmust alkalmazza. Így

$$w_j = \sum_{L \in H} w_j(L) = \sum_{L_j(I) \geq 1} w_j(L) \geq \sum_{L_j(I) \geq 1} w_{j+1}(L).$$

Másrészt $w_{j+1} = \sum_{L_j(I)\geq 1} w_{j+1}(L) + \phi_{j+1}$, ahol ϕ_{j+1} azon halmazok súlya, amelyek I $j+1$edik lépése miatt váltak pozitívvá. Ezek száma nyilván legfeljebb $4p$, a súlyuk (egyenkénT) nem lehet több, mint λ^p. Ezzel

$$w_{j+1} \leq w_j + 8p$$

igaz minden j-re, ahol $0 \leq j \leq n-1$, és $w_0 = 0$. Ezért, ha II nem foglalt még el egyetlen mezőt sem L-ből a j-edik lépésig (azaz $L_j(II) = 0$) és $L - J(I) = i$, akkor

$$\lambda^i = w_j(L) \leq w_j \leq 8pj \Longleftrightarrow i \leq p(\log_2 j + \log_2 p + 3).$$

Mivel $0 \leq j \leq n$, a tétel következik az elöző sorból.

□

9.5.1 Recirkulált vonal játék

Ha egy játékot, miként az $L_k(p,1;n)$-et, félbeszakítjuk az n-edik lépésben, újabb játékot kaphatunk a recirkulált folytatásával. Ezen azt értjük, hogy az n-edik lépés után I és II eltörölheti a jelét egy általa korábban elfoglalt mezőről, és bejelölhet egy szabad mezőt cserében.
A következőkben az $RL_k(1,1;n)$-et, az $L_k(1,1;n)$ recirkulált változatát elemezzük. A 9.5 tételhez hasonló eredmény bizonyításánál a nehézség ott jelentkezik, hogy a $w_j \leq 8j$ korlát tetszőlegesen naggyá válhat, hisz j nem korlátos többé. Tovább finomítva a technikát, mégis célhoz érhetünk.

Tétel 9.6 *I nem nyerhet az $RL_k(1,1;n)$ játékben, ha $k \geq 32\log_2 n + 244$.*

Bizonyítás: II n lépésből álló szakaszokra osztja a játékot. Ugyanazt a súlyfüggvényt használja, mint az előbb, de most $\lambda = \sqrt{2}$, és csak minden második jelét (ezeket *aktív jeleknek* hívjuk majd) helyezi a mohó algoritmus szerint. A többi jelet (ezeket *tartaléknak* hívjuk) tetszőlegesen helyezi el. Megtörténhet, hogy II-nek egy tartalékban levő jele éppen azon a q mezőn van, amire egy aktív jelet kellene tennie a stratégiája szerint. Ebben az esetben II az új jelet tetszőleges helyre teszi (*tartalékba küldi*), és a q mezőn levő jelet aktiválja. Ha csak II aktív jeleinek hatását nézzük, a játék az $L_k(2,1;n)$ játékra egyszerűsödik. Azaz minden $L \in H$ halmazra, ha $L_j(I) = i$, és $L_j(II) = 0$ $(0 \leq j \leq n)$, akkor $i \leq 2(\log_2 j + 4)$. A továbbiakban (a többi szakaszban) II egy látszólagos játékot játszik, és jeleinek állapotát (aktív vagy tartalék) szigorúan tartja. Először tetszőlegesen beszámozzuk I jeleit 1-től n-ig. Egy szakasz kezdetén II nem látja I jeleit, és a j-edik lépésben I új lépése és a j-vel indexezett jel válik láthatóvá számára. (Ha I elmozdította már a j-edik jelet, akkor csak

egy jel válik láthatóvá.) II minden második lépésben fog válaszolni, a tartalékban levő jeleit használva. (II nem lép a páratlan lépésekben. Ha egy jel felvétele és ugyanarra a mezőre történő visszahelyezése engedélyezett, akkor ez könnyen megvalósítható. Ha nem, akkor II kiválaszt egy jelet a kezdet kezdetén, ami se nem aktív vagy tartalék, és ezt a jelet mozgatja tetszőlegesen a páratlan lépésekben.)
Mikor a mohó algoritmust próbálja követni II, egy újabb probléma jelentkezhet. Nevezetesen az, hogy II nem foglalhat el egy maximális súlyú q mezőt, mert az már foglalt. (Lehet rajta I egy láthatatlan jele, vagy éppen II egyik saját jele a tartalékból.) Ebben az esetben, a következő 8 lépésen keresztül, II jeleket tesz mind a négy, q-n áthaladó egyenesre. Ha most csak I látható jeleit tekintjük, egy $L \in H$ halmazra $L_j(I) = i$ és $L_j(II) = 0$ esetén $i \leq 16(\log_2 i + 7)$, mivel a játék nem rosszabb II számára, mint az $L_k(16, 1, n)$ játék. A szakasz végére I összes jele látható lesz, és ha egy $L \in H$ több, mint $16(\log_2 n + 7)$ darabot tartalmaz belőlük, akkor L-ben lennie kell II egy tartalékban lévő jelének is. Végül II egy új szakasz kezdetén átnevezi a jeleit, az aktívakat tartalékba küldi, a tartalékot aktiválja. Mivel az aktív jelek kontrollálják I láthatatlan jeleit az éppen játszott szakaszban, egy $L \in H$ halmazban, melyben II-nek nincs sem aktív, sem tartalék jele, I látható és láthatatlan jeleinek száma nem nagyobb, mint $32(\log_2 n + 7)$.

$\square$

9.6 Feladatok

9.1 (48-amőba) *Súlyfüggvényen alapuló stratégiát használva lássuk be, hogy a 48-amőba döntetlen.*

9.2 (Elfogult amőba) *Ha II kettő míg II egy jelet tehet lépésenként a k-amőbában, akkor I nyer minden k számra.*

9.3 (Harary probléma) *Választunk a végtelen négyzetrácson egy P polimínót, azaz egy véges összefüggő halmazát néhány négyzetnek. $P(1,1)$ az a hipergráf játék, ahol I nyer, ha megszerez egy P-vel egybevágó P^* polimínót a végtelen négyzetrácson, úgy, hogy mindkét fél egy-egy mezőt szállhat meg lépésenként. Lássuk be, ha P egy 5×1-es téglalap, vagy egy 2×2-es négyzet, akkor I nem nyerhet.*

9.4 (Háromszög játék) *Az n pontú teljes gráf, K_n éleiből I egy, míg II $c\sqrt{n}$ élt választ egy lépésben. I nyer, ha megszerez egy háromszöget, II akkor, ha megakadályozza ezt. Mutassuk meg,*

i ha $c \leq 1/100$, *akkor I nyer,*
ii ha $c \geq 100$, *akkor II nyer.*

9.5 (Reciklizált amőba) *Hagyjuk abba n lépés után a k-amőbát, és játszuk a reciklizált változatát, az Rk-amőbát. Mutassuk meg, hogy II elérheti a döntetlent, ha* $k \geq 9$.

9.6 (Felgyorsított Amőba 1.) *A k-amőbát játszuk oly módon, hogy mindkét játékos n jelet tesz lépésenként, ez a* $A_k(n, n)$ *játék. Lássuk be, hogy* $k \geq 3(n+3)$ *esetén a játék döntetlen.*

9.7 (Vonal játék) *Lássuk be, hogy I nyeri az* $L_k(1, 1; n)$ *játékot, ha*

$$k \leq \frac{\log_2 n}{\log_2 \log_2 n}.$$

9.8 (Felgyorsított Amőba 2.) *Lássuk be, hogy I nyeri az* $A_k(n, n)$ *játékot, ha*

$$k \leq n + \frac{\log_2 n}{\log_2 \log_2 n}.$$

9.9 (A 7.1 tétel elfogult formája) *I nyer a* $(X, H, 1, q)$ *hipergráf játék Építő-Romboló változatában, ha*

$$\sum_{A \in H} (1+q)^{-|A|} > q^2 (1+q)^{-3} d_2(H)|X|,$$

ahol

$$d_2(H) = \max\{|H_{x,y}| : H_{x,y} \subset H, A \in H_{x,y} \Longrightarrow x, y \in A\}.$$

9.10 (Tournamentek 2.) *I és II a 4.6 feladatban ismertetett játékot egy tetszőleges* T_n *tournamenttel játszák. Azaz I nyer, ha a* K_N*-ben megszerzi* T_n *egy példányát a megfelelő (nem szükségképpen tranzitív) irányítással. Mutassuk meg, ha N elegendően nagy, akkor I nyer a játék Építő-Romboló változatában.*

Fejezet 10

Epilógus

"Hszüan-cang bánkodni kezdett ezen a veszteségen, hogy miért nem vigyáztak jobban, de Szun Vu-kung megvigasztalta:
- Lásd - mondta neki -, nem teljes ám az ég, a föld se, s hogy a szent könyvek megcsonkultak, az csak azt jelenti, hogy egyeznek már ennek a nemteljességnek nagy titkával, emberi erő ezen nem segíthet!"

Vu Cseng-en, Nyugati utazás, Csongor Barna fordítása

A végére értünk a könyvnek, de nem a kombinatorikus játékok elméletének, lévén több eredmény maradt ki, mint került be a válogatásba. A. Fraenkel a közelmúltban egy több mint 600 publikációt tartalmazó hivatkozási listát állított össze és tett hozzáférhetővé az *ftp.wishdom.weizmann.ac.il* ftp-címen, a *pub/fraenkel/games1.tex* nevű állományában. Ezekben a matematika legkülönbözőbb eszközeinek (algebrai és topológi módszerek, lánctörtek, komplexitás elmélet stb) bevonásával folytattak vizsgálatokat. Az általunk alkalmazott megközelítés főként az igazán kombinatorikainak tekinthető párosításokra és a súlyfüggvényekre koncentrál. Ez az elfogultság lesz érezhető az utolsó fejezeten is. Az egyetlen újdonság az eddigiekhez képest, hogy nem megyünk bele a felsorolandó tételek bizonyításába. Mind a technikai nehézségek, mind a terjedelem korlátai útját állják ennek; ugyanakkor az elmélet koherenciája igényli a beépítésüket. Az elvarratlan szálak egy része eltűnik ezáltal, s talán világosabb kép alakul ki az Olvasóban arról, hogy mi és miért történik a matematikának ezen területén.
Korábban láthattuk, hogy a hipergráfok 2-színezhetősége és a rajtuk definiált játékok kimenetele szoros kapcsolatban áll egymással. A sokat elemzett Erdős-Selfridge tételből tudjuk, hogy egy (X, H), n-uniform hipergráfon játszott játék döntetlen, és következésképpen $\chi(H) \leq 2$, ha az élek száma

kisebb, mint 2^{n-1}. Egy nagyon szellemes, véletlent használó újraszínezési eljárással belátható, hogy egy n-uniform hipergráf 2-színezhetö jóval több él esetén is.

Tétel 10.1 (Beck 1978) *Egy n-uniform (X,H) hipergráfra $\chi(H) \leq 2$, ha $|H| \leq c2^n n^{1/3}$, ahol $c > 0$ rögzített konstans.*

Érdekes módon a másik irányból is a véletlen színezések segítségével kapható korlát.

Tétel 10.2 (Erdős 1964) *Van olyan n-uniform (X,H) hipergráf, melyre $\chi(H) > 2$, és $|H| < c2^n n^2$.*

Mi több, a $|H| < 4^n n^4$ változtatással az előző tételben az is feltehető hogy az (X,H) hipergráf *majdnem diszjunkt*, azaz bármely $A, B \in H$ és $A \neq B$-re $|A \cap B| \leq 1$. Visszakanyarodva a játékokra, a majdnem diszjunkt tulajdonság egy (X,H) játékban segítheti a védekezőt.

Tétel 10.3 (Beck) *Van olyan $c > 0$ konstans, hogy egy tetszőleges n-uniform (X,H) hipergráf játék döntetlen, ha (X,H) majdnem diszjunkt és*

$$H < 4^{n-c\sqrt{n}}.$$

Megjegyezzük, hogy ez a korlát nagyságrendjében közel van az előző megállapítás szerint elérhető maximumhoz. A 10.3 tétel bizonyításához kifejlesztett módszer a következő tétel is elérhetővé tette.

Tétel 10.4 (Beck) *Legyen (X,H) egy n-uniform, majdnem diszjunkt hipergráf. Tegyük fel, hogy minden $x \in X$ pont legfeljebb $2^{n-c\sqrt{n}}$ H-beli halmaznak eleme, és $H < 2^{n^{3/2}}$. Ekkor az (X,H) hipergráf játék döntetlen.*

Ez az állítás szerkezetében analóg a 6.10 feladat állításával, s tulajdonképpen a Lovász Local Lemma egy alkalmazásának derandomizáltja. Szerves része annak a programnak, amely a valószínűségszámítási módszer különböző formáit próbálja determinisztikus algoritmusokkal helyettesíteni. A 10.4 tételbe való behelyettesítéssel kapható a legerősebb eredmény a $HJ(d,n)$ játékra. A 4.1 feladat g pontja alapján egy $x \in X$ legfeljebb $(3^d-1)/2$ nyerőhalmaznak eleme, így a 10.4 tétel alkalmazható, ha

$$\frac{3^d-1}{2} \leq 2^{n-c\sqrt{n}} \text{ és } \frac{(n+2)^d - n^d}{2} < 2^{n^{3/2}}.$$

Könnyen ellenőrizhető hogy megfelelő $n > n_0(\epsilon)$ esetén az

$$n > (\frac{\log 3}{\log 2} + \epsilon)d$$

egyenlőtlenségből következnek az előző feltételek.
Az igazi probléma a 10.4 tétellel a 6.10 feladattal szemben a $H < 2^{n^{3/2}}$ feltétel, azaz a hipergráfnak végesnek kell lennie, ami a 2-színezhetőség feltételei közül elhagyható. (Ott a 4.2 feladat f pontjában alkalmazotthoz hasonló *kompaktsági* megfontolás segít.) Végtelen (X, H) hipergráf játékokra csak rendkívül speciális esetekben (pl k-amőba, illetve ennek néhány általánosítása) ismertek döntetlenre vezető stratégiák. Az érdekesség kedvéért megemlítjük, hogy még az *általánosított Harary játékra* sem ismert megoldás. Ez a játék egy olyan hipergráf játék, amelyben X a végtelen, 2-dimenziós sakktábla, míg $H = \{A + z : z \in Z^2\}$, ahol A egy rögzített halmaza a mezőknek. Az alábbi egy nem túl nehéz részleges eredmény, ahol $diam(A)$ az A halmaz átmérője.

Tétel 10.5 *Az általánosított Harary játék döntetlen, ha*

$$c \log diam(A) \leq |A|,$$

ahol c egy rögzített konstans.

Megoldott viszont egy másik fontos probléma, miszerint a Lovász Local Lemma által garantált 2-színezés megtalálható a hipergráf méretében polinomiális időben. Ennek pontos kimondásával búcsúzunk az Olvasótol.

Tétel 10.6 (Beck) *Legyen (X, H) egy n-uniform hipergráf, ahol X véges, $|H| = N$, és tegyük fel, hogy minden $A \in H$ halmaznak legfeljebb $2^{\alpha n}$ H-beli elemmel vett metszete nemüres, ahol $\alpha = 1/48$ és $n \geq 2$. Létezik ekkor egy determinisztikus algoritmus, amely a (X, H) hipergráf egy jó 2-színezését adja N^c futási idő alatt, ahol c egy univerzális konstans.*