

Döntési rendszerek

Pluhár András

Tartalomjegyzék

Előszó	ix
1. Bevezetés	1
1.1. Racionalitás	1
1.2. Matematikai modellek, indukció	2
1.2.1. Modellek	3
1.2.2. Számok és utilitás függvények	5
1.2.3. Néhány utilitás függvény	5
1.2.4. A hasznossági függvények kvalitatív viselkedése	6
1.2.5. Determinisztikus vs véletlen, optimalizálás vs verseny	6
1.3. Gyakorlat	8
1.3.1. Irracionalitás	8
1.3.2. Érvelési hibák	8
1.3.3. Pszichikai csapdák	8
1.3.4. A haszonelvűség	8
1.3.5. Minden szöveges feladat hibás	8
1.4. Szegmentáció	10
2. Alea iacta est	13
2.1. Érmedobás	13
2.1.1. Két érmedobás	14
2.2. Az osztzkodás egy problémája	14
3. Sztochasztikus programozás 1.	17
3.0.1. Gátmagasítás	18
3.0.2. Biztosítások és a kockázatkerülés	19
3.0.3. Az újságárus probléma	19
3.1. Gyakorlat	21
3.1.1. Monty Hall paradoxon	21
3.1.2. Biztosítási paradoxon	22
3.1.3. Boríték paradoxon	23
4. Sztochasztikus programozás 2.	25
4.1. Hálózati megbízhatóság	25
4.2. Független alkatrészek megbízhatósága	26
4.3. A portfólió probléma	26
4.3.1. Markowitz modell	27
4.3.2. A Konno-Yamazaki-féle MAD modell	27
4.4. Gyakorlat	29
4.4.1. Újságárus	29
4.4.2. Hálózati megbízhatóság	29
4.4.3. Független alkatrészek megbízhatósága	30

5. Mátrixjátékok	33
5.1. Morra játék	33
5.2. Minimax tétel	34
5.3. Módosított Morra	36
5.4. Gyakorlat	37
5.4.1. $2 \times n$ -es és $m \times 2$ -es mátrixok	37
6. Matrixjátékok 2	39
6.1. Kuhn féle módosított póker	39
6.2. Egyszerűsítési lehetőségek	41
6.2.1. Dominancia	41
6.2.2. Nyeregpont	42
6.3. Gyakorlat	43
7. Nem zérus összegű játékok	45
7.1. Fogolydilemma	45
7.2. Galamb-Héja	47
7.3. Gyakorlat	47
7.3.1. $2 \times n$ -es és $m \times 2$ -es bimátrixok	47
7.3.2. Cournot-duopólium	48
8. Kooperatív játékok	51
8.1. Elosztások	52
8.2. A mag és kiszámítása	53
8.3. Stabil megoldások	54
8.4. A Shapley érték	55
8.5. A Shapley tétel következményei	56
8.6. Gyakorlat	58
8.6.1. Szemét játék	58
8.6.2. Ausztrál törvényhozás	59
8.6.3. Bizottságok	59
9. Stabil Párosítások	61
9.1. Stabil házasság	61
9.2. A stabil párosítások szerkezete	64
9.3. A stabil párosítás mint mag	65
9.4. Gyakorlat	65
10. Csoportok döntéshozatala	67
10.1. Profilok és konszenzus függvények	67
10.2. Arrow tétel	68
10.3. Igazságos osztozkodások	69
10.4. Gyakorlat	69
11. Függelék	71
11.1. Lineáris programozás	71
11.1.1. A diéta probléma	71
11.1.2. Dualitás	72
11.1.3. A duális változók gazdasági értelmezése	76
11.2. Befektetések	78
11.2.1. A Markowitz modell tanulságai	78
11.2.2. Chartisták vs fundamentalisták	79
11.2.3. Független hozamok	79
11.2.4. Szórás becslés	80

11.2.5. Függés a befektetőtől	81
11.3. Nash tételei	82
11.3.1. A Nash egyensúly létezése véges játékokban	82
11.3.2. Nash-alkumegoldás (NBS)	83

Előszó

A könyv a Szegedi Tudományegyetemen előadott hasonló című kurzuson alapul illetve annak segédanyagának szántuk. A *Döntési rendszerek* BSc kurzus, mely jelen tanterv szerint a Közgazdász informatikus szakon kötelező, más szakok számára választható informatika kurzus.

Az elhangzott tananyagban kitérünk a diszkrét matematika, gráfelmélet, operációkutatás, sztochasztika stb néhány fogalmára, eredményére, amikkel a hallgatók többnyire a további tanulmányaikban találkozhatnak majd. Ezzel segíteni akarjuk ezen tanulmányokat illetve az elvont fogalmak példákkal szemléltetése, mélyebb megértése a cél. A könyvben és a hozzá társuló gyakorlati anyagban ezért jóval bővebben fejtjük ki a témát, mint az tanórán elhangzik. Természetesen a tananyag számonkérésénél figyelembe kell venni ezt a sajátosságot és megmaradni a jól begyakorolt problémáknál.

A kurzus másik fő célja a modellalkotás során felmerülő problémák vizsgálata, általában a kritikus, elemző gondolkodás gyakorlása. Ez azért is szükséges, mert az oktatás feszített tempójában ez megközelítés többnyire sajnos elsikkad. Egy, a reményeink szerint inspiráló, jegyzet hasznos lehet segédanyagként illetve megkönnyítheti a levelező és távoktatást egyaránt.

Nagyon sok embernek illene köszönetet mondanom, akitől tanulhattam, együtt dolgoztam. Ők ezáltal részévé váltak a gondolataimnak és így ennek a jegyzetnek is. Talán nem sértődnek meg, ha csak egy, sajnos már eltávozott tanárom, kollégám nevezem meg. Imreh Balázstól sokat tanultam és rengeteg támogatást kaptam az évek során, amire örök hálával gondolok. Annak idején ennek a kurzusnak a létrehozásával is ő bízott meg, kétszeresen indokolt hát megemlékezni róla.

1. fejezet

Bevezetés

Az életünk, munkánk során állandóan döntések meghozatalára van lehetőségünk vagy éppen rákényszerülünk erre. A tárgy és a jegyzet célja, hogy megvizsgálja a közben felmerülő problémák, megközelítések és megoldások egy részét és segítsen a megalapozottabb döntések meghozatalában.

A döntésekkel számos tudomány foglalkozik, a teljesség igénye nélkül ilyen a mikroökonómia, a statisztika, a lineáris és nem a lineáris valamint a sztochasztikus programozás, a játékelmélet, a több tényezős döntés támogatás és a pszichológia.

A döntési helyzet alapján valami konfliktussal, bizonytalansággal jár, különben nem is okozna gondot. A bizonytalanságnak sokféle oka lehet. Nem mindig tudjuk a pontos adatokat, az egyes alternatívák kimenetelét, az értékét, nem vagyunk tisztában az esetleges vetélytársak lépéseivel, vagy akár a létükkel sem.

1.1. Racionalitás

A döntéseinket sokszor tudatosan, még többször ösztönösen hozzuk meg. Akár hogyan is, meg kell indokolnunk¹ másoknak esetleg magunknak, miért így vagy úgy döntöttünk. Az észérvekre, azaz a racionalitásra való hivatkozás igen régi. Arisztotelész a formális logika megalkotásától azt várta, hogy a polisz lakói a felmerülő vitás kérdéseket ezzel egyszerűen eldönthetik majd. Ez persze csak egy része a történetnek, hiszen nem mindegy milyen tényekből indulunk ki, illetve a formális rendszerek korlátai ismertek, lásd Gödel tétel.

Teljes általánosságban tehát annyit mondhatunk, a racionalitás *szociális fogalom*, ami egy közösség, kor és kultúra közös tulajdona. Mondhatunk rá szinonímákat mint *elmagyarázhatóság*, *hihetőség*, *meggyőző erő* stb azaz egy *nyelv*, amely elfogadott a használói között.

1.1. Példa (Ferde hajítás). *Szögezzük le, egy érvelés, ha mégoly abszurd is, elfogadható lehet, sőt, az eredménye akár helyes. Vegyük például Nicolò Tartaglia, a harmadfokú egyenlet megoldóképletének megalkotójának az ötletét.² Ha a lehető legmesszebbre akarunk lőni egy ágyúval, akkor 45°-os szögbe kell állítani a csövet. Hisz mind nulla, mind 90° esetén nulla a lőtáv, tehát a maximum a középső állásban van.*

Mi több, egy jelzés lehet hatásos, így racionális mondható, még ha kifejezetten hamis is.

1.2. Példa (Hazugság). *Mikor egy madár élelmet talál, hívhatja a társait (tipikusan a rokonait), hogy azt megossza velük. Más helyzetekben, pl. nem közeli rokononok vagy éppen más fajok jelenléte esetén, a madár vészjelzést ad le, amivel elkerüli a táplálék elvesztését.*

¹ Az *indító ok* kifejezés maga arra utal, hogy valami jól ismert, elfogadott tényre akarjuk visszavezetni a döntést.

² Régebben a Monty Python: Holy Grail "boszorkánymérlegelő" jelenetére utaltam itt, de kiderült, ezt manapság már kevesen ismerik.

Sok érdekességet rejtene a *természetes nyelvek*, amelyek az információközlésen túl számokat, logikai fogalmakat tartalmaznak és jogi, filozófiai stb. érveléseket is lehetővé tesznek a mai napig. Nagy állami feladatok megszervezéséhez (adószedés, költségvetés, építkezések, katonai logisztika) geometriára, az egész számok általánosítására, algoritmusokra stb volt szükség. Az ókori kultúrák megtették ebben az első lépéseket és azóta is ezt a munkát folytatjuk. A matematika alkalmazásai átformálták a világot, így érthető, hogy nagyon sokszor vissza is élnek a nyelvezetével.³

1.2. Matematikai modellek, indukció

Felmerül a kérdés, miért ilyen hatékony a matematika a világ jelenségeinek értelmezésében? Ennek ismeretelméleti hátterét elemzi Wigner Jenő híres előadásában lásd [14]. A végkövetkeztetés röviden: ez egy csoda. Egy kicsivel hosszabban, úgy tűnik a világunk valamelyest homogén, a megfigyelt jelenségek ismétlődhetnek, és önmagukban vizsgálhatók. Ha ezt elfogadjuk, akkor megpróbálhatjuk a jelenségek kapcsolatait feltárni és kezelhető nyilvántartást vezetni róluk; ez maga a matematika.

Ha az Olvasó túl absztraktnak érzi a fentieket, akkor igaza van, csak példákon keresztül válhat ez hihetővé.

1.3. Példa (Tárgyak állandósága). *A babákat egy ideig be lehet csapni az őket foglalkoztató tárgyak látótérből eltüntetésével, aztán megtanulják, hogy amit nem látunk, az attól létezik. Innen egy lépés a számosság érzékelése, annak invarianciája. Azaz ha pár kavics van a kezünkben, annak száma látható ok nélkül nem fog változni. Ha a másikon is volt és összeöntjük, akkor az összeadás fogalmához jutunk.*

1.4. Példa (Ciklikus jelenségek). *A nappalok és éjszakák váltakozása ősi, nagyon sok fajban biokémia szinten beágyazott tudás, az ún. cirkadián ritmus. De megfigyelhető a hónapok (a Hold ciklusai), az évszakok, év ciklusára adott ösztönös, az emberek esetében a tudatos nyilvántartás és felkészülés. Különös véletlen folytán kapcsolat van a néhány fontos érték között (jó közelítéssel egy év 12 hónap, ill. a Nap és a Hold látszólagos átmérője egyforma) és ez nagy hatással volt a gondolkodásra.⁴*

1.5. Példa (A tér és az anyag kapcsolata). *A szilárd tárgyak mozgatása, forgatása nem változtatja meg azokat. Tehát a tér maga üresnek, ugyanakkor homogénnek tűnik, amit kirakhatunk téglákkal⁵ és szemléletes képünk lesz a 3-dimenziós térről. A gravitáció kissé összezavarja ezt, a felfele irány kitüntetett és nem is olyan egyszerű mozogni benne. A síkot viszont gondosan tanulmányozták Egyiptomban és Babilónban, a görögök pedig a geometria segítségével rendszerezni tudták az eredményeket.*

Van tehát remény arra, hogy a tapasztalataink, azaz a múlt, jelentéssel bírnak a jövőre nézve.⁶ Ezt a kapcsolatot az *indukció* által teremtik. Vegyük észre, hogy az indukció *nem* része a formális logikának, és a használata egyáltalán nem egyszerű.

1.6. Példa (Rare avis). *Arisztotelészt szállóigét⁷ ihletett példája eredetileg a hattyúkról szólt. Sok-sok hattyút megfigyelve mind fehérnek bizonyult, melyből adódik a következtetés: Minden hattyú fehér. Ez egészen az Ausztráliában felfedezett fekete hattyú faj felfedezéséig igaznak is tűnt. Az utóbbi sem kerülte el az iskolapéldává válást, Nassim Taleb híres könyvének lásd [13] címe lett, illetve átvitt értelemben a ritka, de óriási hatású eseményeknek.⁸*

³"Imitation is the sincerest form of flattery that mediocrity can pay to greatness." Oscar Wilde

⁴Az égen és a földön zajló nagy léptékű jelenségek kapcsolata komoly tudomány lett, és csak az alapok tisztázása után vált szét a csillagászat és az asztrológia.

⁵Minden ókori kultúra használt téglát.

⁶A jövő előrejelzése mindenféle tudomány és áltudomány Szent Grálja.

⁷Ritka, mint a fehér holló.

⁸A fekete hattyúval az a gond, hogy az indukcióra épülő tudományunk nehezen birkózik meg vele, hisz amíg nem következik be, addig nem tudunk róla, ha meg bekövetkezett, akkor már esetleg késő.

Az alábbi példákban változatos okok miatt szintén nem egyszerű az indukció használata, lásd bővebben Simonyi Károly kitűnő könyvében [11].

1.7. Példa (Egyedi vs általános, Poincaré). *Egy történész számára tökéletes példa a tudásra a Magna Carta aláírása. Tudjuk, ki tette, mikor, hol és nagyjából azt is, hogy miért. Egy természettudós szempontjából egy ilyen típusú állítás csak anekdotikus értékű, hisz nincs megismételhetősége, Földnélküli János soha nem ír már alá semmilyen dokumentumot.*

Az Olvasó joggal vélheti, a fenti probléma egyik oka, hogy nem elemi esemény, hanem egy jórészt modellezhetetlen rendszer (t.i. a történelem) egy bonyolult összetett eseményét figyeltük meg. Ennél egyszerűbb esetekben is kaphatunk nyugtalanító következményeket.

1.8. Példa (Hollóparadoxon). *Tegyük fel, hogy a minden holló fekete állítást szeretnénk indukcióval megerősíteni. Az intuíciónk szerint helyesen járunk el, ha megtekintünk jó sok hollót és ha mindet feketének találjuk, akkor nő a bizalmunk az állításban. Másrészt az elemi logika szerint a minden holló fekete állítással ekvivalens a minden nem fekete az nem holló. Tehát ha lapozgatunk egy könyvet, aminek a lapjai egyrészt nem feketék, másrészt nem is hollók, akkor a fentiek szerint nagy lépést tettünk az indukció esetszámában, ami a józan eszünk szerint azért kétes.*

Az időt tartalmazó definíciók szintén könnyen bajt okozhatnak.

1.9. Példa (Goodman paradoxon). *Tegyük fel, hogy egy tárgy színe zörös, ha a jelen pillanatig zöldnek, vagy a jövőben vörösnek találjuk. Az eddigi tapasztalataink alapján tehát kijelenthető, hogy a smaragd⁹ színe zörös. Azaz a definíciónkból az következik, hogy a jövőben talált smaragdok vörösek lesznek.*

Annyit mindenesetre leszűrhetünk a fenti példákból, hogy a világ törvényeit nem könnyű megismerni. Ha sikerül, általában a matematika nyelvén próbáljuk leírni a felismerést. Bár az ismeretterjesztő könyvek arany szabálya szerint minden formula felezi a lehetséges olvasók számát, nagyon nehéz a Kepler törvényekről vagy a kamatos kamatról értekezni ellipszisek, formulák vagy exponenciális függvény nélkül.¹⁰

1.2.1. Modellek

A fenti példák is utalnak rá, a problémák modellezése sok buktatót rejt. Recept nincs erre, csak az eddigi tapasztalatból meríthetünk és bármikor szükség lehet teljesen új gondolatokra. A modellek jóslatait össze kell vetnünk a megfigyelésekkel, az alkalmazásukat pedig a rendelkezésre álló erőforrásokkal, adatokkal. Példák:

1.10. Példa (Newton 4. törvénye). *Az erőkről sokat tudtak már az ókorban. Az egyenlő karú mérlegek, a felhajtóerő vagy a lejtők, csigák alapján világos volt, hogy két egyforma nagyságú, ellentétes irányú erő hatása mellett nyugalomban marad egy test, amit formálisan az $x - x = 0$ fejezhet ki. Egyáltalán nem nyilvánvaló, mi történik, ha több vagy nem is egyvonalba eső erő hat egy testre illetve milyen matematikai eszközzel kellene ezt leírni. Két erő esetén Newton egy pontba tolta őket és a belőlük szerkesztett paralelogramma kezdőpontból induló átlójával írta le az összehatást. Általában azt mondhatjuk, az erők nem számok, hanem vektorok, és az együttes hatásuk a vektoriális összeadás szerint számolandó.¹¹ Matematikai fogalomként viszont csak jóval később definiálták a vektorokat, lásd [2].*

⁹ A smaragd a berillium-alumínium-szilikát, $\text{Be}_3\text{Al}_2(\text{SiO}_3)_6$ hexagonális kristálya, aminek a színe zöld.

¹⁰ A matematika érthetőbbé válásának kis, de annál fontos lépései voltak a Viète által bevezetett jelölések.

¹¹ A relativitáselméletben nem elég 3 dimenziós teret használni, illetve a kvantumfizikában a kölcsönhatások nem ilyen módon összegződnek.

1.11. Példa (A kiszámítás lehetősége). Itt többféle nehézséget tapasztalhatunk. (1) A matematikai számítás maga is modellezhető, ún. univerzális Turing géppel. Ez nagyjából egy normál számítógép, amely tetszőlegesen nagy tárhelykapacitással rendelkezik. Jó lenne olyan programot írni, amely eldönti, hogy egy adott program megáll-e vagy fut az idők végéig? Ez sajnos bizonyítottan lehetetlen. (2) Legyen az $n \in \mathbb{N}$ két ismeretlen prím szorzata, azaz $n = pq$. Ekkor egyszerű algoritmussal megkapható p és q : ki kell próbálni a lehetséges osztókat 2 és $\sqrt{n}$ között. Az algoritmus tehát egyszerű, de nem gyors. Mivel sokkal jobb algoritmust nem ismernek, az RSA titkosítás egyelőre jó ötletnek tűnik. (3) Az is előfordul, hogy egy megoldhatatlannak ítélt modell hirtelen hasznossá válik. A lineáris programozásra vezető modelleket sokáig reménytelennek tartották, majd a simplex algoritmus és az elektronikus számítógépek megjelenése hirtelen megváltoztatta ezt a helyzetet. (4) A modellek stabilitása is lényeges szempont. A kerekítési hibák miatt egy mátrix invertálása is komoly gondot okozhat.

1.12. Példa (Az adatok megléte, minősége). Egy modell hiába pontos és jól kezelhető, ha hiányoznak a kellő adatok. (1) A járványterjedésekre számos jó modell létezik, de nehéz feltérképezni pontosan ki kinek és milyen eséllyel adhatja át a fertőzést.¹² (2) A mért adatok mindig közelítések. Az időjárást modellező differenciál egyenletek bizonyítottan érzékenyen a kezdeti feltételekre, így csak korlátozott ideig adnak jó előrejelzést. (3) Az adatok elavulhatnak, egy nagyobb populáció iskolai végzettségére vonatkozó néhány évig, a tőzsdei árfolyamok esetleg századmásodpercekig használhatóak az alkalmazástól függően.

Egy lehetséges módszer a modellezés folyamatára a következő lépéssorozat.

1. A valóság fogalmainak azonosítása, a köztük fennálló viszonyok feltárása, a számunkra érdekes problémák felvetése.
2. Matematikai modell illesztése, azaz egy fordítás, ahol a valóság fogalmainak matematikai fogalmakat feleltetünk meg. Ezzel a problémák is matematikai formát öltenek.
3. Keressünk megoldásokat a matematika nyelvén kódolt problémákra, alkossunk új fogalmakat, elméleteket, algoritmusokat szükség szerint.
4. Fordítsuk vissza a matematikai állításainkat a valóság nyelvére, vizsgáljuk meg mennyire jók, elfogadhatóak, kivitelezhetőek stb. ezek. Amennyiben elégedetlenek vagyunk, a tapasztalatokat építjük be, és kezdjük előről.

Nagyon sok jó és még több rossz modellel találkozhatunk az irodalomban; mi most csak illusztráljuk a fenti folyamatot egy fiktív példán. (1) Tegyük fel, hogy egy lakás piaci értékét szeretnénk megbecsülni. Sejtjük, hogy ez nagyban függ a lakás területétől, elhelyezkedésétől és a korától. (2) Fejezzük ki ezeket a fogalmakat, legyen $A(\ell)$ az ℓ lakás területe m^2 -ben, $c(\ell)$ az elhelyezkedéstől függő szorzó (m^2 ár), $t(\ell)$ a lakás kora és $V(\ell)$ a becslült érték. Első megközelítésünk szerint a területtől lineáris az érték függése, a korról pedig exponenciálisan csökken. Ezek alapján a

$$V(\ell) = c(\ell)A(\ell)e^{-\alpha t(\ell)}$$

formula tűnik ésszerűnek, ahol a c és a $\alpha > 0$ konstans értéket az adataink alapján kell becsülni. (3) A c és az α konstansok becslése például regressziós eljárásokkal (legkisebb négyzet, L_1 norma stb) történhet egy *tanuló adathalmaz* figyelembe vételével. A tanulás minőségét egy *teszthalmaz* segítségével ellenőrizzük. (4) A kapott formulát összevetjük a valós árakkal, ill. egyéb tapasztalatokkal. Valószínűleg az alábbi problémákat észleljük: (i) az ár nem lineáris, bizonyos méretű lakásokra nagy a kereslet, ott nagyobb m^2 ár a reális (ii) a c függvény nem csak a földrajzi elhelyezkedéstől függ, hanem például a tájolás, a zaj, a parkolási lehetőségek, a hasznosítás egyéb lehetősége (ha a telek az igazi érték) is szerepet játszik (iii) az avulás jellemzésére használt α sem szükségképpen konstans, függ az építési technológiától, a lakás használatától, karbantartásától. Ha túl nagy az eltérés a becslés és a valóság között, vissza kell térni az (1) pontra.

¹²Manapság ennek nem annyira technikai, mint jogi akadályai vannak.

1.2.2. Számok és utilitás függvények

A modellek egyik legfontosabb eleme a számok használata. A tapasztalás szintjei szerint először természetes számokat (jele: $\mathbb{N}$), egészeket ($\mathbb{Z}$), és racionálisakat ($\mathbb{Q}$), a geometria nyomán valósakat ($\mathbb{R}$) illetve algebrai megfontolások miatt komplexeket ($\mathbb{C}$). Ne feledjük, egy fogalomhoz akkor társítható szám, ha egy *mérés* eredményeképpen kapjuk, lásd [3].

Az Olvasó joggal mondhatja, a tapasztalataink vagy gondolataink nagy részének semmi köze sincs a számokhoz. Ha látunk egy fát, nem tudjuk, miért tetszik. Az értékelésünk szubjektív, egy biológus esetleg a levélfelület nagyságát vagy a fán élő rovarokat számszerűsítene, egy befektető pedig a kinyerhető faanyagot.

Sokkal gyakoribb, hogy egy-egy dolgot *egészében* kell megítélnünk, mert például két alternatíva közül kell választanunk. (Két kabát közül melyiket vegyem meg?) Régi és sokszor figyelmen kívül hagyott tapasztalat szerint az emberek sokkal könnyebben *rangsorolnak* alternatívákat, mint hogy értéket jelző számokat rendeljenek hozzájuk. Ugyanakkor ha a rangsorolás sikeres, akkor az utóbbi is megtehető, igaz nem egyértelműen.

Legyen az $(X, \preceq)$ egy részbenrendezett halmaz. Azaz a $\preceq$ egy kétváltozós reláció (X párjainak egy részhalmaza) úgy, hogy (1) $x \preceq x$ (2) ha $x \preceq y$ és $y \preceq z$, akkor $x \preceq z$ minden $x, y, z \in X$ esetén. Tegyük fel, hogy X legfeljebb kontinuum számosságú (a gyakorlatban sokszor véges).

1.1. Tétel (Neumann-Morgenstern). *Minden $(X, \preceq)$ esetén van olyan f függvény X -ből $\mathbb{R}^+$ -ba úgy, hogy ha $x \preceq y$, akkor $f(x) \leq f(y)$. Ha az $(X, \preceq)$ rendezés, az $x \preceq y$ pontosan akkor teljesül, ha $f(x) \leq f(y)$.*

Definíció. A 1.1 tételben szereplő, a fenti tulajdonsággal rendelkező függvényeket *utilitás* vagy *hasznossági* függvényeknek hívjuk.

1.2.3. Néhány utilitás függvény

Vegyük észre, ha f megfelelő hasznossági függvény az $(X, \preceq)$ részbenrendezésre, akkor a $g = h(f)$ is az, ha h tetszőleges monoton függvény. Felmerül a kérdés, egy gyakorlati problémában hogyan juthatunk el utilitás függvényhez, illetve milyen haszna van, ha ekkora szabadsági fok jellemzi?

1.13. Példa (Súlyozott átlag). *Legyen $(X, \preceq)$ egy rendezés, melynek elemei $x^1 \preceq x^2 \preceq \dots \preceq x^\ell$. Tegyük fel, hogy egy $x \in X$ elem a $z(x)_1, \dots, z(x)_k \in [0, 1]$ számokkal jellemezhető. Keressük az f függvényt lineáris alakban, azaz $f(x) = \sum_{i=1}^k w_i z(x)_i$, ahol $w_1, \dots, w_k \in \mathbb{R}$. (Az x elem jelenthet egy dolgozatot, a $z(x)_i$ az i -edik feladatra kapott normált pontszám.) A $w_1, \dots, w_k$ értékeket az alábbi egyenlőtlenség rendszer megoldása adja:*

$\sum_{i=1}^k w_i z(x^j)_i \leq \sum_{i=1}^k w_i z(x^{j+1})_i$, ahol $j = 1, \dots, \ell - 1$ és a $\{w_1, \dots, w_k\}$ a változók halmaza. Az összes lehetséges megoldás egy P poliédert alkot, és ha $P \neq \emptyset$, egy belső pontját, az analitikus centrumot célszerű választani.¹³

1.14. Példa (Dualitás). *Ez a példát részletesen tárgyaljuk a Függelékben. Adott n féle termék, amelyet m féle alapanyagból állíthatunk elő. A szükséges alapanyagok mennyisége minden termékre ismert, csakúgy mint a haszon a termék egységnyi mennyiségén. Továbbá az i -edik alapanyagból b_i áll rendelkezésre. Ekkor a Lineáris programozás ún. Erős dualitás tétele által definiálhatjuk (és hatékonyan kiszámolhatjuk) minden alapanyag relatív értékét; ez éppen a duális változók értéke lesz az optimális gyártás esetén.*

1.15. Példa (Piac). *Az előző, 1.14 példa mutatja, hogy szükség van a termékek árazására, értékének meghatározására.¹⁴ Erre évezredek óta a alkufolyamatokat illetve a piac intézményét használják. Érthető módon megpróbálkoztak ezeknek a folyamatoknak a megértésével, modellezésével. A játékelmélet és az elméleti közgazdaság egyensúlyokkal kapcsolatos vizsgálatai jobbra ekörül forogtak. Az nehézség egyik okai a hatalmas bonyolultság és normatív megközelítés. Így többnyire nagy a távolság a modell előrejelzései és a valóság között.¹⁵*

¹³ Az analitikus centrum az a pont, amelyre a P lapjaitól vett távolságok logaritmusainak az összege maximális.

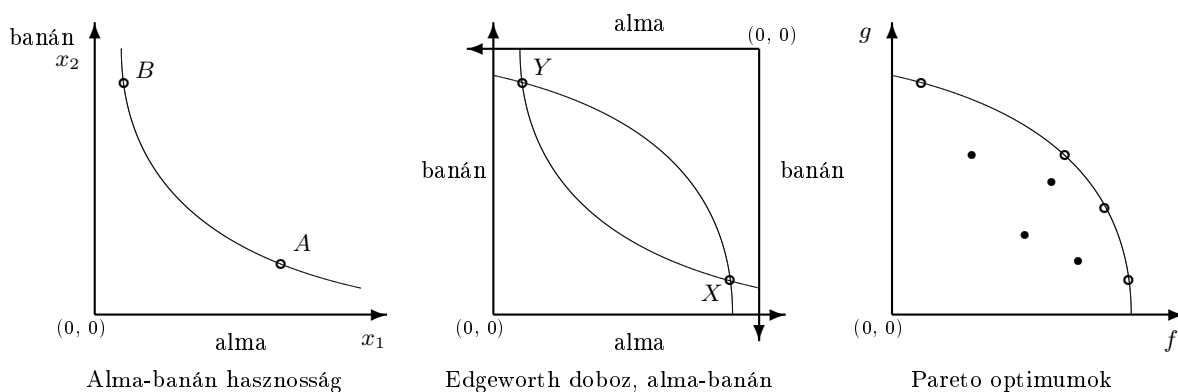
¹⁴ "Cynic is the man who knows the price of everything and the value of nothing." Oscar Wilde

¹⁵ "Cynic, n: a blackguard whose faulty vision sees things as they are, not as they ought to be." Ambrose Bierce

1.16. Példa (Fitness). *Bonyolult rendszerek, szerveződések megértésének legfontosabb nézőpontja az evolúció fogalma. Egy organizmus, gazdasági szereplő vagy éppen egy algoritmus elviekben rendelkezik egy fitness függvénnyel és a szelekció a nagyobb fitnessszel rendelkező egyednek kedvez. A fitness függvények pontos alakjáról, időfüggéséről, kölcsönhatásairól csak töredékes elképzeléseink vannak; ennek ellenére nagyon hasznosnak bizonyul a feltételezésük.*

1.2.4. A hasznossági függvények kvalitatív viselkedése

A gazdaság hasznossági függvényeit matematikai formájában először Daniel Bernoulli vizsgálta, ezt később részletesen ismertettük. Vegyünk egy egyszerű példát. Ha éhesek vagyunk, akkor egy alma nagyon jól jön. Két alma még jobb, de nem mondhatjuk, hogy kétszer annyira örünk neki, hacsak meg nem akarjuk osztani valakivel. Több alma persze mindig jobb, de egyre kevesebbé találjuk hasznosnak. Hasonló igaz másféle jószágokra vagy akár ezek mércéjére, a pénzre is. Ez az ún. *csökkenő hozadék* (diminishing return) elve. A jószágokat sokszor *korlátlanul oszthatónak* tekintjük, hogy valós számmal legyen reprezentálható. Pontosan nem ismerjük egy jószág f hasznossági függvényét, de általában elfogadott, hogy (1) monoton növekvő (2) konkáv és (3) folytonos.¹⁶



Mivel a jószágok értékeinek csak párban van értelme, eleve célszerűbb ilyen formában ábrázolni őket. Az *alma-banán* grafikonon lévő A és B pontok adott, konstans értéknek megfelelő birtoklási eloszlást írnak le. Több almát birtokolva (A pont) magasabbra értékeli a banánt, míg a B pontban meguntuk a banánt.

Az *Edgeworth doboz* a csere lehetőségeit illetve kimeneteleit szemlélteti két egyén között. Ehhez két koordináta rendszert veszünk fel egymással szemben oly módon, hogy az X pont jelölje *mindkét* egyén kezdeti tulajdonát az egyik illetve a másik koordináta rendszerben. Az Y egy lehetséges csere, mint ahogyan az X és Y között húzódó lencse formájú terület bármely pontja, hisz ezekkel *mindkét fél* legalább olyan jól jár, mint a kezdeti helyzetében.

A Pareto optimum a több hasznossági függvénnyel jellemezhető pontok közül azon pontokat jelenti, amelyekre a függvények összege maximális. Az ábránkon lévő görbe az $f + g$ függvényhez tartozó a maximális hasznosságú pontok halmaza. Egy piaci (verseny) helyzetben a feketével jelölt pontokhoz tartozó entitások nem húznák sokáig. Másrészt, ha megfigyelhetőek, akkor alighanem hiányos a modellünk és a hasznosságnak vannak egyéb összetevői.

1.2.5. Determinisztikus vs véletlen, optimalizálás vs verseny

A modellek megalkotásánál az első lépés kritikus, mikor eldöntjük, milyen jellegű modellel próbálkozunk. Bátran változtatnunk kell, ha nem elég jók az eredmények, vagy éppen a környezetben történik változás.

¹⁶ Ha f elég sokszor differenciálható, akkor az (1) és (2) az $f'(x) > 0$ és $f''(x) < 0$, ha az $x > 0$.

1.17. Példa. (*Vakcina beszerzés*) Tegyük fel, hogy valamely, oltással megelőzhető trópusi betegség ellen kívánunk védekezni. Ha ez pusztán olyan országokban van jelen, ahová csak vízzel lehet beutazni, akkor a helyzet egyszerű. A vízum igényléssel egyidőben rendeljük meg az oltóanyagot. Ha viszont megszűnik a vízumkényszer, át kell térnünk egy **véletlen** modellre. Meg kell becsülnünk az igényeket, figyelembe venni mind a túlzott készletekből, mind a hiányból eredő költségeket és ez alapján dönteni.¹⁷ Aztán rájövünk, a betegség annyira elterjedt, hogy kötelező, általános védőoltásra szorulunk. Ekkor a kezdeti átoltás után az évről évre belépő újabb nemzedékek pontos nyilvántartása lehet a megoldás.

A korábbiakban utaltunk rá, hogy már a determinisztikus modellek felállítása, matematikai kezelése és majdan implementációja számtalan nehézséget rejt. A véletlen beépítése újabb problémákat okoz. A véletlen és *valószínűség* szavakat ritkán használják korrekt, vagy akár következetes módon, így mindig értelmeznünk egy-egy állítást, amiben előfordulnak. A másik probléma a véletlen változók egyedi eloszlására tett indokolatlan feltevések. Gyakori továbbá, hogy a változókat *függetlennek* tekintik. Az *állatorvosi ló* a következő példa.

1.18. Példa. (*Paraméter tér mint eseménytér*) Gyakori a feltételezés, hogy egy modell modellben szereplő paraméterek értékei egy-egy intervallumból egyenletesen és egymástól függetlenül adódnak. Legyen ez a halmaz $T = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$, azaz egy n -dimenziós téglalapot. Tegyük fel, hogy egy A eldöntendő eseményre (pl. holnap eső lesz) meghatározható (vagy inkább becsülhető) a $V(T_A)$, ahol $T_A \subset T$ a paraméter tér azon része, ahol a modell szerint A bekövetkezik, V pedig az n -dimenziós térfogat. Ekkor az A esemény valószínűségének becslésére a $V(T_A)/V(T)$ hányadost használják.¹⁸ Vegyük észre, ez akkor lenne korrekt, ha (1) a paraméterek véletlenek (2) egyenletes eloszlásúak és (3) teljesen függetlenek lennének egymástól.

Vannak döntési helyzetek, amelyekben egymástól többé-kevésbé független szereplő a saját szempontjait szeretné érvényesíteni és nem lehet pusztán optimalizálással leírni. Gondolhatunk itt a versengés különböző formáira (gazdasági, katonai, evolúciós stb), ahol a szereplők, más szóval *játékosok* vagy ágensek érdekei néha ellentétesek, de időnként akár egybeeshetnek. Modellezés szempontjából ez nagyon nehéz terület, mert (1) a választott modell többnyire csak egy szempontra érvényes, míg a valóság többet is tartalmazhat (2) nehéz azonosítani a játékosokat, a lehetséges stratégiákat, nyereségüket (3) a hasznossági függvények hozzárendelése problémás. Az alábbi példák bemutatják ezeket.

1.19. Példa. (*Piaci dzsungel*) Tegyük fel, hogy egy piacon két cég árul hasonló terméket. Milyen kérdések merülnek fel? (i) Mennyi terméket illetve milyen áron bocsássonak ki? (ii) Megpróbálják-e kiszorítani a vetélytársat (monopólium)? (iii) Beléphet-e új szereplő a piacra? (iv) Van-e lehetőség együttműködésre (például közös termékfejlesztés, új piacra betörés, érdekképviselet stb)? Nem könnyű ezen kérdésekre a válasz, és még nehezebb meghatározni, hogy mekkora haszonnal járhat egy-egy stratégia megvalósítása.

A biológiai rendszerek megértése a kialakulásukon, a résztvevők együttműködésén keresztül történhet. Az evolúciós szemlélet tisztázza a misztikus *célság* mibenlétét.

1.20. Példa. (*Valódi dzsungel - koevolúció*) Nagyon érdekes kapcsolat van a növények és az őket fogyasztó állatok között. Sok növény óvja a leveleit mérgező hatású anyagokkal vagy tövisekkel, míg az állatok stratégiái is változatosak: keveset esznek egy-egy növényből, vagy méregtelenítő agyagot fogyasztanak. Ez bonyolódik, mikor a növény érdekelt a magjai terjesztésében, és ezt ösztönzendő értékes gyümölcsöt fejleszt köréjük. Ugyanakkor a magvak gyakran mérgezőek, ami véd a szétrágás ellen.¹⁹ További adalék a koevolúcióra a színek jelentősége. Az érett gyümölcs tipikusan piros vagy sárga és pontosan a gyümölcssevő emlősök látják ezeket a színeket.

¹⁷ A később tárgyalandó *újságárus probléma* esetleg alkalmazható erre.

¹⁸ Ez a becslés egy ún. *Monte Carlo* szimulációval történhet: $x_1, \dots, x_k$ véletlen pontot véve T -ből, minden x_i -re kiszámolva a modellt, ha ℓ esetben adódik A , akkor az ℓ/k lesz a valószínűség becslése.

¹⁹ A paprikában termelődő, a hőérzékelő idegekre ható anyag, a *kapszaicin* csak a magot veszélyeztető emlősökre hat, a madarakra nem.

1.3. Gyakorlat

1.3.1. Irracionalitás

A tipikus döntéshozatali folyamatok az életben elkerülhetetlenül szennyeződnek.

1.3.2. Érvelési hibák

Az egyik gyakori zsákutca az ún. *érvelési hiba*.²⁰ Itt a fő probléma az a tévhit, hogy vitatkozással (vagy formális logikával) kideríthető állítások igazságtartalma. A logikát azért használjuk, mert a megfigyelések szerint bizonyos fogalmakra alkalmazhatónak tűnik, és egy-egy levezetés annyit ér, amennyit a kiindulási tények (premisszák). A modelleknek ezek a feltételezések fontos részei, nem mindegy, mennyire megbízhatóak az adataink, hol vannak az analógiáink korlátai stb. Az érvelési hibák többnyire a fentiek óvatlan vagy éppen szándékolt félreértéséből jönnek.

1.3.3. Pszichikai csapdák

A hasznosság kérdésében nem egyformán nehézek a döntések. Úgy vélik, könnyebb két jó alternatíva közül választani (melyik filmet nézzük meg?), mint egy jó és a vele járó rossz együttes választása vagy elutasítása (megér-e ez a film ennyi pénzt?). A legnehezebb két rossz lehetőség közül választani (pénzzavar miatt el kell adnom egyik kedvenc tárgyam, melyik legyen az?).²¹ Vegyük észre, ha mások teszik fel, csoportosítják a kérdéseket, akkor könnyen manipulálhatnak vele. A befolyásolást igyekszünk kivédeni, de az automatikus reakció visszájára fordulhat. Szén József, a XIX. század jeles magyar sakkozója egy fontos játszmában nem lépte meg az egyetlen nyerőt, mert a fegyelmezetlen angol közönség bekiabálta azt (Knight takes pawn!).

Erősen összefügg az idő és a bizonytalanság a gondolkodásunkban. Amivel jelen pillanatban rendelkezünk, az többet ér, mint a jövőbeli tulajdonlása, ami esetleg meg sem valósul.²² (Ennek pénzügyi leképeződése a kamat. Egyensúlyi helyzetben, például egy ökoszisztémában nehezen lenne ez értelmezhető, hiszen az egyensúly az időváltozót kiküszöböli.)

A bizonytalanság kezelésének lehetséges módjaival később részletesen foglalkozunk. Egy példa: tegyük fel, hogy egy kockadobástól függ egy havi fizetésünk. Ha egytől ötig dobunk, megduplázhatjuk, hatos esetén nekünk kell befizetni az összeget. Belemennénk egy ilyen játékba?

1.3.4. A haszonelvűség

Egy hasznosságon alapuló etikát (utilitárianizmus) javasolt Jeremy Bentham és John Stuart Mill a XIX. században. Ennek egyes elemei már régóta részei az emberek viselkedésének, másokat bizonyos helyzetekben alkalmaznak, megint mások kifejezetten ellentmondásosak, vagy éppen rombolóak. Egy bonyolult helyzetben a hasznosságfüggvényről aligha lehetséges a megegyezés és az optimum csak erőszakkal implementálható. (Mondjunk példákat.)

1.3.5. Minden szöveges feladat hibás

A modellezésre tanulságos, de többnyire elrettentő példákkal szolgál a matematika oktatás.²³ Néhány klasszikus feladaton megmutatjuk, miért okoz problémákat a matematika és a valóság összekapcsolása.

1.21. Példa (Kerítésfestés). *Egy kerítést Jóska hat, Béla pedig nyolc óra alatt festene be egyedül. Együtt mennyi idő alatt végeznének? Itt a diáknak be kellene vezetni az időegységre vett teljesítmény fogalmát, $P_J = 1/6$ illetve $P_B = 1/8$ és feltételezni, hogy a teljesítmények összeadódnak, azaz az*

²⁰Részletesen lásd: https://hu.wikipedia.org/wiki/%C3%89rvel%C3%A9si_hiba

²¹Átfogalmazhatjuk, úgy, elvesztettem mindkettőt, melyiket szeretném visszakapni.

²²Jobb ma egy veréb, mint holnap két tűzok.

²³Általános iskola, első osztály: Gyerekek, mától fogva csak számítógépekkel számolunk! Két számítógép meg három számítógép az hány számítógép?

együttes teljesítmény $P_{JB} = P_J + P_B$. Ekkor a szükséges T időre az $1 = P_{JB} \times T$ egyenletből a $T = 1/P_{JB} = 1/(1/6 + 1/8) = 24/7$ adódik. Ugyanakkor a teljesítmény additivitása nem nyilvánvaló. Feltételezni kell még (1) van két ecset és két vödör (2) a festéket el tudják osztani a szükséges arányban (3) nem akadályozzák egymást a munkában.

A 1.21. példa kérdései egy *mechanizmus* megalkotásával válaszolhatóak meg. Tehát szerezzünk két készletet a eszközökből, és szükség van mérésekre. Felosztjuk mind a festéket, mind a kerítést 8:6 arányban. Ha a kerítés szerkezete megengedi, a $[0, 1]$ intervallumnak foghatjuk fel, és Jóska indul 0-tól, Béla pedig $4/7$ -től, így teljesülhet a (3) feltétel is.

A mechanizmusok minden modell megvalósításánál nagyon lényegesek. Ha nem korábban, az ókori görögöknél felmerült, ki fut gyorsabban. Ez nem olyan egyszerű, hisz meg kellene egyezni, mit értünk leggyorsabb alatt. Manapság elképzelhető lenne, hogy mérjük meg a *maximális* sebességet valamilyen műszerrel. Ez akkor fel sem merült, már csak azért sem, mert a sebesség definíciója egyáltalán nem egyszerű sem fizikai, sem filozófiai értelemben. Óra és pontos távolságmérés nélkül is működik viszont a választott megoldás: induljanak egyszerre az adott távon és aki elsőnek befut, azt hívjuk leggyorsabbnak.

1.22. Példa (Szuperfecske). *A sebesség fent említett problémáját hordozza ez az ismert feladat. Két autó megy egymással szemben, 50 illetve 40 km/h egyenletes sebességgel, a kezdeti távolságuk 90 km. Röpköd köztük egy fecske 80 km/h sebességgel. Mennyi utat tesz meg a fecske, az autók találkozásáig?*

A standard megoldás szerint egy óra kell az autók találkozásához, azaz a fecske 80 kilométert tesz majd meg. Feltéve, ha végtelen gyorsulást tud elérni. (Persze még akkor is marad a kérdés, hogy miért tenne ilyet egy fecske?)

1.23. Példa (Érmejáték). *Ezt a feladatot a következőképpen szokás elmondani. Adott egy kör alakú asztal, és sok egyforma érme. Két játékosnak kell felváltva elhelyeznie egy érmét az asztalon, úgy, hogy az ne lógjon rá a már ott levő érmékre (és ne is essen le). Aki soron következve nem tudja ezt megtenni, veszít. Ki nyer a játékban?*

Az asztal szimmetriája adja a megoldást és ad egyben egy *algoritmust* is: a kezdő tehet az asztal O középpontjába, majd a másik fél érméjét, melynek középpontja az X pontban van, olyan érmével válaszolja meg, amelynek középpontja az X tükrözése O pontra. Ezzel a kezdő játékos elkerülheti a veszítést és a játék korlátos lépésszáma miatt nyerni fog. (Vegyük észre, az asztal lehet bármely centrálszimmetrikus, de középen nem lyukas alakzat, az érme pedig bármely formájúak.) Neumann pragmatikusan állt a feladathoz, mondván, mivel a kérdésben nem szerepel az asztal mérete, alighanem a válasz is *független* a mérettől. Tegyük fel, hogy pont akkora, mint egy érme. Ekkor a kezdő éppen le tud tenni egy érmét és nyer, tehát általában sem várható más.

1.24. Példa (Sapka szín). *Egy matematika versenyben az 1-3 helyezett azonos pontszámot ért el. A döntő feladatban sötétben rájuk adnak egy sapkát, majd felkapcsolják a világítást és ezzel mindenki látja a másik két versenyző sapkáját (a sajátját továbbra sem). Aki előnek megmondja, milyen színű sapka van rajta, nyer. Annyit tudnak, hogy három fekete és két fehér sapka közül választ a zsüri. Eltelik egy kis idő a fényben, majd az egyikük, két fekete sapkát látva felkiált, rajta is fekete van, és nyer. Miért?*

A standard megoldás: két feketét látok, ha rajtam fehér lenne, akkor a másik két versenyző egy fekete, egy fehéret látna. Mivel egyik sem szól, tudnák, hogy rajtuk csak fekete lehet, hiszen ha két fehér lát valaki, akkor egyből tudja, rajta mi van.

Az igazán okos versenyző már a fény *előtt* megmondhatta volna, mi van a fején. A színelosztások az alábbiak lehetnek (fekete, fehér): $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(3, 0)$. Az első eset túl könnyű, az egyetlen fekete sapkás egyből tudja, mi lehet rajta (ha meg elbambul, akkor a másik kettő, hibásan, feketét tippel). A $(2, 1)$ esetben nincs egyből válasz, amiből a esetben a fekete sapkások tudnák, hogy rajtuk mi van, a fehér viszont esélytelen. Tehát ha egyenlő mércével mérünk csak $(3, 0)$ eset jöhet szóba.²⁴

²⁴A sorok írója nagyon megörült, mikor erre rájött, még jobban, mikor arról értesült, hogy Pósa Lajos ezt már régóta így tanítja.

Egy csavart hozzátéve a gondolatmenethez, még gyorsabban eljutunk a $(3, 0)$ leosztáshoz. Ha igazságos a döntés, a versenyzők egyformán nehéz feladatot kapnak, ami ebben az esetben csak egyforma színű sapkákkal oldható meg, azaz a $(3, 0)$ leosztással.²⁵

1.4. Szegmentáció

A hasznossági függvényt az árképzés optimalizálására is használhatjuk. Tegyük fel, hogy egy olyan szolgáltatást árulunk, amelynek az önköltsége alig függ az igénybe vevő számától. (Telefon, internet vagy akár egy vonat.) Tegyük fel, hogy tudjuk mennyi az értéke minden egyes potenciális vásárló szemében egy terméknek. Állítsuk őket az érték szerint növekvő sorba, és normáljuk, azaz legyen $f(i/n)$ a termék értéke az i -edik vásárló szerint, ahol n az összes lehetséges vásárlók száma.

A legnagyobb árbevételhez az $g(x) = f(x)(1-x)$ függvény maximum helyét kell meghatározni. Ennek geometriai jelentése az f görbéje alá berajzolható legnagyobb területű téglalap.

1.25. Példa (Optimális ár). Legyen $f(x) = x^2$. Az $g(x) = f(x)(1-x) = x^2 - x^3$ szélsőértékeihez a derivált $g'(x) = 2x - 3x^2$ gyökei $x_0 = 0$, $x_1 = 2/3$. A $[0, 1]$ intervallum végpontjai minimumok, az $x_1 = 2/3$ tartozik maximumhoz, $g(2/3) = 4/27$.

Hogyan növelhetnénk a bevételt? A *szegmentáció* egy lehetőség, azaz érjük el, hogy a népesség különböző részei más árat fizessenek az áruért. A legjobb példa a vonat első, másod (régábban harmad) osztály, vagy IC/gyors árképzése. A csoportok szétválasztását vagy plusz szolgáltatással (pl. ingyenes szoftvernél a fizető felhasználó kap támogatást) vagy a kisebb árhoz mesterséges minőségromtással (belassuló net, fapados harmadosztály, sorbanállás stb) szokták elérni.

Az előző formalizmussal, ha az $x_1 \leq x_2$ árakat állítjuk be, akkor a

$$h(x_1, x_2) = f(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_2)(1 - x_2)$$

kétváltozós függvény maximuma a megoldás. Ehhez a $\partial h(x_1, x_2)/\partial x_1 = 0$, $\partial h(x_1, x_2)/\partial x_2 = 0$ rendszer megoldásain át juthatunk el. (Ha h differenciálható. Geometriai értelemben két diszjunkt téglalapot írunk be az f görbéje alá úgy, hogy a területük összege maximális legyen.)

1.26. Példa. (Lineáris eset) Legyen $f(x) = x$ a $[0, 1]$ intervallumon. Ekkor

$$h(x_1, x_2) = x_1(x_2 - x_1) + x_2(1 - x_2) = x_1x_2 - x_1^2 + x_2 - x_2^2.$$

A feltételeink alakja $h(x_1, x_2)/\partial x_1 = x_2 - 2x_1 = 0$ és $h(x_1, x_2)/\partial x_2 = x_1 + 1 - 2x_2 = 0$, ami az $x_1^* = 1/3$ és $x_2^* = 2/3$ megoldást adja. Az optimum érték $h(1/3, 2/3) = 1/3$.

Ha több részt engedünk meg a szegmentációban, akkor nagyobb bevételre számíthatunk. A fenti módszerekkel viszont ez egyre nehezebbé válik. Másrészt az optimális megoldás többezer éves...

1.27. Példa. (Piaci alku) Az eladó és a vevő alkuja az f érték alatti és az önköltség feletti meg-egyezőssel zárul. Feltehetjük, hogy ez nagyon közel van f tényleges értékéhez a helyzet asszimetriája miatt. Egyrészt az árust nem kötik időkorlátok, kinn van egész nap, másrészt ő profi, aki abból él, hogy átlát a vásárlóin.²⁶ Tehát feltehetjük, hogy az áru pontosan annyiért cserél gazdát, amennyit az az új tulajdonosának megér, az árbevétel pedig $\int_0^1 f(x)dx$, azaz az f függvénygörbe alatti terület 0 és 1 között. A 1.25. példa $f(x) = x^2$ függvényével ez $\int_0^1 x^2 dx = [x^3/3]_0^1 = 1/3$, ami több, mint duplája az egy árat használó megoldásnak.

Kalapos problémák

A feladatok mindegyikében a saját kalapszint kell tippelni, előzetesen egyezkedhetnek a játékosok, a tippeteket (többnyire) nem oszthatják meg.

²⁵ A feladat egyfajta *korlátozott racionalitás* feltételezésén alapul. Mint mechanizmus sérülékeny, nem számol sem a nagyon okos, sem találmokra bemedott válaszokkal.

²⁶ Sose becsülj le egy profit.

1.1. Feladat. Adott n ember, akikre ráadnak legfeljebb $m \leq n$ színű kalapot. Ismerik a választékot és a sajátukon kívül tudják, ki mit kapott. Tippelniük kell a sajátjukra, és ha legalább egyikük helyesen tippelt, mindnyájan nyernek. Mutassuk meg, van nyerő stratégiájuk.

1.2. Feladat. Három ember kap fekete vagy fehér kalapot egy szabályos érmedobás szerint. egymás kalapjait látják, a sajátukra adhatnak tippet vagy passzolhatnak. Ha van jó tipp és nincs rossz, akkor nyernek. Milyen eséllyel nyerhetnek?

1.3. Feladat. Egy páros n számra n ember kap fekete vagy fehér kalapot. Mutassuk meg, hogy van olyan stratégia, amivel $n/2$ -en helyesen tippelhetnek.

1.4. Feladat. Most sorban állnak az emberek, az első látja a többieket, az i -edik az $i + 1$ -edikről. Fehet vagy fekete kalapot kaptak, a sorszám szerint tippelnek és most hallják egymás tippjeit. Mutassuk meg, hogy legalább $n - 1$ ember adhat jó tippet.

1.5. Feladat. Végtelen sok ember kap fekete vagy fehér kalapot és látja a többiekét. Adjunk olyan stratégiát, amivel csak véges sok fog helytelen tippet adni.

1.6. Feladat. A szegmentációs problémában n árat használhatunk, az $f(x) = x$ a $[0, 1]$ -en. Mik legyenek az árak a maximális bevétel érdekében?

1.7. Feladat. Szintén szegmentáció, két ár lehet, az $f(x) = x^2$ a $[0, 1]$ -en. Mi legyen a két optimális ár?

2. fejezet

Alea iacta est

2.1. Példa. (*Buridan szamara*) A probléma, bár korábban felmerült, Jean Buridan skolasztikus filozófus nevéhez kötődik. Adott egy szamár, és a fejétől balra és jobbra egy-egy, tökéletesen egyforma szénahalom. Mivel eldönthetetlen számára, melyikkel kezdje az evést, éhenhal.

A példa persze az emberre jóval jellemzőbb, a döntésképtelenség információ hiányban egyáltalán nem ritka, míg széna mellett éhenhalt szamarat ritkán látni. Ilyenkor kellene egy impulzus, amely egyik vagy másik lehetőség felé billentené a mérleget, de ez éppen nincs. A megoldás egy *spontán szimmetria sértést* jelent, ezt például egy pénzfeldobással érhetjük el.¹ Azaz ha a dobás eredménye fej, akkor válasszuk az egyik, ha írás a másik lehetőséget. (Elképzelhető, hogy a döntéshozó nem tud dönteni a lehetőségek és az érme oldalainak egymáshoz rendelésében sem.)

2.1. Érmedobás

Az érmedobások kimenetelére sokfajta elképzelés van. A naiv megközelítés, hogy fele-fele eséllyel lesz fej vagy írás. Diaconis és társai úgy találták, a kézből dobott érme kb 51 % eséllyel *ugyanazon* az oldalán végzi, ahol kezdte. Egy kiegyensúlyozatlan érme lehet *elfogult*, azaz többször landol az egyik oldalán, mint a másikon. Ez főként a ütközés, visszapattanás miatt alakul, egy dobókockánál még szembetűnőbb.²

Mivel egy érme sosem teljesen szimmetrikus, felmerül az a kérdés, van-e egyáltalán elfogulatlan érme? Kicsit általánosabban, tudunk-e előírt tulajdonságú véletlen eseményeket generálni?

1951-ben javasolt Neumann egy *extraktort*, azaz egy olyan eljárást, amellyel szennyezett véletlenből, egy elfogult érme dobásaiból egy tökéletes érmét szimulálhatunk. Néhány feltételezéssel azonban élnünk kell.

- Az érme p valószínűséggel fej (F), különben írás (I), és ez *nem változik* a dobások során.
- Az egymást követő dobások *teljesen függetlenek*.³

Egy lehetséges eljárás a következő. Vegyük az ismeretlen érme n dobásának az eredményét. Osszuk fel kettes csoportokra, tehát például az

FFFIIFIIIIFFFIIFFIIFFIIFFIIF

sorozat formája legyen

$(FF)(FI)(FI)(II)(IF)(FF)(II)(FF)(II)(IF)(FI)(FF)(II)(FI).$

¹ A véletlen mibenléte nagy talány, a döntéseinkben viszont felhasználhatjuk.

² Ezért van ún cinkelt kocka, érmével ez nehezen kivitelezhető jelenség.

³ Az A és B események függetlenek, ha $Pr(AB) = Pr(A)Pr(B)$.

Az (FF) és (II) használhatatlan, töröljük, az $FI = \mathbf{F}$, $IF = \mathbf{I}$ eseményeket átjelöljük. Ezzel a sorunk **FFIIFF**-re változik. Ennek egyes jegyei függetlenek (lássuk be), a valószínűségekre

$$Pr(\mathbf{F}) = Pr(FI) = Pr(F)Pr(I) = p(1-p) = (1-p)p = Pr(I)Pr(F) = Pr(IF) = Pr(\mathbf{I})$$

kapjuk. Azaz az így nyert $\mathbf{F} - \mathbf{I}$ sorozat egy *tökéletes* érmét ad.

2.1.1. Két érmedobás

Tegyük fel, hogy van két tökéletes érménk és egyszerre dobjuk fel őket. (A tökéletes azt is jelenti, a két érmét meg sem tudjuk különböztetni egymástól.) Azt figyelhetjük meg, hogy két fej (X esemény), két írás (Y), vagy egy fej, egy írás (Z) lesz a kimenetele a kísérletnek. Aki még nem tanult sztochasztikát, az könnyen beugratható, hogy mindhárom kimenet egyenlő, $1/3$ valószínűségű. Aki tanult már ilyet, az azt hiszi, pusztán logikai úton be tudja bizonyítani, hogy $Pr(X) = Pr(Y) = 1/4$ illetve $Pr(Z) = 1/2$. Valójában az érmékkel végzett *kísérletek* absztrakciója (azaz a fizikai törvény) az, hogy *szorzatmezővel* írjuk le ezt a jelenséget. Azaz egy $\Omega = \{FF, FI, IF, II\}$ valószínűségi mezőről beszélünk, amely egyforma valószínűségű *elemi eseményekből* áll úgy, hogy $Pr(AB) = Pr(A)Pr(B)$, ahol $A, B \in \{I, F\}$. Ha *sokkal* kisebb érméket dobunk, például két, összefonódott kvantumállapotban lévő elektront, és a fej-írás helyett a *spin*t mérjük, akkor azt tapasztaljuk, hogy nincs két egyforma dobás, a Pauli elv miatt a két spin mindig ellentétes irányú.

2.2. Az osztozkodás egy problémája

A feladatot Fra Luca Paccioli közölte nyomtatásban először, bár már jóval korábban ismerték, lásd [12]. Két játékos, A és B játszik egy igazságos játékot (ugyanakkora a nyerési esélyük egy-egy játszmaiban). Abban egyeznek meg, aki hamarabb nyer hat játszmát, az kapja a teljes tétet. A játékot a folytatás lehetősége nélkül be kell fejezni, mikor az A játékos öt, a B három játszmát nyert. Mi legyen a téttel? Másképpen fogalmazva, mi a *méltányos* osztozkodás?

A gondot persze az okozza, hogy a méltányosság nem matematikai fogalom, jogi, erkölcsi stb értelemben sokféle megoldás javasolható.

- Senki nem kap semmit, hisz nem teljesült a feltétel, $(0 : 0)$ arány
- Mivel egyik sem vesztett, osszák egyenlőn, $(1 : 1)$ arány
- Osztozzanak a nyert játszmák arányában, $(5 : 3)$
- Vigye az egészet, aki többet nyert, $(1 : 0)$ arány
- Niccolo Tartaglia $(2 : 1)$ arányt javasolt
- Pascal és Fermat (1654), $(7 : 1)$ arány

Pascal és Fermat javaslata tulajdonképpen a *fiktív lejátzás*, azaz nézzük meg, milyen eséllyel nyerne egyik vagy a másik, és ennek megfelelő arányú legyen a kifizetés. Ezzel a méltányosságot matematikai szempontból a *várható érték* fogalmának definiálták. Általában egy diszkrét X véletlen változó várható értéke, $\mathbb{E}X := \sum_{i=1}^{\infty} a_i p_i$, ha az a_i értéket p_i valószínűséggel veszi fel X .

Ha X_A illetve X_B az A és B nyereménye (a fiktív lejátzásban), akkor

$$\mathbb{E}X_A = 0 \times Pr(A \text{ veszít}) + 1 \times Pr(A \text{ nyer}),$$

azaz $\mathbb{E}X_A = Pr(A \text{ nyer})$. Hasonlóan $\mathbb{E}X_B = Pr(B \text{ nyer})$. Ez három plusz játszma után eldől, amik egyforma valószínűséggel az alábbiak lehetnek (a győztesrel jelölve):

AAA, AAB, ABA, ABB, BAA, BAB, BBA, BBB. Ezek közül egy hozza B nyerését, hét A nyerésével végződik. Azaz $\mathbb{E}X_A/\mathbb{E}X_B = 7$.

2.1. Feladat. *Hogyan használhatjuk az érmedobásokat kockadobás vagy rulett modellezésére? Jobb lenne-e elfogult érme, ahol $p \neq 1 - p$? Fordítva n kockadobásból hány érmedobást nyerhetünk ki?*

2.2. Feladat. *Mutassuk meg, ha közel elfogulatlan érménk van, akkor n dobásból várhatóan $n/4$ tökéletes dobást ad az extraktor. Hogyan javíthatnánk ezen?*

2.3. Feladat. *Adjuk meg az általános formulát az osztozkodásra, azaz ha n győzelem kell, k után szakad meg a játék, A és B játékosok pedig a illetve b alkalommal nyertek.*

2.4. Feladat. *Tegyük fel, hogy a játékosok tudása is számít és a nyerési esély arányos a megnyert játszmák számával. Ekkor mi lenne az igazságos osztozkodás?*

3. fejezet

Sztochasztikus programozás 1.

Az optimális és döntési modellekben számos, a véletlentől függő változó szerepelhet. Illusztrációként néhány példa:

1. Diéta probléma

A problémát a

$$\begin{array}{ll} \min & cx \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

alakban modelleztük, ahol az x vektor komponensei a különböző táplálékok fogyasztandó mennyiségét a c komponensei ezek egységárát, az A mátrix a_{ij} eleme a j -edik táplálék egységnyi mennyiségének i -edik tápértéke (energia, fehérje, különböző ásványi anyag, vitamin, stb.), míg a b_i az igényelt tápérték. A valóságban az A , b és c egyes komponensei lehetnek valószínűségi változók, melyeknek eloszlásáról több-kevesebb információnk van.

2. Portfólió probléma

Tegyük fel, hogy n különböző tevékenységbe/részvénybe fektethetünk be $x_1, x_2, \dots, x_n$ tőkét, és $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ az egységnyi tőke véletlentől függő hozama az adott befektetés mellett. Feltehetjük továbbá, hogy $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, $x_i \geq 0$, és a nyereségünk $\sum_{i=1}^n \xi_i x_i$.

3. Gátmagasítás

Egy gát x egységnivel történő magasításának a költségét jelöljük $I(x)$ -szel, továbbá annak a valószínűségét, hogy a vízszint túllépi H -t $P(H)$ -val. Ha a vízszint magasabb, mint a gát, akkor az áradás következtében V kár keletkezik.

4. Újságárus probléma

Ez egy klasszikus beruházási probléma. A kereslet egy újságra (esetleg karácsonyfára) egy ismert eloszlás ξ valószínűségi változó. Az újságos c egység pénzért vesz el és $(d > c)$ egységért adja el. Ha x darabot vesz, akkor $\xi \leq x$ esetén

$$d\xi - cx = -c(x - \xi) + (d - c)\xi,$$

míg $\xi > x$

$$dx - cx = -(d - c)(\xi - x) + (d - c)\xi$$

lesz a haszna.

Szándékosan nem feszegettük, mi is a cél a felsorolt modellekben. Látni fogjuk, hogy ezt igen alaposan meg kell fontolni és nem mindig határozható meg egyértelműen.

A diéta problémáról azt láthatjuk, hogy esetleg bármekkora ráfordítás mellett sem elégíthető ki egy valószínűséggel az $Ax \geq b$ feltétel. Szerencsés esetben meg tudjuk becsülni a feltétel sérüléséből származó kárt, és ezt hozzáadva a cx célfüggvényhez áthidalható ez a probléma.

A másik megközelítés, hogy az $Ax \geq b$ teljesülését egy előre megadott, lehetőleg nagy p valószínűséggel követeljük meg. Ez a p a rendszerünk *megbízhatósági szintje*, amely függhet például a műszaki szabványoktól.¹

Bizonyos esetekben a valószínűségi változók helyettesítése a várható értékükkel elfogadható megoldáshoz vezet. Tulajdonképpen így jártunk el a korábbiakban.

A következőkben néhány speciális optimalizálási illetve megbízhatósági feladatot vizsgálunk. Közös tulajdonságuk csupán a véletlen eseményektől való függés illetve a Bernoulli elv használata lesz.

Definíció. (A Bernoulli elv) A Bernoulli elv szerint egy sztochasztikus rendszerben definiálunk egy *hasznossági függvényt* és ennek várható értékét maximalizáljuk. (Ekvivalensen *kockázat függvényt* és ennek várható értékét minimalizáljuk.)

3.0.1. Gátmagasítás

A Bernoulli elv alapján *gátmagasítás* problémáját vizsgáljuk, amelyet a holland van Dantzig oldott 1956-ban.² Jelen esetben a kockázati függvény nem más lesz, mint a költség.

Legyen H_0 a gát jelenlegi, H az elegendő magassága; ezzel az x magasítás

$$x = H - H_0.$$

Nincs kár, ha a tengerszint H alatt marad, különben az áradás okozta kár V . A statisztikákból ismerjük a tengerszint eloszlás függvényét. Ennek alapján annak az eseménynek a $p(H)$ valószínűsége, hogy egy éven belül meghaladja a H magasságot

$$p(H) = p_0 e^{-\alpha(H-H_0)}, \quad p_0 = e^{-\alpha H_0},$$

ahol p_0 a H_0 szint meghaladásának valószínűsége, α pedig egy pozitív konstans.

Legyen $I(x)$ a gát x -szel történő emelésének teljes költsége, és tegyük fel, hogy ez $I(x) = 0$ ha $x=0$, míg, $I_0 + kx$, ha $x > 0$, ahol I_0 és k pozitív konstansok. (Az I_0 interpretálható felvonulási költségként, az építés költsége pedig lineáris függvénye a magasításnak.) A jelenlegi költség várható értékének kiszámításánál két dolgot kell figyelembe vennünk:

- (i) az $I(H - H_0)$ determinisztikus építési költséget
- (ii) az 1., 2., ... években bekövetkező esetleges kár által okozott költségeknek a jelenre visszavetített költségét. Mivel ez utóbbi a j -edik évben

$$p(H)V(1 + 0,01\delta)^{-j},$$

ahol δ az állandónak feltételezett kamatláb, az összeg:

$$I(H - H_0) + p(H)V \sum_{j=1}^{\infty} (1 + 0,01\delta)^{-j} \approx I(x) + 100p(H)V/\delta.$$

A minimum meghatározásához vegyük a

$$\frac{d}{dx}(I(x) + 100p_0 e^{-\alpha x} V/\delta) = 0$$

egyenlet gyökét, amely a $x = \frac{1}{\alpha} \log \frac{100p_0 V \alpha}{\delta k}$ megoldást adja.

¹ Ez egy nagyon általános feladat, amely alkalmas lehet erőművek, energiaszolgáltató rendszerek, vízgazdálkodási problémák stb. modellezésére. Sajnos ezek a problémák matematikai szempontból nagyon nehézek. Bár több fontos speciális esetben hatékonyan megoldhatóak, itt ezekkel nem foglalkozhatunk.

² 1953 január 31-ről február 1-re virradóra óriási tengerár pusztított Hollandiában, aminek következtében több mint 1800 ember meghalt.

3.0.2. Biztosítások és a kockázatkerülés

Érdekes paradoxonokra bukkanhatunk, a biztosítások racionalitását és a Bernoulli elvet vetjük össze.

A Bernoulli elv tisztán: A biztosítónak akkor fog szerződést kötni, ha a várható nyeresége pozitív (a költségeit leszámítva). Az ügyfélnek akkor éri meg biztosítást kötni, ha a várható vesztesége a biztosítás ideje alatt nagyobb, mint a biztosítás díja.

Mindkettő nem teljesülhet, azaz a biztosítás irracionálisnak tűnhet. A paradoxon feloldásához a vagyon logaritmikus hasznossága vezethet.³

Jelentse V egy személy vagyonának nagyságát, K a kárt, ami p valószínűséggel érheti és d az ezt megtérítő biztosítás díját. Ekkor a díj kifizetésének kényelmetlensége:

$$\log(1 + V) - \log(1 + V - d) \approx \frac{d}{V}$$

míg a baleset okozta (várható) utilitás csökkenés

$$p(\log(1 + V) - \log(1 + V - K)) = p \log \left(\frac{1 + V}{1 + V - K} \right) = p \log \left(1 + \frac{K}{1 + V - K} \right).$$

Tehát akkor éri meg biztosítást kötni, ha

$$\frac{d}{V} \leq p \log \left(1 + \frac{K}{1 + V - K} \right).$$

Nézzünk meg néhány speciális esetet:

$K \ll V$, azaz az ügyfél nagyon gazdag. Használjuk a $\log(1 + x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4 + \dots$ Taylor sor első elemét. Átrendezve kapjuk a $d \leq pK$ feltételt, vagyis csak akkor racionális a biztosítás megkötése, ha a várható kár nagyobb a díjnál.

$V = K/2$, tehát a vagyon fele van veszélyben. Ezzel a biztosítás díjára a $d \leq 2pK \log \left(1 + \frac{K}{1+K} \right) \approx 2pK$ feltételt kapjuk. Itt tehát a várható kár kétszeresének kifizetése sem indokolatlan.

$V = K$, az egész vagyon rámehet a balesetre. Itt a $d \leq pK \log(1 + K)$, azaz a várható kár sokszorosa is lehet a díj. Ez viszont a vagyonnal növekszik és akkor érvényes, ha $d \ll V$, különben a $\log(1 + V) + \log(1 + V - d) \approx \frac{d}{V}$ már pontatlan. Ekkor a $d \leq pK \log(1 + K)/(1 + p \log(1 + K))$ adódik, azaz a teljes vagyont sosem érdemes a biztosításra költeni.

3.0.3. Az újságáros probléma

Amint már korábban definiáltuk egy újságos c egység pénzért veszi és $(d > c)$ egységért ad el egy újságot. Ha x darabot vesz, akkor $\xi \leq x$ esetén

$$d\xi - cx = -c(x - \xi) + (d - c)\xi,$$

míg ha $\xi > x$

$$dx - cx = -(d - c)(\xi - x) + (d - c)\xi$$

lesz a haszna. Természetesen csak akkor várható értelmes válasz, ha van valamilyen feltételezésünk a kereslet eloszlásáról. Legyen ez az eloszlás először diszkrét, és jelöljük a $\xi = i$ esemény valószínűségét p_i -vel, azaz $Pr(\xi = i) = p_i$. A várható haszon így a következő lesz:

$$(d - c)E\xi - \sum_{i < x} c(x - i)p_i - \sum_{i > x} (d - c)(i - x)p_i,$$

amely akkor maximális, ha a

³Bármely utilitás függvény megfelel, ami figyelembe veszi a csökkenő hozadékot, azaz konkáv.

$$\sum_{i < x} c(x - i)p_i + \sum_{i > x} (d - c)(i - x)p_i$$

összeg minimális. Ez értelmezhető úgy, mint egy várható büntetés, ha a ξ aktuális értéke eltér x -től; c egységet kell fizetni a $\xi < x$ és $d - c$ egységet az $x < \xi$ esetben. Az első esetben az eladatlan újság ára jelenik meg, a másodikban az elszalasztott lehetőséget kell „megfizetni.” Pszichikailag a két költség között nagy különbség lehet, az optimalizálás szempontjából ellenben semmi. Ennek megfelelően egy döntés lehetőleg az utóbbi alapján hozandó.

Ha a véletlen igény folytonos eloszlást követ, amelynek sűrűségfüggvénye f , akkor az x változót is célszerű folytonosnak tekinteni. Ekkor, az előzővel analóg módon, a minimalizálandó kifejezésünk

$$g(x) = c \int_{-\infty}^x (x - z)f(z)dz + (d - c) \int_x^{\infty} (z - x)f(z)dz.$$

A számolás kedvéért átírva a $g(x)$ függvényt

$$\begin{aligned} g(x) &= c \int_{-\infty}^x (x - z)f(z)dz + c \int_x^{\infty} (x - z)f(z)dz + d \int_x^{\infty} (z - x)f(z)dz = \\ &= cx \int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz - c \int_{-\infty}^{\infty} zf(z)dz - dx \int_x^{\infty} f(z)dz + d \int_x^{\infty} zf(z)dz. \end{aligned}$$

Ezt x szerint deriválva kapjuk

$$g'(x) = c - d \int_x^{\infty} f(z)dz + dx f(x) - dx f(x) = d(F(x) - 1) + c,$$

ahol $F(x) = \int_{-\infty}^x f(z)dz$, a ξ változó eloszlás függvénye. A g függvény minimum helye a $g'(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapható meg, mely az $x_0 = F^{-1}((d - c)/d)$ értéket adja az előbbiek szerint.

Példa: Legyen egy újság kiskereskedelmi ára $c = 50$, az eladási ára pedig $d = 70$. A megfigyelések szerint egy elárúsító helyen a ξ kereslet egyenletes eloszlást követ 40 és 60 között. (Az egyszerűség kedvéért folytonos modellel számolunk, bár könnyen látható, hogy a diszkrét modell most ugyanezt az értéket adja.) Így az eloszlás függvény $F(z) = Pr(\xi < z)$,

$$F(z) = \begin{cases} 0 & \text{ha } -\infty < z \leq 40 \\ z/20 - 2 & \text{ha } 40 < z \leq 60 \\ 1 & \text{ha } 60 < z < \infty. \end{cases}$$

Az F a $(40, 60)$ intervallumon invertálható, és $F^{-1}(z) = 20z + 40$. Ezzel $F^{-1}((d - c)/d) = F^{-1}(2/7) = 45$ egész és $5/7$, azaz durván 46 újságot célszerű rendelni, mellyel a várható nyereség

$$\begin{aligned} (d - c)E - c \int_{-\infty}^x (x - z)f(z)dz - (d - c) \int_x^{\infty} (z - x)f(z)dz &= \\ 20 \int_{40}^{60} z/20 dz - 50 \int_{40}^{46} (46 - z)/20 dz - 20 \int_{46}^{60} (z - 46)/20 dz &= \\ = 1000 - 45 - 98 = 857. \end{aligned}$$

Példa: Legyen most $d = 3$, $c = 2$ és a ξ kereslet kövessen λ paraméterű Poisson eloszlást.⁴ Ekkor az optimális x érték meghatározásánál minimalizálandó

$$\sum_{i < x} c(x - i)p_i + \sum_{i > x} (d - c)(i - x)p_i$$

⁴ A Poisson eloszlás nagyon sok véletlen folyamatban, pl. bolyongások ill. telefonhívások stb. felbukkan, így sokkal természetesebb a feltételezése ebben az esetben, mint az egyenletes eloszlásnak.

a következő alakot ölti

$$f(x) := \sum_{i < x} 2(x-i) \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} + \sum_{i > x} (i-x) \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}.$$

Tekintsük x -et folytonos változónak; ekkor f -et „differenciálva” a

$$\frac{d}{dx} f(x) \approx \sum_{i < x} 2 \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} - \sum_{i > x} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} = 0$$

egyenlet gyökét kell megkeresnünk. Minden diszkrét eloszlásra $\sum_i p_i = 1$, így $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i e^{-\lambda} / i! = 1$, azaz

$$\sum_{i < x} 2 \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} = 2 - 2 \left(\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} - \sum_{i > x} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} \right).$$

Vegyük észre, hogy $\sum_{i > x} \lambda^i e^{-\lambda} / i!$ sokkal kisebb, mint $\lambda^x e^{-\lambda} / x!$, ha x nem túl kicsi λ -hoz képest, így az egyenlet nagyjából

$$0 = 1 - \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \approx 1 - \frac{(e\lambda)^x e^{-\lambda}}{\sqrt{2\pi x} x^x},$$

ahol az $n! \approx (\sqrt{2\pi n})(n/e)^n$ közelítést, azaz a Stirling formulát használtuk. Ezzel

$$\left(\frac{e\lambda}{x} \right)^x = \frac{e^\lambda}{\sqrt{2\pi x}},$$

amelynek e alapú logaritmusát véve

$$x(\log \lambda + 1) - x \log x = \lambda - \frac{1}{2} \log(2\pi x).$$

Ha λ és x közel van egymáshoz, akkor $\log \lambda \approx \log x$, melyet az előző egyenletbe írva az

$$x^* = \lambda - \frac{1}{2} \log(2\pi \lambda) \approx \lambda - \frac{1}{2} \log(\lambda) - 0.4$$

megoldás adódik.

Megjegyzés. Ez érdekes paradoxális helyzetet eredményezhet, ugyanis a ξ várható értéke λ , azaz ha a fenti, λ -nél kisebb beszerzést eszközölünk, akkor várhatóan néhány potenciális vásárló újság nélkül marad. Elképzelhető, hogy hosszabb távon elpártolnak hát néhányan, és ezzel a λ paraméter csökken. Ekkor az újabb „optimális” megoldás csökkenti a beszerzést, és ezt ismételve könnyen kifogyhatunk a vásárlókból, ami nyilván nem lehet cél. Érdekes tehát valahogyan beépíteni a modellbe azt, hogy a vásárló csalódása is egyfajta költség.

3.1. Gyakorlat

Bizonytalanság vs valószínűség

Az alábbi néhány probléma közös jellemzője a valóság és a modell kapcsolatának összetettsége.

3.1.1. Monty Hall paradoxon

A feladat egy tv vetélkedő műsorvezetőjéről kapta a nevét, a győztes versenyző jutalmának a meghatározása a cél. Egy színpadon három ajtó mögé egy-egy kecskét és egy autót⁵ helyeznek el, amit

⁵Bár nincs arra adat, hogy az autó Mercedes lett volna, sokan kecske-merci problémaként ismerik.

a közönség lát. Ezután becsukják az ajtókat, és a játékos, aki persze nem látta az elhelyezést, választhat egy ajtót, amely mögött találja a nyereményét. Növelendő a felhajtást, egy csavart tettek a folyamatba. A játékos választása nem végleges, Monty kinyit egy ajtót, ami mögött kecske van, és rákérdez, akar-e változtatni a játékos?

A kérdést úgy szokták feltenni, megéri-e változtatni? Sok kiváló matematikusnak problémát okozott ez, feltehetően azért, mert a feladat nem matematikai részét hajlamosak felületesen kezelni.

Az első kérdés, mi a preferenciája a játékosnak, az autót akarja vagy egy kecskét? Lehetnek rejtett költségek, okok, ami miatt valamelyik nyeremény elfogadhatatlan. Ha ez tiszta és az autó a cél, akkor sem elképzelhetetlen a kinyitott ajtó mögött lévő kecske választása. (Indokoljuk!)

Tegyük fel, hogy a játékos az autót akarja, itt szokás arra hivatkozni, hogy kezdetben $1/3$ valószínűséggel volt minden ajtó mögött az autó, majd hogyan változik ez. Viszont joggal mondhatja az Olvasó, nincs itt semmi véletlen, legfeljebb tudatlanság, hisz Monty és a közönség mindent tud. Monty esetleg azt is, mire szoktak tippelni ilyen esetben a játékosok (pl a középső ajtóra?) és csapdát állíthat. Véletlen attól lehet a probléma, ha a játékos hozzáköt egy kísérletet, mondjuk kockadobással jelöli ki az ajtók sorrendjét, és az sorrendben előtt választja először.

Innen feltehető, az elemi események $\omega_1 = \{k, k, a\}$, $\omega_2 = \{k, a, k\}$ illetve $\omega_3 = \{a, k, k\}$ melyek mind $1/3$ valószínűségűek. A két lehetséges stratégia maradni az eredetinel vagy váltani. A maradék az ω_3 esetén, $1/3$ nyer valószínűséggel, a váltás az ω_1 és ω_2 esetén, azaz $2/3$ valószínűséggel.

3.1.2. Biztosítási paradoxon

Az előadáson tárgyaltuk a biztosítások fogalmát és racionalitását (a hasznossági függvény segítségével lehetséges), itt körüljárjuk egy fiktív alkalmazás egyes elemeit. Tegyük fel, hogy lakásbiztosításban gondolkodunk, és a megkötés előtt tanulmányozzuk az adatainkat. Nagy a kísértés, hogy ilyen-olyan valószínűségekről beszéljünk, de ahogy láttuk már, ez a szóhasználat nem eleve indokolt.

A példánkban egy lakásbiztosítást vizsgálunk, ahol a tűz, árvíz és betörés merül fel, mint kockázat. A véletlentől függő kár

$$X := X_t + X_v + X_b,$$

ahol az X_t , X_v és X_b rendre a tűzből, vízből és betörésből adódó kárt jelöli.

káresemény típusa	gyakoriság (évente)	átlagos kár (HUF)	várható kár (HUF)
tűz	2×10^{-3}	5×10^5	10^3
árvíz	10^{-2}	10^5	10^3
betörés	2×10^{-2}	5×10^4	10^3

A Bernoulli elv használatához az X változó várható értékét $\mathbb{E}X$ -et kell megbecsülnünk. Első lépésként a káresemények valószínűségét a relatív gyakoriságukkal helyettesítjük. Az X_t, X_v és X_b indikátor változók, a várható értékük megegyezik az őket definiáló esemény valószínűségével. Azaz $\mathbb{E}X_A = \Pr(A)$, így rendre $\mathbb{E}X_t = 2 \times 10^{-3} \times 5 \times 10^5 = 10^3$, $\mathbb{E}X_v = 10^{-2} \times 10^5 = 10^3$, $\mathbb{E}X_b = 2 \times 10^{-2} \times 5 \times 10^4 = 10^3$. Végül a várható lineáris, azaz

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}[X_t + X_v + X_b] = \mathbb{E}X_t + \mathbb{E}X_v + \mathbb{E}X_b = 3000.$$

Az előadáson vett paradoxont megismételve, mivel átlagosan 3000 forint kár érhet, többet fizetni ésszerűnek tűnik. A másik oldalról, 3000 forint alatt a biztosító miért kötne üzletet? A feloldás abban lehet, ha a hasznossági függvényünk kb logaritmikus, akkor, ha csak nem rendelkezünk nagy vagyonnal, a várható kár kétszerese is lehet megfelelő ár. Valójában nem csak a túl magas ajánlatokat kell elutasítanunk, a várható kár alattiak is problémásak. Ekkor a biztosító működése kerülhet veszélybe és ezzel a szerződésünk.

Az áralkunál a ún. *red lining* egy gyakran használt technika: miután meghatároztuk a várható értéket, felveszünk egy $\alpha < \beta$ számokat, és az (α, β) intervallumon kívül eső ajánlatokat elutasítjuk. Ezzel elkerülhető a sodródás, illetve ellensúlyozható a másik oldal esetlegesen nagyobb tapasztalata.

3.1.3. Boríték paradoxon

Adott két boríték, amelyekben a számunkra ismeretlen x és $2x$ szám pozitív számok vannak, ezek a nyeremények. Kinyithatjuk az egyiket, majd a szám megtekintése után el kell döntenünk, megtartjuk-e ezt, vagy a másikat választanánk. Az alábbi gondolatmenet paradoxonhoz vezet. Ha x számot látunk az első borítékban, akkor a másikban $1/2 - 1/2$ eséllyel $2x$ illetve $x/2$ lapul. Azaz a váltás várhatóan x -ről $1/2(2x) + 1/2(x/2) = 5x/4$ -re növeli a nyereményt. Valójában ha $x, 2x$ volt a két szám akkor $3x/2$, míg az $x/2, x$ esetben $3x/4$ a várható nyeremény és a maradék illetve váltó stratégia ezeket adja.

A feladat a valószínűségi számítás egyik fekete báránya, sokszor helytelen magyarázatokat fűznek hozzá. Néha éppen kitagadják, mondván a nyereményeknek (x -nek) nincs eloszlása, így ez nem tekinthető valószínűségi számítási problémának. (Persze ha előttünk a két boríték, akkor egy érdemből választás létrehozza a megfelelő valószínűségi mezőt.)

Egy másik meglepő eredmény szerint van olyan algoritmus, amely nagyobb valószínűséggel adja a nagyobb számot, mint a kisebbet. Tekintsünk egy tetszőleges, szigorúan monoton növekvő f függvényt a $\mathbb{R}^+$ -ból a $(0, 1)$ intervallumba. Ha az x számot látjuk az először, akkor $f(x)$ valószínűséggel maradjunk ennél a borítéknál, ami a az f tulajdonságai miatt a nagyobb számot nagyobb valószínűséggel adja.

Ez a nyereség persze lehet tetszőlegesen kicsi ha a két számon az f nagyon közeli értéket vesz fel. Felmerülhet az emberben, hogy az f függvényt csak az első boríték kinyitása után rögzítse, de sajnos ez már nem segít, mert ekkor az $x/2, x$ illetve $x, 2x$ esetek egyforma valószínűségűek.

3.1. Feladat. Tegyük fel, hogy a Monty Hall paradoxonban 9 milliót ér az autó, míg a kecskék semmit. Mennyit ér egy véletlen információ az egyik kecske helyéről az első választás után?

3.2. Feladat. A kétszemélyes Monty Hall problémában két játékos választ ajtót, egymás döntéséről csak a következőt tudják. Ha ugyanazt választják, Monty újra rendezi a nyereményeket és új döntést kér. Ha pontosan az egyikük jelöl meg kecskés ajtót, ő kiesik, és csak a másiknak ajánlják fel a változtatás lehetőségét. Ha mindketten kecskét jelölnek előre, akkor érdemből ejti ki Monty az egyikőjüket. Mit tegyen egy játékos, ha bejut a 2. fordulóra?

3.3. Feladat. A Monty Hall problémában lehet több, mint három ajtó, $n - 1$ mögött kecske, egy mögött autó. Az első forduló után kinyit Monty egy kecskés ajtót, majd a játékos válthat és így haladnak tovább. (Minden kinyitott ajtó után maradhat vagy válthat, és addig mennek, míg két ismeretlen ajtó marad.) Mit tegyen a játékos $n = 4$ esetén? Hogyan játszon tetszőleges n -re?

3.4. Feladat. Tegyük fel, hogy n borítékban n különböző pozitív szám van. A játékos kinyithat egy borítékot és elveheti a nyereményt. Ha újat akar húzni, megteheti, de a korábbi nyereményekre nem mehet vissza (azaz ha végignézi az összeset, akkor az utolsót kapja). Milyen eséllyel szeresheti meg a legnagyobbat (és hogyan) ha $n = 3$? Mit tegyen, ha $n = 100$?

3.5. Feladat. Az 3.4 feladatban van egy ismeretlen $k \in \mathbb{R}^+$ és a számok $k, k + 1, \dots, k + 99$. Hogyan maximalizálhatja a várható nyereményt a játékos?

3.6. Feladat. Tegyük fel, hogy a hasznossági függvény $f(x) = \sqrt{x}$. Mekkora a biztosítási díj ésszerű, ha a V vagy p valószínűséggel pusztul el? Mi van, ha többféle kár keletkezhet, azaz p_i valószínűséggel $\alpha_i V$ -re csökken a vagyont értéke?

4. fejezet

Sztochasztikus programozás 2.

4.1. Hálózati megbízhatóság

Egy korábban tárgyalt modellhez hasonlóan adott egy irányítatlan G gráf az s és t kitüntetett pontokkal, továbbá G éleihez valószínűségeket rendelünk. Értelmezésünk szerint egy élhez rendelt szám az él járhatóságának (tkp. *létezésének*) a valószínűsége, és az élek létezései független események. Láttuk, hogy ekkor például a legnagyobb valószínűséggel létező $s-t$ út keresése a legrövidebb út problémára vezethető vissza.

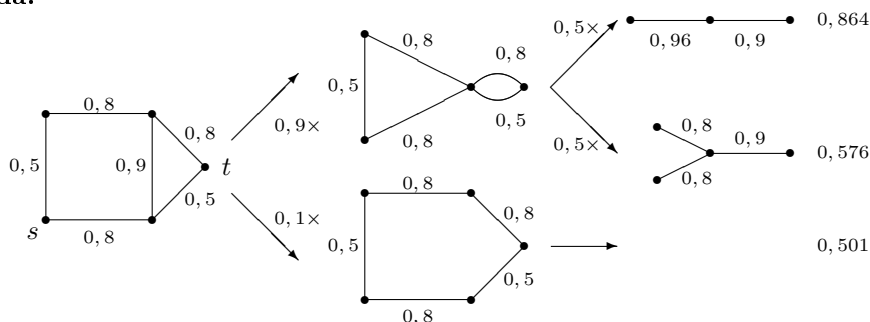
Sokkal nehezebb probléma kiszámolni azt, milyen valószínűséggel juthatunk el s -ből t -be. Ez olyannyira nehéz, hogy hatékony algoritmus nem ismert rá ez idő szerint, mi több, nem is remélt. Ez annál inkább szomorú, mert a probléma kezelhetősége lenne az előfeltétele olyan döntések vizsgálatához, hogy melyik él valószínűségét érdemes növelni és mennyivel, vagy éppen mit okozna a hiánya. Nem túl nagy feladatok azonban megoldhatók a lehetséges esetek megfelelő csoportosításával. A gondolat egy rekurzív algoritmus, amely az adatok számának függvényében *exponenciális* időt igényel.

Legyen G a kiindulási gráf és válasszunk ki egy $e \in E(G)$ élt, melynek valószínűségét jelöljük $p(e)$ -vel. Jelölje továbbá $G \setminus e$ és G/e rendre azokat a gráfokat amelyekből elhagytuk az e élt, illetve ahol az e él két végpontját egybeejtjük, azaz *összehúzzuk* e -t. Ekkor $Pr(G)$ -vel jelölve az $s-t$ elérhetőség valószínűségét

$$Pr(G) = (1 - p(e))Pr(G \setminus e) + p(e)Pr(G/e),$$

és így az eredeti feladatot két kisebb problémára vezettük vissza.

Példa:



Vegyük észre, hogy egy párhuzamos élpár, melyeknek valószínűsége p_1 és p_2 , helyettesíthető egy $p_1 + p_2 - p_1 p_2$ valószínűségű éllel. Az alsó ág kiszámolása hasonlóan megy, illetve ha olyan részgráfra jutunk, amit már kiszámoltunk, az felhasználható. Így $Pr(G) = 0,72 \times 0,9 + 0,501 \times 0,1 = 0,6981$. Összehasonlítva ezt a legnagyobb valószínűségű úttal látható, hogy míg az csak 0,516 valószínűségű, az összefüggőségre ennél sokkal nagyobb az esély.

4.2. Független alkatrészek megbízhatósága

Tegyük fel, hogy egy n alkatrészből álló szerkezet működéséhez mindnek a működése szükséges, és ezek egymástól függetlenül mennek tönkre. A szerkezet megépítésénél az i -edik alkatrészre két különböző megbízhatóságú és árú választási lehetőségünk van: egy q_i valószínűséggel működő, s_i árú és egy p_i valószínűséggel működő, r_i árú, ahol $q_i < p_i$ és $s_i < r_i$, $1 \leq i \leq n$. A műszaki előírás szerint a szerkezetnek p valószínűséggel működnie kell. A cél az alkatrészek olyan kiválasztása, amely a szabványnak megfelel és minimális költségű.

Használjuk az $x_i \in \{0, 1\}$ változót a modellben a q_i , ekkor $x_i = 0$, illetve a p_i , ekkor $x_i = 1$, valószínűséggel működő alkatrész alkalmazásának kódolására. Ekkor a működési valószínűség pontosan

$$\prod_{i=1}^n q_i \prod_{i=1}^n \left(\frac{p_i}{q_i} \right)^{x_i}$$

lesz, míg a költség

$$\sum_{i=1}^n c_i x_i + \sum_{i=1}^n s_i,$$

ha $c_i := r_i - s_i$, $1 \leq i \leq n$ esetén. A cél tehát a

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n c_i x_i \\ \prod_{i=1}^n q_i \prod_{i=1}^n \left(\frac{p_i}{q_i} \right)^{x_i} & \geq p \\ x_i \in \{0, 1\}, \quad & 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

feladat megoldása. Bevezetve a $b := \log(p / \prod_{i=1}^n q_i)$ és az $a_i := \log(p_i / q_i)$ jelölést ez ekvivalens az alábbi egész értékű LP feladattal:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n c_i x_i \\ \sum_{i=1}^n a_i x_i & \geq b \\ x_i \in \{0, 1\}, \quad & 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

ez a korábban ismertetett hátizsák problémához hasonlóan oldható meg; például a korlátozás és szétválasztás (*branch and bound*) módszerével.

4.3. A portfólió probléma

Mint említettük, az $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$, $x_i \geq 0$ feltételek mellett keresünk megoldást, a nyereségünk pedig a véletlentől függő $\sum_{i=1}^n \xi_i x_i$ összeg. Ha helyettesítenénk¹ a ξ_i -t a $\mu_i = E(\xi_i)$ várható értékével, egy triviális hátizsák feladathoz jutnánk:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^n \mu_i x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & = 1 \quad (*) \\ x_i & \geq 0 \end{aligned}$$

¹Ez a Bernoulli elv alkalmazása lenne jelen esetben.

Ha $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$, akkor a (*) optimális megoldása $x_1^* = 1$, $x_i^* = 0$, ha $1 < i \leq n$. Könnyen látható azonban, hogy általában, ha ismétljük ezt a stratégiát, az egy valószínűséggel csődhöz vezet. Sokféle próbálkozás történt elfogadható megoldás keresésére, amely egyszerre ígér jó befektetést és védelmet a csőd ellen.

4.3.1. Markowitz modell

Tegyük fel, hogy nemcsak a $\xi_1, \dots, \xi_n$ változók $\mu_i = E(\xi_i)$ várható értékei, hanem a változók C kovariancia mátrixa is rendelkezésre áll, ahol

$$c_{ij} = E[(\xi_i - \mu_i)(\xi_j - \mu_j)].$$

Ennek segítségével kifejezhetjük egy $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ portfólió (megoldás) *varianciáját*

$$\text{Var} \left(\sum_{i=1}^n \xi_i x_i \right) = E \left[\left(\sum_{i=1}^n (\xi_i - \mu_i) x_i \right)^2 \right] = x^T C x.$$

Egy x portfólió *hatékony*, ha várható hozama, $E[\sum_i \xi_i x_i]$, nem növelhető a variancia növelése nélkül, és varianciája nem csökkenthető a várható hozam csökkentése nélkül. A hatékony portfólió tehát egyfajta optimum: adott nyereséget feltételezve a minimális kockázattal jár, illetve egy rögzített kockázati szint mellett maximális nyereséget ígér. Ha $\rho > 1$ hozam elérése a célunk, akkor a következő ún. *kvadratikus programozási probléma* megoldása a válasz.²

$$\begin{aligned} \min \quad & x^T C x \\ \sum_{j=1}^n \mu_j x_j \quad & \geq \quad \rho \\ \sum_{j=1}^n x_j \quad & = \quad 1 \\ x_j \quad & \geq \quad 0 \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

A feladat egy x^* megoldását *optimális portfóliónak* nevezzük. Nyilvánvalóan egy optimális portfólió egyben hatékony portfólió is.

Megjegyzések: A feladat célfüggvénye ebben az esetben az ismeretlenek kvadratikus (négyzetes) függvénye, $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j x_i$ alakú, azaz nem lesz lineáris. Ezeknek a megoldásával nem foglalkozhatunk, de utalunk rá, hogy számos hatékony algoritmust fejlesztettek ki, melyek a kvadratikus programozási feladatok megoldására is alkalmasak. A másik felmerülő nehézség a szimmetrikus C mátrix $n(n+1)/2$ elemének kiszámítása. (Ezeket természetesen a korábbi megfigyelésekből kell meghatároznunk.) Mindkét nehézséget áthidalhatjuk, ha a kovariancia minimalizálása helyett megelégszünk az *átlagos abszolút eltérés* $E[|\sum_j (\xi_j - \mu_j) x_j|]$ mennyiség minimalizálásával.³

4.3.2. A Konno-Yamazaki-féle MAD modell

Konno és Yamazaki 1990-ben javasolt módszere így jár el, valamint a μ_i várható értékek és c_{ij} kovariancia együtthatók kiszámítását elkerüli; közvetlenül használja a megfigyelt adatokat. (Az átlagos abszolút eltérés angol neve után, *mean absolute deviation*, a modell neve MAD.)

Ha T megfigyelést végeztünk a múltban, r_{jt} jelöli a j -edik befektetés hozamát a t -edik megfigyelésnél és

$$r_j = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{jt}, \quad a_{jt} = r_{jt} - r_j,$$

² Ezt Markowitz 1952-ben publikálta, és 1990-ben közgazdasági Nobel-díjjal ismerték el az eredményeit.

³ Valójában a legfontosabb esetben, a többváltozós normális eloszlás esetében, a két módszer *ekvivalens*.

akkor a portfólió optimalizálás a következő alakban írható fel:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left| \sum_{j=1}^n a_{jt} x_j \right| \\
 (*) \quad & \sum_{j=1}^n r_j x_j \geq \rho \\
 & \sum_{i=1}^n x_j = 1 \\
 & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n.
 \end{aligned}$$

A (*) probléma nem LP, de hasonlóan a mátrixjátékoknál alkalmazott gondolathoz LP feladatra redukálható:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t \\
 -y_t \leq \quad & \sum_{j=1}^n a_{jt} x_t \leq y_t \quad t = 1, \dots, T \\
 & \sum_{j=1}^n r_j x_j \geq \rho \quad (**) \\
 & \sum_{i=1}^n x_j = 1 \\
 & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n.
 \end{aligned}$$

Ezzel a modellel lehetővé válik egészen nagy, való életbeli problémák megoldása. Nem szabad elfelejtenünk azonban, hogy a kapott megoldás csak egy javaslat: egy tényleges portfólió kiválasztásánál számtalan egyéb szempont is figyelembe vehető.

A szemi-MAD modell

Érdemes meggondolnunk a MAD modellt, és egy kicsit változtatni rajta. Idézzük fel, hogy a $\sum_{j=1}^n a_{jt} x_j$ kifejezés adja a (becsült) várható hozamtól való előjeles eltérést a j -edik időpontban. Kézenfekvő, hogy ne ezek abszolút értékeinek összegét minimalizáljuk, hanem csak azon tagoknak az abszolút érték összegét, amelyek *negatívak*. (Valóban, hiszen ha várható hozam becslésénél jobban teljesít a j -edik időpontban a portfólió, az nem kellemetlen, hanem éppen kedvező esemény.) Bevezetve az $|x|^- := x$, ha $x \leq 0$ és $|x|^- := 0$, ha $x > 0$ jelölést, a probléma a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left| \sum_{j=1}^n a_{jt} x_j \right|^- \\
 & \sum_{j=1}^n r_j x_j \geq \rho \\
 & \sum_{i=1}^n x_j = 1 \\
 & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n.
 \end{aligned}$$

Ennek a problémának az LP alakja könnyen megadható, és a MAD modellnél is egyszerűbb:

$$\begin{aligned}
\max \quad & \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t \\
\sum_{j=1}^n a_{jt} x_t & \geq y_t \quad t = 1, \dots, T \\
\sum_{j=1}^n r_j x_j & \geq \rho \\
\sum_{i=1}^n x_j & = 1 \\
y_t & \leq 0 \quad t = 1, \dots, T \\
x_j & \geq 0 \quad j = 1, \dots, n.
\end{aligned}$$

Megjegyzés: A MAD és a szemi-MAD módszerek nagyjából ekvivalensek, ha az optimális portfóliók hozamainak eloszlása megközelítően szimmetrikus. Ez nem szükségképpen áll fenn, így a jelen vizsgálatok szerint hasznosabbnak tűnik a szemi-MAD modell használata, hiszen a várható számítási ideje mindenképpen kisebb.

4.4. Gyakorlat

4.4.1. Újságárús

4.1. Példa. Legyen egy újság kiskereskedelmi ára $c = 50$, az eladási ára pedig $d = 70$. A megfigyelések szerint egy elárúsító helyen a ξ kereslet egyenletes eloszlást követ 40 és 60 között. (Az egyszerűség kedvéért folytonos modellel számolunk, bár könnyen látható, hogy a diszkrét modell hasonló értéket ad.) Így az eloszlás függvény $F(z) = \Pr(\xi < z)$,

$$F(z) = \begin{cases} 0 & \text{ha } -\infty < z \leq 40 \\ z/20 - 2 & \text{ha } 40 < z \leq 60 \\ 1 & \text{ha } 60 < z < \infty. \end{cases}$$

Az F a $(40, 60)$ intervallumon invertálható, és $F^{-1}(z) = 20z + 40$. Ezzel $F^{-1}((d - c)/d) = F^{-1}(2/7) = 45$ egész és $5/7$, azaz durván 46 újságot célszerű rendelni, amellyel a várható nyereség

$$\begin{aligned}
(d - c)E - c \int_{-\infty}^x (x - z)f(z)dz - (d - c) \int_x^{\infty} (z - x)f(z)dz = \\
20 \int_{40}^{60} z/20 dz - 50 \int_{40}^{46} (46 - z)/20 dz - 20 \int_{46}^{60} (z - 46)/20 dz = \\
= 1000 - 45 - 98 = 857.
\end{aligned}$$

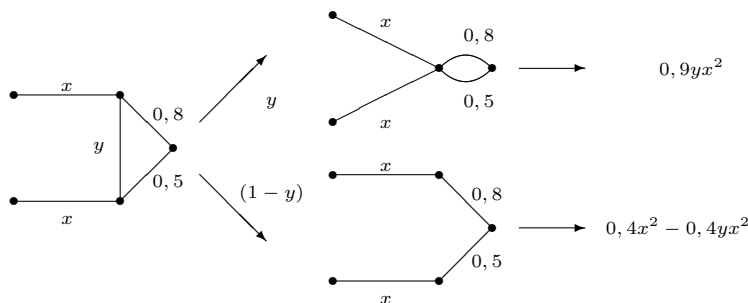
Megjegyzések. 1. Az inverz függvényt formálisan célszerű meghatározni. Ha $y = f(x)$, rendezzük át $x = g(y)$ formára, majd cseréljük fel x -et és y -t. Vagyis $y = g(x)$, és $g = f^{-1}$, azaz g az f inverze. 2. A 45 egész $5/7$ tört megoldás megvalósítható egy véletlennel: generáljunk $2/7 - 5/7$ elfoglalt érmét és a kísérlettől függően vegyük a 45 illetve 46 megoldásokat (lásd 4.2 feladat).

4.4.2. Hálózati megbízhatóság

Mint az előadáson kiderült, az ilyen típusú feladatok megoldásában kulcs fontosságú az Ω eseménytér felosztása, illetve az alábbi rekurzió:

$$Pr(G) = (1 - p(e))Pr(G \setminus e) + p(e)Pr(G/e).$$

4.2. Példa. Az alábbi G gráf éleinek egy részét változókkal súlyoztuk. A változók egy polinomjával fejezhető ki $Pr(G)$. A számolásában a 4.4 feladatban leírt egyszerűsítéseket használtuk.



Azaz $Pr(G) = 0,4x^2 + 0,5yx^2$.

4.4.3. Független alkatrészek megbízhatósága

Tegyük fel, hogy egy összetett gép k alkatrészből épül fel. Rendelkezésünkre áll n géphez elegendő (azaz nk darab) alkatrész, amelyek esetleg nem egyforma minőségűek, de ismertnek vesszük a meghibásodásuk valószínűségét. A meghibásodások egymástól függetlenül következnek be, és ha egy alkatrész nem működik, akkor az gép sem. A célunk úgy elosztani az alkatrészeket, hogy a lehető legtöbb működő gépünk legyen.

4.3. Példa. Egy okostelefon két kritikus alkatrésze a processzor (jele: P) és az akkumulátor (jele: A).

alkatrész típusa	$Pr(\text{működés})$ jó	$Pr(\text{működés})$ gyenge
processzor	0,9	0,8
akkumulátor	0,8	0,7

Minden fajta alkatrészből 1000 darab van, azaz összesen 2000 készülékhez elég. Egy készülék működésnek esélye a alkatrészei esélyének szorzata, az működő gépek várható értéke pedig ezek összege. Az előállítható konfigurációk ($P-A$): (1) jó-jó, (2) jó-gyenge, (3) gyenge-jó és (4) gyenge-gyenge.

Vegyük észre, hogy az egyes konfigurációk száma egyetlen változóval kifejezhető. Ha az (1) konfigurációból x darabot készítünk, akkor a maradék $1000 - x$ jó processzor gyenge akkumulátorral kerül össze, azaz a (2) konfiguráció $1000 - x$ esetben valósul meg. Jó akkumulátor szintén $1000 - x$ esetben kerül gyenge processzor mellé, míg a (4) konfiguráció x esetben valósul meg. A működő gépek M számának várható értéke ezzel

$$\mathbb{E}M = 0,9 \times 0,8x + 0,9 \times 0,7(1000 - x) + 0,8 \times 0,8(1000 - x) + 0,8 \times 0,7x,$$

azaz $\mathbb{E}M = 1270 + 0,01x$. A függvény az $x_0 = 1000$ -ben veszi fel a maximumát, ami 1270. A modell csak a jó-jó és a gyenge-gyenge konfigurációkat javasolja, nincs értelme keverni a különböző minőségű alkatrészeket.

Megjegyzés. Az utóbbi általában is igaz, azaz az optimális megoldást egy mohó algoritmus szerint kaphatjuk. A soron következő gépbe a megfelelő funkciójú alkatrészből a rendelkezésre álló legjobbat építjük be. Az algoritmus igazolását az Olvasóra hagyjuk, a lényegét a 4.5 feladatban mondjuk ki.

4.1. Feladat. Oldjuk meg a újságárús problémát $c = 50$, $d = 70$ értékkel, azt feltételezve, hogy a ξ kereslet eloszlása diszkrét egyenletes a $\{40, 41, \dots, 60\}$ számokon.

4.2. Feladat. Mutassuk meg, hogy a 4.1 feladat paramétereit mellett, folytonos egyenletes eloszlást használva, és a $x_0 = 45$ egész $5/7$ megoldást véletlenül növekszik a várható haszon.

4.3. Feladat. Egy folyó két partját három híd köti össze, mindegyik közepén egy kis szigettel. A középső híd szigetét a felsővel és az alsóval is összekötik hidak. Ha ezen nyolc hídelem mindegyike egymástól függetlenül $1/2$ valószínűséggel járható, akkor mi az esélye a két part összekötöttségének?

4.4. Feladat. (i) Ha a G gráf egy fa, akkor $Pr(G) = \prod_{e \in E(G)} p(e)$.

(ii) Ha G egy olyan kétpontú gráf, melyet az $e_1, \dots, e_k$ párhuzamos élek kötnek össze $p_1, \dots, p_k$ valószínűséggel, akkor $Pr(G) = \sum_i p_i - \sum_{i \neq j} p_i p_j + \sum_{i \neq j, i \neq \ell, j \neq \ell} p_i p_j p_\ell + \dots + (-1)^{k-1} \prod_i p_i$.

(iii) Ha G gráf olyan G_1 és G_2 gráfok uniója, melyeknek pontosan egy közös pontja van, akkor $Pr(G) = Pr(G_1)Pr(G_2)$.

4.5. Feladat. Adottak a $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ és az $y_1, y_2, \dots, y_n$ pozitív számok. Az $\{1, \dots, n\}$ számok egy permutációját π -vel jelöljük. A $\sum_{i=1}^n x_i y_{\pi(i)}$ maximális, ha $y_{\pi(1)} \leq y_{\pi(2)} \leq \dots \leq y_{\pi(n)}$ és minimális, ha $y_{\pi(1)} \geq y_{\pi(2)} \geq \dots \geq y_{\pi(n)}$.

4.6. Feladat (Sziget). Egy szigeten a mezőgazdaságba és a turizmusba lehet befektetni. Legyen ξ_1 és ξ_2 ezek nyeresége. Legyen $\mathbb{E}\xi_1 = 2$, $\mathbb{E}\xi_2 = 4$, illetve $c_{11} = c_{22} = 1$ és $c_{12} = c_{21} = -1$. Elérhető nulla kockázat? Mekkora nyereséggel? Mekkora a minimális kockázat, ha $c_{12} = c_{21} = 1/2$?

5. fejezet

Mátrixjátékok

A matematika és a játékok elmélete gyakran összekapcsolódik. Emlékezhetünk de Mère lovag problémájára, melyet Fermat és Pascal egyidőben oldott meg, és a feltételes valószínűség fogalmát helyesen ragadva meg, hozzájárult a valószínűségszámítás megalapozásához. A játékok fogalma azóta is számtalan alkalommal felbukkan a matematika különböző területein, a halmazelméletben, kombinatorikában, bonyolultságelméletben.

Az anyagiasabb XX. században a közgazdaságtudomány igénye szintén életre hívott néhány modellt. Ezek egyikét, az ún. *teljes információs, véges, kétszemélyes, zérusösszegű* játékokat vizsgáljuk részletesen. Ebben az esetben a játékosok *stratégiai* felsorolhatók és egy (i, j) párhoz hozzárendelhető az a_{ij} szám, amit a sorjátékos nyer, az oszlopjátékos pedig veszít, ha rendre az i -edik, illetve a j -edik stratégiájukat játszik. Így a tömörség kedvéért hívhatjuk ezeket a játékokat *mátrix játéknak*.

A mátrix játékok leírásának első lépéseit Emil Borel tette meg 1921 és 1927 között. Jelentős haladást ért el Neumann János: 1928-ban bebizonyította az azóta híressé vált *minimax* tételét és ezzel megmutatta *hol* kell keresni a megoldásokat. Körülbelül 20 évvel később ő adott választ a *hogyan* kérdésre is, rámutatva a mátrix játékok és a lineáris programozás kapcsolatára. Később Dantzig, Gale, Kuhn és Tucker munkája nyomán a mátrix játékok elmélete teljesen beleépült a lineáris programozás elméletébe. Ezt a felépítést követjük mi is.

5.1. Morra játék

Kezdjük egy példával, az ún. *Morra* játékkal. János és Emil a következők szerint játszik: egy fordulóban elrejtene egy vagy két forintot, majd tippelnek, mennyit dugott az ellenfél. Ha pontosan egy játékos tippel jól, akkor annyit nyer, amennyit *közösen* elrejtettek. Az összes többi esetben döntetlen lesz, pénzüknél maradnak. Nyilvánvaló, hogy egy-egy játékban mindketten a következő négy stratégia közül választhatnak: Rejts k -t és tippelj l -et (röviden $[k, l]$), ahol $k = 1, 2$ és $l = 1, 2$. Ezek János és Emil *tiszta stratégiái*, a hozzájuk tartozó A mátrix pedig:

		Emil tiszta stratégiái			
		$[1,1]$	$[1,2]$	$[2,1]$	$[2,2]$
János tiszta stratégiái	$[1,1]$	0	2	-3	0
	$[1,2]$	-2	0	0	3
	$[2,1]$	3	0	0	-4
	$[2,2]$	0	-3	4	0

Minden A valós mátrix definiál egy játékot, ahol a sorjátékos az egyik sort, az oszlopjátékos az egyik oszlopot választja minden fordulóban, és a sorjátékos nyereménye a választott sor és oszlop találkozásában levő a_{ij} elem. Az A mátrixot *kifizetési mátrixnak*, sorait/oszlopait pedig a sor/oszlop játékos *tiszta stratégiáinak* nevezzük.

Visszatérve a példára azt tapasztaljuk, hogy nem tudunk egyértelműen jó sort tanácsolni János számára bármelyikhez ragaszkodik is, veszíteni fog. Az az ötlete támadhat (és ez bekövetkezett),

hogy keverje tiszta stratégiáit, véletlenszerűen hol ezt játsza, hol azt. Játsszon pl. $[1,2]$ -t és $[2,1]$ -et $1/2 - 1/2$ valószínűséggel! Tegyük fel továbbá, hogy egy játék sorozatban Emil c_1 -szer választotta az $[1,1]$, c_2 -ször az $[1,2]$, c_3 -szor a $[2,1]$ és c_4 -szer a $[2,2]$ tiszta stratégiát ($c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = N$). Ha János véletlen választásai *függetlenek* voltak, akkor várhatóan fele-fele esetben találkozott az $[1,2]$ és $[2,1]$ stratégiája Emil bármely tiszta stratégiájával. Azaz $c_1/2$ -ször az $[1,1]$ -t, $c_2/2$ -ször az $[1,2]$ -t és így tovább. Összevetve ezeket az A mátrixszal, János várható nyeresége $(c_1 - c_4)/2$ forint. Így a legrosszabb esetben (ha $c_1=0$ és $c_4=N$), akkor játszmányként átlagosan 50 fillért veszít János, de nem többet.

Általában tegyük fel, hogy a sorjátékos egy $x = (x_1, \dots, x_m)$ vektor segítségével, míg az oszlopjátékos egy $y = (y_1, \dots, y_n)$ vektorral választja meg a játékát, azaz a sorjátékos x_i valószínűséggel választja meg az i -edik sort, míg az oszlopjátékos y_j -vel a j -edik oszlopot. Ekkor a sorjátékos várható nyeresége:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j = xAy.$$

Természetesen $x_i \geq 0$ és $y_j \geq 0$, ha $i = 1, \dots, m$ és $j = 1, \dots, n$, valamint $\sum_{i=1}^m x_i = 1$ és $\sum_{j=1}^n y_j = 1$.

Definíció. A nemnegatív komponensekből álló vektort *sztochasztikusnak* nevezzük, ha a komponenseinek összege egy. Egy sztochasztikus vektor által definiált stratégiát (azaz fordulóról fordulóra független választást a komponensek, mint valószínűségek szerint) hívunk *kevert stratégiának*.

János előbbi kevert stratégiája nem más, mint $x=(0, 1/2, 1/2, 0)$.

5.2. Minimax tétel

Az előbbiekből nyilvánvaló, hogy egy x kevert stratégiát választva a sorjátékos várható nyeresége legalább $\min_y xAy$, ahol y sztochasztikus vektor. A sorjátékos természetesen egy olyan x^* sztochasztikus vektort igyekszik találni, melyre az előző érték a lehető legnagyobb. Hasonlóan egy y kevert stratégia mellett az oszlopjátékos garantáltan nem veszít többet átlagosan, mint $\max_x xAy$, ahol x sztochasztikus vektor, célja pedig ezen érték minimalizálása. A két érték jelentéséből nyilvánvaló, hogy

$$\min_y xAy \leq \max_x xAy$$

Sokkal meglepőbb, hogy az egyenlőség is elérhető, azaz vannak olyan x^*, y^* sztochasztikus vektorok, melyekre

$$\min_y x^*Ay = \max_x xAy^*.$$

Ez az egyenlőség az ún. *minimax tétel*. x^* és y^* rendre a sor és az oszlopjátékos optimális stratégiája, hisz az általuk garantálnál jobb eredmény nem érhető el. Az állítás formája emlékeztethet bennünket a dualitásra, és valóban, igazából ekvivalensek, bár ez távolról sem nyilvánvaló.

5.1. Tétel. (Minimax tétel)

Minden $m \times n$ -es A mátrixra van olyan x^* m -dimenziós sztochasztikus sorvektor és olyan y^* n -dimenziós sztochasztikus oszlopvektor, melyekre

$$\min_y xAy = \max_x xAy,$$

ahol a minimumot az összes n -dimenziós sztochasztikus oszlopvektoron, míg a maximumot az összes m -dimenziós sztochasztikus sorvektoron vesszük.

Bizonyítás. Az első észrevétel, hogy $\min_y xAy = \min_j \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i$. Szavakban ez azt jelenti, hogy a sorjátékos egy x kevert stratégiájára van az oszlopjátékosnak olyan *tiszta* stratégiája, amely optimális számára. Ezt a következőképp láthatjuk be: Legyen $t = \min_j \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i$. Ha y tetszőleges

m -dimenziós sztochasztikus oszlopvektor, akkor

$$xAy = \sum_{j=1}^n y \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \right) \geq \sum_{j=1}^n y_j t = t \sum_{j=1}^n y_j = t,$$

így persze a $\min_y xAy \geq t$ is igaz. Másrészt mivel azok az y vektorok, amelyeknek egy komponense egy, a többi nulla, sztochasztikus vektorok is egyben, így

$$\min_y xAy \leq \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i$$

minden $j = 1, 2, \dots, n$ esetén és ez adja az állítás másik irányát. (Hasonlóképp belátható, hogy $\max_x xAy = \max_i \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j$.)

A fenti észrevétel nagyban egyszerűsíti a dolgunkat, mert a sorjátékos optimális stratégiájának meghatározásánál csak az oszlopjátékos tiszta stratégiáit kell figyelembe vennünk. Azaz

$$\begin{aligned} \max_j \min_i \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i & \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\ \sum_{i=1}^m x_i & = 1 \quad (*) \\ x_i & \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned}$$

A döntő észrevétel, hogy bár ez a probléma nem LP, de ekvivalens egy LP-vel.

$\max \quad z$

$$\begin{aligned} z - \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i & \leq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\ \sum_{i=1}^m x_i & = 1 \\ x_i & \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (**)$$

Valóban, a (**) probléma bármely $z^*, x_1^*, \dots, x_m^*$ optimális megoldása legalább egy $z - \sum a_{ij} x_i \leq 0$ egyenlőtlenségnek egyenlőséggel tesz eleget, így az LP optimuma $z^* = \min \sum a_{ij} x_j$.

Analóg módon, az oszlopjátékos optimális stratégiáját leíró

$$\begin{aligned} \min_i \max_j \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j & \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ \sum_{j=1}^n y_j & = 1 \\ y_j & \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

ekvivalens a

$\min \quad w$

$$\begin{aligned} w - \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j & \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ \sum_{i=1}^m y_j & = 1 \\ y_j & \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (***)$$

LP feladattal. Vegyük észre, hogy a (**) és (***) egymás duálisai, és mindkettőnek van lehetséges megoldása. Így a dualitási tétel szerint a (**) -nak van egy z^* , $x_1^*, \dots, x_m^*$ optimális megoldása, a (***) -nak van egy w^* , $y_1^*, \dots, y_n^*$ optimális megoldása úgy, hogy $z^* = w^*$. Mivel $z^* = \min_y x^* A y$, $w^* = \max_x x A y^*$, a tételt beláttuk. $\square$

Definíció. A közös $z^* = w^*$ értéke az A mátrix játék **értéke**. Az A mátrix játék **igazságos**, ha $z^* = w^* = 0$, **szimmetrikus**, ha $a_{ij} = -a_{ji}$.

Nyilván egy szimmetrikus játék (a szerepek felcserélhetősége miatt) igazságos. Így joggal várhatjuk, hogy a Morrában János (és persze Emil is) elkerülheti a veszteséget. Valóban, a Morrához tartozó LP

$$\begin{array}{rcccccccl} \max & z & & & & & & & \\ & z & & + & 2x_2 & - & 3x_3 & & \leq 0 \\ & z & - & 2x_1 & & & & + & 3x_4 \leq 0 \\ & z & + & 3x_1 & & & & - & 4x_4 \leq 0 \\ & z & & - & 3x_2 & + & 4x_3 & + & \leq 0 \\ & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 = 1 \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 \geq 0 \end{array}$$

János egy optimális megoldása $x^* = (0, 3/5, 2/5, 0)$, a játék értéke pedig természetesen $z^* = 0$. **Megjegyzés:** Vegyük észre, hogy a minimax tétel bizonyítása egyben algoritmust is ad az optimális stratégiák kiszámolására. (Neumann eredeti bizonyítása egy mély topológiai eredményt, az ún. Brouwer fixpont tételt használta, ami nem konstruktív.) Borel 3×3 -as és 5×5 -ös mátrixokra belátta a minimax tételt, de nem tudta túltenni magát azon a paradox jelenségen, hogy a játékosnak *nem* származik előnye abból, ha a kevert stratégiáját titokban tartja. (És persze hátránya sem abból, ha ezt közli.) Valószínűleg ez a tényleg meglepő eredmény gátolta meg abban, hogy bizonyítsa a tételt általánosan is.

5.3. Módosított Morra

A játékok elmélete (és a matematika) tele van meglepetéssel, és látszólagos ellentmondásokkal. Tegyük fel, hogy János és Emil változtattak egy kicsit a Morra szabályain, mert például nem tudják *egyszerre* deklarálni a tippjeiket, előre leírni pedig nincs kedvük. A józan ész azt súgja, erre nincs is szükség, hisz Emil azzal, hogy a saját tippjét bejelenti, semmit sem mond el arról, ami a kezében van. Természetes hát azt gondolni, hogy a módosított Morra is igazságos.

Alkalmazzuk rá az elméletünket. János az eddigieken kívül négy új tiszta stratégiával rendelkezik: $[k, S]$ és $[k, D]$ $k=1, 2$, ahol az első koordináta azt mondja meg, hányat rejtse, a második, hogy ugyanazt (S) vagy ellenkező (D) tippet mondja be, mint Emil. Az új mátrix a következő:

		Emil tiszta stratégiái			
		[1,1]	[1,2]	[2,1]	[2,2]
János tiszta stratégiái	[1,1]	0	2	-3	0
	[1,2]	-2	0	0	3
	[2,1]	3	0	0	-4
	[2,2]	0	-3	4	0
	[1,S]	0	0	-3	3
	[1,D]	-2	2	0	0
	[2,S]	3	-3	0	0
	[2,D]	0	0	4	-4

Megoldva a hozzátartozó LP-t egy optimális stratégia János számára például az $x^* = (0, 56/99,$

40/99, 0, 0, 2/99, 0, 1/99). Emil optimális stratégiája $y^* = (28/99, 30/99, 21/99, 20/99)$. A játék értéke pedig $z^* = w^* = 4/99$. Azaz a játék határozottan előnyösebb János számára, ami első pillantásra nehezen érthető. Feloldódik a paradoxon, ha arra gondolunk, hogy bár Emil nem ad információt a kezében lévő pénzről, de ad információt az éppen megjátszott stratégiájáról. Így az már nem teljesen ismeretlen János számára, következésképp ő ki is használhatja ezt.

5.4. Gyakorlat

5.4.1. $2 \times n$ -es és $m \times 2$ -es mátrixok

Az

$$A = A_6 = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

mátrixjáték megoldása.

Ha a játék mátrixa $2 \times n$ -es vagy $m \times 2$ -es, akkor a hozzátartozó LP feladat közvetlenül megoldható. Ugyanis például a $2 \times n$ -es esetben a sorjátékos kevert stratégiái egyváltozós optimalizálásra vezetnek, egy x kevert stratégiára $x = (\alpha, 1 - \alpha)$.

A 5.1. tétel bizonyításának első pontja szerint elég a

$$\max_{0 \leq \alpha \leq 1} \min\{a_{1,1}\alpha + a_{2,1}(1 - \alpha), a_{1,2}\alpha + a_{2,2}(1 - \alpha), \dots, a_{1,n}\alpha + a_{2,n}(1 - \alpha)\}$$

feladatot megoldani. Azaz a célfüggvény csak α -tól függ és a $[0, 1]$ intervallumon kell maximalizálni. A célfüggvény itt n darab lineáris függvény *alsó burkolója*. Az optimum lesz a játék v értéke, az α^* optimális helyből pedig az x^* optimális stratégia adódik $x^* = (\alpha^*, 1 - \alpha^*)$.

Analóg módon járhatunk el az $m \times 2$ esetben; itt az oszlopjátékos stratégiája $y = (\beta, 1 - \beta)$ alakú, a feladat pedig:

$$\min_{0 \leq \beta \leq 1} \max\{a_{1,1}\beta + a_{1,2}(1 - \beta), a_{2,1}\beta + a_{2,2}(1 - \beta), \dots, a_{m,1}\beta + a_{m,2}(1 - \beta)\}.$$

A játék érték újfent az optimum, az oszlopjátékos y^* optimális stratégiája a *felső burkoló* β^* minimum helyéből jön, $y^* = (\beta^*, 1 - \beta^*)$.

Szerencsés esetben vagy 2×2 mátrixra mindkét játékos optimális stratégiája megkapható, ilyen az előző példa befejezése:

$$\max_{0 \leq \alpha \leq 1} \min\{3\alpha - 2(1 - \alpha), -6\alpha + 4(1 - \alpha)\} = \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \min\{5\alpha - 2, -10\alpha + 4\},$$

amiből az optimum hely a két egyenes metszete $\alpha^* = 2/5$, $v = 0$. Az eredeti 4×5 játékra $x^* = (2/5, 0, 3/5, 0)$. Az y^* -hoz optimalizáljunk az *felső burkolón*

$$\min_{0 \leq \beta \leq 1} \max\{3\beta - 6(1 - \beta), -2\beta + 4(1 - \beta)\} = \min_{0 \leq \beta \leq 1} \max\{9\beta - 6, -6\beta + 4\},$$

és így $\beta^* = 2/3$, összeségében pedig $y^* = (0, 2/3, 0, 1/3, 0)^T$.

5.1. Feladat. Egy A valós mátrixra $m := \max_i m_i$, ahol $m_i := \min_j a_{i,j}$, $M := \min_j M_j$, ahol $M_j := \max_i a_{i,j}$. Mutassuk meg, hogy $m \leq M$. Általában, ha f egy $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, akkor $\sup_{x \in [0,1]} \inf_{y \in [0,1]} f(x, y) \leq \inf_{y \in [0,1]} \sup_{x \in [0,1]} f(x, y)$.

5.2. Feladat. Mutassuk meg, hogy a *kő-papír-olló* játékban az $x = (1/3, 1/3, 1/3)$ illetve a $y^t = (1/3, 1/3, 1/3)$ optimális stratégia pár, és a játék igazsága.

5.3. Feladat. Az egyenlőség játékban mindkét játékos, E és N 10 vagy 20 HUF értéket rejthet. E nyer, ha egyforma, míg N , ha nem egyforma értéket rejtettek. A kifizetés lehet (i) minden esetben 1 egység a győztesnek, (ii) a győztes kezében lévő érme értéke (iii) a vesztes kezében lévő érme értéke vagy (iv) a játékosok kezében lévő érme értékének összege. Mik az optimális stratégiák és a játék értéke ezekben?

5.4. Feladat. Az A_1 , A_2 mátrixokra a megfelelő játékok értékei v_1 és v_2 . Ha az A_1 és A_2 egyező dimenziósak, igaz, hogy az $A_1 + A_2$ mátrixjáték értéke $v_1 + v_2$? Ha összeszorozhatók, akkor az $A_1 A_2$ értéke $v_1 v_2$? Ha $\lambda \geq 0$, igaz, hogy a λA_1 játék értéke λv_1 ?

6. fejezet

Mátrixjátékok 2

Kártyajátékokban gyakran előfordul, hogy a játékosok blöffölnek, holott a lap bemutatása esetén veszítenének. (Hozzátehetjük, nemcsak kártyajátékokban van ez így.) Másrészt nem mindig kezdenyveznek licitet (azaz konfrontációt), habár azt biztosan nyernék. Ezt a viselkedést az emberi intuícióna hivatkozással szokták kezelni, mely úgymond felülemelkedik a hétköznapi logikán. Egy, Kuhn által 1950-ben vizsgált egyszerű játékkal illusztráljuk, hogy ez nem így van, s a pókerjátékos viselkedése tökéletesen racionális.

6.1. Kuhn féle módosított póker

A játékot 3 lappal (1, 2, 3) játszá, mindkét játékos egységnyi pénzt tesz be és kap egy lapot. Ezután felváltva licitálnak/fogadnak, emelnek egységnyivel vagy passzolnak. A játék akkor fejeződik be, ha egy emelésre emelés, passzra passz, vagy emelésre passz hangzik el. Az első két esetben megnézik a lapokat, és a nagyobb lapot tartó viszi az összes tétet, amit az ellenfél fogadott. A harmadik esetben a passzoló játékos elveszti a játék elején betett alapját.

Az alábbi öt kimenetel lehetséges ezek alapján (A és B a játékosok, a fogad, illetve passzol pedig értelemszerűen értendő)

A passzol,	B passzol	1 a magasabb lapot birtoklónak
A passzol,	B fogad,	A passzol 1 B-nek
A passzol,	B fogad,	A fogad 2 a magasabb lapot birtoklónak
A fogad,	B passzol	1 A-nak
A fogad,	B fogad	2 a magasabb lapot birtoklónak

A lapok leosztása után A -nak három *lehetősége* van. (Ezek még nem A tiszta stratégiái, azokba be kell foglalni azt is, hogy A ismeri saját lapját.)

1. Passz, és ha B fogad, újra passz
2. Passz, és ha B fogad, fogad
3. Fogad

Egy teljes utasítás készletet, amely A számára egyértelműen megmondja mit tegyen egy $x_1x_2x_3$ hármassal írhatunk le úgy, hogy az x_j lehetőséget játsza, ha a j lapot kapta. Például a 312 szerint A fogad, ha 1 van a kezében, mindig passzol, ha a 2-öt kapta, míg passzol az első fordulóban a 3-ra, a másodikban pedig fogad rá. Ezek a hármassok tehát A tiszta stratégiái. Hasonlóan B -nek négy lehetősége van.

1. Passz, bármit csinál A
2. Ha A passzol, passz; ha A fogad, fogad
3. Ha A passzol, fogad; ha A fogad, passz

4. Fogad, bármit csinál A.

B tiszta stratégiái az $y_1y_2y_3$ hármasokkal írhatók le úgy, hogy az y_j a j lap birtoklásakor játszandó lehetőség. A tiszta stratégia párok kimenetelét annak figyelembe vételével számítjuk ki, hogy a lehetséges hat leosztás egyforma valószínűségű. Például ha A a 312, B pedig az 124 tiszta stratégiát használja, akkor a hat lehetséges kimenetel:

A kezében	B kezében	játék menete	A nyereménye
1	2	A fogad, B fogad	-2
1	3	A fogad, B fogad	-2
2	1	A passzol, B passzol	+1
2	3	A passzol, B fogad, A passzol	-1
3	1	A passzol, B passzol	+1
3	2	A passzol, B passzol	+1

Így A várható nyereménye $= 1/6 (-2-2+1-2+1+1) = -1/3$. Hasonló módon kiszámíthatjuk a többi lehetőséget is. A $3 \times 3 \times 3 = 27$, míg B $4 \times 4 \times 4 = 64$ tiszta stratégiával rendelkezik, ami egy 27×64 -es mátrix vizsgálatát írja elő. Ennek közvetlen vizsgálata, bár lehetséges, meglehetősen komplikált lenne. Megpróbálkozunk hát redukcióval, amely jelentősen csökkenti a probléma mértékét, de szolgáltat egy-egy optimális kevert stratégiát, illetve ezeken keresztül a játék értékét is.

Kezdjük azzal, hogy az 1 lapot birtokolva bármely játékos fölöslegesen veszítene egy egységet, ha egy fogadásra fogadással válaszolna, nem pedig passzal. Ugyanígy, ha a 3-as lap van a kezében, értelmetlen lenne egy fogadásra passzal válaszolni, továbbá egy paszt követően nyugodtan fogadhat. Kijelenthetjük tehát, hogy A -nak van legalább egy optimális kevert stratégiája, amelyben:

- (i) Ha 1 van a kezében, nem játsza a 2. lehetőséget.
- (ii) Ha 3 van a kezében, nem játsza az 1. lehetőséget.

Ugyanígy B -nek van olyan optimális kevert stratégiája, amelyben:

- (i) Ha 1 van a kezében, nem játsza a 2. és 4. lehetőséget.
- (ii) Ha 3 van a kezében, nem játsza az 1., 2. és 3. lehetőségét.

Úgy képzeljük ezt, hogy a $2x_2x_3$ és az x_1x_21 tiszta stratégiák egyszerűen elérhetetlenek A számára, csak úgy, mint B számára a $2y_2y_3$, $4y_2y_3$, y_1y_21 , y_1y_22 és az y_1y_23 tiszta stratégiák. Elképzelhetjük, hogy ezzel elveszítjük az optimális stratégiák *egy részét*, de bizonynyal marad legalább egy optimális kevert stratégiája mind A -nak, mind B -nek. Ebből következően a redukált játék értéke megegyezik az eredetivel.

A fenti tiszta stratégiák kiküszöbölése után A -nak 12, B -nek 8 tiszta stratégiája marad. Mi több, további egyszerűtésre adódik alkalom. Ha A -nak 2 van a kezében, akár passzolhat is az első fordulóban, hisz B tartózkodik a 2. lehetőségtől, ha 1-et birtokol, illetve az 1. és 3. lehetőségtől, ha 3. tart a kezében. Így viszont A második lehetősége pont olyan jó, mint a 3. Eldobhatjuk hát A tiszta stratégiái közül az x_13x_3 -at. Hasonlóan, ha B a 2 lapot kapta, akkor az 1. lehetősége ugyan olyan jó, mint a 3., és 2. se rosszabb, mint a 4. Ezek alapján B tiszta stratégiái közül elhagyható az y_13y_3 és az y_14y_3 .

Ezek után A -nak már csak 8, B -nek pedig 4 tiszta stratégiája marad, a redukált játék mátrix pedig áttekinthetőbb (s céljainknak megfelelő).

	114	124	314	324
112	0	0	-1/6	-1/6
113	0	1/6	-1/3	-1/6
122	-1/6	-1/6	1/6	1/6
123	-1/6	0	0	1/6
312	1/6	-1/3	0	-1/2
313	1/6	-1/6	-1/6	-1/2
322	0	-1/2	1/3	-1/6
323	0	-1/3	1/6	-1/6

Az ebből keletkező LP feladatokat megoldva A számára egy optimális kevert stratégia az $(1/3, 0, 0, 1/2, 1/6, 0, 0, 0)$, B számára a $(2/3, 0, 0, 1/3)$, a játék értéke pedig $-1/18$. A játék, ahogy sejtettük, nem igazságos. A optimális stratégiáját célszerű egyszerűbb utasításokká konvertálni:

- (i) Ha 1 van a kezében, akkor keverje az 1. és 3. lehetőséget 5 : 1 arányban.
- (ii) Ha 2 van a kezében, akkor keverje az 1. és 2. lehetőséget 1 : 1 arányban.
- (iii) Ha 3 van a kezében, akkor keverje a 2. és 3. lehetőséget 1 : 1 arányban.

Vegyük észre, hogy az instrukció blöffre buzdít (azaz fogadásra az első menetben, mikor a legkisebb lapot - 1-et - kapta A) hat esetből egyszer, és tartózkodásra a tét emelésétől (azaz passzra az első menetben a legnagyobb lap birtoklásakor) az esetek felében. Hasonlóképp fogalmazható B optimális stratégiája:

- (i) Ha 1 van a kezében, akkor keverje az 1. és 3. lehetőséget 2 : 1 arányban.
- (ii) Ha 2 van a kezében, akkor keverje az 1. és 2. lehetőséget 2 : 1 arányban.
- (iii) Ha 3 van a kezében, akkor válassza mindig a 4. lehetőséget.

Ezzel B kis lapot (1, 2) tartva az esetek egyharmadában blöfföl, a licittől viszont nem tartózkodik sohasem.

6.2. Egyszerűsítési lehetőségek

6.2.1. Dominancia

Az előző játék elemzésében használt gondolatmenetet könnyen általánosíthatjuk. Így számos játékban jól követhető módon csökkenthetjük a játékosok tiszta stratégiáinak számát, míg a játék „lényege” nem változik.

Definíció. Az A kifizetési mátrix egy r sora **dominálja** az s sort, ha $a_{rj} \geq a_{sj}$ minden $j = 1, 2, \dots, n$ esetén. Hasonlóan egy r oszlop **dominálja** az s oszlopot, ha $a_{ir} \geq a_{is}$ minden $i = 1, 2, \dots, m$ -re.

6.1. Tétel. Egy mátrix játékra az alábbiak igazak:

- (i) Ha egy r sort dominál egy másik sor, akkor a sorjátékosnak van olyan x^* optimális stratégiája, ahol $x_r^* = 0$. Speciálisan, ha az r sort töröljük a mátrixból, akkor nem változik a játék értéke.
- (ii) Ha egy s oszlop dominál egy másik oszlopot, akkor az oszlopjátékosnak van olyan y^* optimális stratégiája, amelyben $y_s^* = 0$. Speciálisan, ha az s oszlopot töröljük a mátrixból, akkor nem változik a játék értéke.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az r sort dominálja az s sor. (Hasonlóan járhatunk el akkor, ha az s oszlop dominálja az r oszlopot.)

A minimax tétel miatt létezik egy x^* , y^* optimális stratégia pár a játékra. Módosítsuk az x^* stratégiát $\bar{x}$ -ra úgy, hogy $\bar{x}_i := x_i^*$, ha $i \notin \{r, s\}$, $\bar{x}_r := 0$ és $\bar{x}_s := x_s^* + x_r^*$.

(Szavakban: mikor a stratégia az r -edik sort játszáná, akkor játszuk helyette az s -ediket.) A dominancia miatt nyilvánvaló, hogy a sorjátékos várható nyeresége nem csökken. $\square$

6.1. Példa.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & -4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 7 & 4 & 5 \\ 7 & -3 & 8 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

A_1 -ben a 3. oszlop dominálja a 4. oszlopot.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 4 & 5 \\ 7 & -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

A_2 -ben a 3. sor dominálja a 2. sort:

$$A_3 = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -6 & -3 \\ 6 & -2 & 4 & 5 \\ 7 & -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

A_3 -ban az 1. oszlop dominálja a 3. oszlopot:

$$A_4 = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -3 \\ -2 & 4 & 5 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

A_4 -ben a 2. sor dominálja a 3. sort:

$$A_5 = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -3 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

A_5 -ben a 3. oszlop dominálja a 2. oszlopot:

$$A_6 = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

További egyszerűsítés már nem lehetséges, marad tehát az eredeti A mátrix 1. és 3. sora, illetve 2. és 4. oszlopa, mint tiszta stratégia. A probléma innen könnyen megoldható.

6.2.2. Nyeregpont

Jelentse m_i az i -edik sor minimumát, M_j pedig a j -edik oszlop maximumát, azaz $m_i := \min_j a_{ij}$, $M_j := \max_i a_{ij}$. Legyen továbbá $m = \max_i \min_j a_{ij}$, $M := \min_j \max_i a_{ij}$. Könnyen beláthatók az alábbiak:

(i) $n \leq M$

(ii) Ha $m = M$, akkor van olyan r és s , hogy $a_{rs} = m = M$.

Definíció. Ha $m = M$, akkor az $a_{rs} = m$ elemet az A mátrix **nyeregpontjának** nevezzük.

6.2. Tétel. Ha az A mátrixnak van egy a_{rs} nyeregpontja, akkor az r -edik sor választása a sorjátékos számára, illetve az s -edik oszlop választása az oszlopjátékos számára egy optimális stratégia párt alkot. Továbbá a játék értéke $v = a_{rs}$.

Bizonyítás. A sorjátékos nyereménye az i -edik sort választva legalább m_i , az oszlopjátékos vesztesége a j -edik oszlopot választva legalább M_j . Az r -edik sort, illetve az s -edik oszlopot választva a sorjátékos $m = a_{rs}$ nyereményt garantálhat magának, míg az oszlopjátékos legfeljebb $M = a_{rs}$ egységnyt veszít. $\square$

6.2. Példa. (i)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

	$M_1=3$	$M_2=2$	$M_3=1$	$M_4=3$	
$m_1=1$	0	-1	0	3	$m = 1 = M$, a nyeregpont a_{23} .
$m_2=1$	3	2	1	2	
$m_3=0$	1	2	0	1	

A játék értéke $v = 1$, az optimális stratégiák $x^* = (0, 1, 0)$, $y^* = (0, 0, 1, 0)$.

(ii) A nyeregpont és a dominancia segítségével végrehajtott egyszerűsítések függetlenek egymástól, elképzelhető, hogy az egyik működik, a másik nem.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Az $a_{33}=2$ nyilvánvalóan nyeregpont, de nincs a mátrixban sor vagy oszlop dominancia.

Megjegyzés: Az optimális kevert stratégiák a nyeregpont általánosításainak foghatók fel. Ugyanis ha nem létezik nyeregpont, akkor „ki kell lépni” egy magasabb dimenziós térbe (az eloszlások terébe) és ott keresni nyeregpontot. Neumann eredeti bizonyítása ezen a gondolaton alapult, és az ún. Brouwer fixpont tételt alkalmazva megmutatta az általánosított nyeregpont létezését.

6.3. Gyakorlat

6.1. Feladat (Számjáték). Két játékos választhat számot az $\{1, 2, \dots, 1000\}$ halmazból. Az egyszerűség kedvéért az x -et illetve y -t választó játékosokat x -nek és y -nak nevezzük. Az x játékos nyer, ha $x > y$ és $x \neq y + 1$. Ha $x = y + 1$, akkor az y játékos nyer. Ha $x = y$, döntetlen. A nyeremény egy, illetve döntetlen esetén nulla. Mi az optimális stratégia, illetve a játék értéke?

6.2. Feladat (Torpedó). Adott egy 2×3 -as tábla, amin egy dominót (hajót) helyez el az egyik játékos (hajós). A másik játékos (tüzér) megjelöl egy mezőt a táblán. A tüzér nyer, ha a hajó egyik mezőjét jelölte meg, különben a hajós nyer. Mi egy optimális stratégia pár és a játék értéke?

6.3. Feladat. Mutassuk meg, ha A egy 2×2 -es valós mátrix, akkor a hozzá tartozó játékban akkor és csak akkor van nyeregpont, ha dominanciával is egyszerűsíthető.

6.4. Feladat. Mutassuk meg, ha A antiszimmetrikus valós mátrix, azaz $A^t = -A$, akkor a hozzá tartozó játék értéke nulla.

7. fejezet

Nem zérus összegű játékok

Az életben előforduló játékoknak csak kis része zérus összegű, a legtöbb esetben nem ez a helyzet. Ezekkel a játékokkal hihetetlenül sokféle problémát modellezhetünk. Sajnos ennek ára van. A zérus összegű játékok elméletében oly hasznosnak bizonyult kevert stratégiák általában nem adnak jó választ, mi több, már azt sem könnyű megfogalmazni mit értsünk optimális megoldás alatt. Nem áll módunkban az összes koncepció ismertetése, még kevésbé részletes elemzése. Ehelyett vázolunk néhány lényeges ötletet, elsősorban olyanokat, melyek beleillenek az eddigi tárgyalásmódunkba.

7.1. Fogolydilemma

Széles körben ismert az ún. *Prisoner Paradox*, azaz az fogoly dilemma. Ez a vádalku lassan nálunk is meghonosodó intézménye által keletkező „játék”, egy klasszikus mátrixa:

	vall	tagad
vall	-5, -5	0, -10
tagad	-10, 0	-1, -1

A 7.1 példa a fogolydilemmával *stratégiaileg ekvivalens* matematikai szempontból, ha a történet más is.

7.1. Példa. Két ásványvizet forgalmazó vállalat (*Appolinaris* és *Perrier*) versenyeznek a piacon. A lehetséges stratégiák egy, illetve két dollárért adni az ásványvíz palackját. Az egyes stratégiák alkalmazása mellett keletkező hasznot táblázatban foglaltuk össze. A mátrixba írt számpár első eleme a sor-, a második az oszlopjátékos haszna az adott stratégia pár mellett.

Perrier

		1\$	2\$
<i>Apollinaris</i>	1\$	0, 0	5000, -5000
	2\$	-5000, 5000	0, 0

Könnyen látható, hogy palackonként 1 dollárért kell adni az ásványvizet. Ez akár a nyeregpont létezésére való hivatkozással, akár az első sor (oszlop) dominanciájának megmutatásával a második sor (oszlop) felett történhet.

Általában is kimondhatjuk: a dominancia a zérus összegű játékoknál látott módszerrel analóg módon használható. (Vegyük észre, hogy a fenti játék igazából felfogható zérus összegű játékként.)

7.2. Példa. Egy hasonló, bár kicsit komplikáltabb esetben két vállalat, a *Tökéletes* és a *Varázslatos*, műtyűröket árulhat 1, 2 vagy 3 dolláros áron. A lehetőségeket a korábbiak szerint rendeztük

táblázatba; a nyereség/veszteség mértékét az eladási ár és a piaci részesedés változásai miatt változó termelési költségek szabják meg.

Tökéletes

		1	2	3
Varázslatos	1	0, 0	50, -10	40, -20
	2	-10, 50	20, 20	90, 10
	3	-20, 40	10, 90	50, 50

Ez a játék nem zérus összegű, és nincs domináns stratégia sem. Új gondolatra van szükség, ez az ún. *Nash egyensúly* vagy *Nash equilibrium*.¹

Definíció. Egy stratégia pár **Nash egyensúlyi helyzet**, ha egyik játékos sem tudja stratégia változtatással növelni nyereményét, amennyiben a másik nem változtat a stratégiáján.²

A 7.1 példában a (3,3) stratégia pár *nem* Nash equilibrium, hisz a Varázslatos áttérve a 2 dolláros stratégiára növelheti hasznát. Hasonlóan beláthatjuk, hogy az (1,1) stratégián kívül nincs Nash egyensúlyi helyzet, így a mindkét cég által felszámított 1 dolláros ár a „reális” ár. Némely közgazdász úgy véli, a piacgazdaság versenyhelyzetének hatását sikerült így leírni: az alacsony árakat. Ha a verseny nem lehetséges (pl. nem egy dolláros műtűrök, hanem csak néhány cég által gyártott harci repülő a tét), akkor ez a mechanizmus nem képes alacsony árakat garantálni. A Nash egyensúlyi helyzet a dominanciát használó megoldások kiterjesztése, és a bemutatottnál jóval általánosabb feltételek mellett is létezik. Az alábbi példa szerint nem ad egyértelmű megoldást.

7.3. Példa. Két rádióállomás (Lökött és Laza) három profilból választhat. Sugározhatnak rockot (R), komolyzenét (K) és híreket (H). Az adott programok hallgatósága 50, 30 és 20 százalék. Ha egy állomás egyedül fed le egy programot, akkor megszerzi annak a hallgatóságát (és a vele arányos reklámbevételt), ha a másikkal együtt, akkor fele-fele arányban osztoznak. Mátrix formában:

Laza

		R	K	H
Lökött	R	25, 25	50, 30	50, 20
	K	30, 50	15, 15	30, 20
	H	20, 50	20, 30	10, 10

Könnyen ellenőrizhető, hogy a 7.3 példában csak a (K,R) és az (R,K) stratégiapár Nash egyensúlyi helyzet. Nehezebb eldönteni, mit jelent ez a megoldás. Melyik valósul majd meg, és milyen stratégiát válasszanak a játékosok? Úgy tűnik, a Nash equilibriumok meghatározása távolról sem ad választ kérdéseinkre. Egy lehetséges továbblépési irány annak vizsgálata, mit hozhat a *koordináció* játékosok egyes csoportjai között, illetve hogyan *osztható el* a közösen szerzett haszon. Ez a motivációja az ún. *n-személyes játékok* tanulmányozásának. Mielőtt rátérnénk erre, megemlí-tünk még egy példát, amely azt sugallja, hogy a Nash egyensúlyi helyzet valamilyen értelemben jó megoldás, és ha problémáink is vannak vele az az élet és nem a modell meghatározatlanságából ered.

7.4. Példa (Mely oldalán haladjunk az útnak játék). Két autó halad egymással szemben és a találkozásnál dönteniük kell az út jobb vagy bal szélére húzódnak. A kissé fiktív 10 értéket rendelve a biztonságos továbbhaladáshoz, illetve az összeütközéshez az alábbi mátrixot kapjuk:

¹A fogalmat és a vele kapcsolatos legfontosabb tételeket John Forbes Nash alkotta meg az 50-es évek elején. Később a német Reinhard Selten és a magyar Harsányi János ért el jelentős eredményeket ebben az irányban, amit 1994-ben a hármójuk között megosztott közgazdasági Nobel-díjjal ismertek el.

²Lásd az *n-személyes játékok*, kevert stratégiák és Nash tételét a Függelékben.

Honda

		<i>Bal</i>	<i>Jobb</i>
<i>Fiat</i>	<i>Bal</i>	1, 1	-10, -10
	<i>Jobb</i>	-10, -10	1, 1

Mind a *(Bal, Bal)*, mind a *(Jobb, Jobb)* Nash egyensúlyi helyzet, de ez nem sokat segít rajtunk, ha belekényszerülünk egy ilyen játékba. A társadalmi konvenciókkal szokás koordinálni az efféle szituációkat, s mint tudjuk a konkrét esetre mindkét megoldásra van példa. Így aztán nem is baj, hogy a modellünk megoldása nem egyértelmű. Ha az lenne, akkor már nem az életet írná le, hanem az előítéleteinket.

7.2. Galamb-Héja

Az evolúció biológiában nagyon fontos szerepet kaptak egyes nem zérusösszegű játékok. Az alábbi példa az ún. *Galamb-Héja* modell, amellyel egy populáció *evolúciósan stabil stratégiáit* (ESS) szemlélthetjük. Egy galambfajon belül - találkozás esetén - két egyed között kétféle viselkedés lehetséges: kitérnek egymás elől vagy harcba kezdenek. A kitéréssel esetleg elvesztenek egy erőforrást (pár, élelem, fészkelőhely stb), míg a konfliktus sérüléssel, energia vagy idő pocsklással jár. Ha mindkét galamb kitérne, akkor az egyikük megszerzi az erőforrást, legyen ez egyenlő esélyű. Egy „galamb” azaz békés egyed találkozik egy „héjával” azaz egy harcias egyeddel, akkor a „galamb” kitér, elkerüli a sérülést, de elveszti az erőforrást, ami így a „héja” zsákmánya lesz. Két „héja” találkozása mindkettőre nézve jelentős hátránnyal jár.

Az egyedek vagy egyik, vagy a másik viselkedést követik; kérdés, melyik a jobb? Könnyen látható, akár egyik, akár másik viselkedés válik kizárólagossá, egy olyan egyed, amely ettől a normától elér jelentős előnybe kerül.

Tehát a cél egy olyan stabil helyzet megtalálása, melyben az egyed számára nincs ok változtatni a viselkedésén. Oldjuk meg ezt egy fiktív kifizetési mátrix esetén.

	galamb	héja
galamb	2, 2	-1, 5
héja	5, -1	-9, -9

Az „galamb-héja” eloszlás x és $1-x$, azaz x valószínűséggel békés egy egyed, $1-x$ -szel agresszív. Feltéve, hogy a populáció elég nagy, egy „galamb” várhatóan $2x - 1(1-x) = 3x - 1$, egy „héja” pedig $5x - 9(1-x) = 14x - 9$ nyereséget könyvelhet el. Egyensúly, azaz ESS akkor van, ha $3x_0 - 1 = 14x_0 - 9$, vagyis $x_0 = 2/3$. Tehát a populáció előre meghatározható arányban mutat békés vagy harcias viselkedést. Nem meglepő, ha csökkentjük az erőforrás értékét (ami 3 volt a példában) illetve az időét, akkor a békés, míg ha a sérülés kockázatát (8), akkor a harcias viselkedés terjed a populációban. Az alábbi felállásban $x_0 = 9/10$.

	galamb	héja
galamb	1, 1	0, 2
héja	2, 0	-9, -9

Ezt az aprócska modellt nehéz túlértékelni: meglepően széles a jelenségek köre, melyre képes magyarázatot adni.

7.3. Gyakorlat

7.3.1. $2 \times n$ -es és $m \times 2$ -es bimátrixok

A mátrixjátékokhoz hasonló gondolatmenetet követhetünk, csak most a Nash egyensúly feltételét kell felírunk.

	galamb	héja
galamb	2, 2	-1, 5
héja	5, -1	-9, -9

Ha a sorjátékos az $(x, 1-x)$, az oszlopjátékos az $(y, 1-y)$ stratégiát követi, a sorjátékos várható kifizetése $f(x, y) = 2xy - x(1-y) + 5(1-x)y - 9(1-x)(1-y)$. Hasonlóan az oszlopjátékos kifizetése $g(x, y) = 2xy + 5x(1-y) - (1-x)y - 9(1-x)(1-y)$.

Az egyensúly feltétele

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \text{ és } \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = 0.$$

Az adott számokkal ez

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2y - 1 + y - 5y + 9 - 9y = 8 - 11y = 0, \text{ azaz } y = \frac{8}{11},$$

míg

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = 2x - 5x - 1 + x + 9 - 9x = 8 - 11x = 0, \text{ azaz } x = \frac{8}{11}.$$

Az „galamb-héja” játék másképpen is megoldható, illetve egy dinamikát is használhatunk. Legyen x valószínűséggel békés egy egyed, $1-x$ -szel agresszív. Feltéve, hogy a populáció elég nagy, egy „galamb” várhatóan $2x - 1(1-x) = 3x - 1$, egy „héja” pedig $5x - 9(1-x) = 14x - 9$ nyereséget könyvelhet el. Egyensúly, sőt ESS van, ha $3x_0 - 1 = 14x_0 - 9$, vagyis $x_0 = 8/11$. Tehát a populáció előre meghatározható arányban mutat békés vagy harcias viselkedést.

7.3.2. Cournot-duopólium

Adott két vállalat, amely azonos minőségben ugyanazt a terméket állítja elő. Az első q_1 , a második q_2 mennyiséget dob piacra, ahol az ár a $p(q) = 50 - 3(q_1 + q_2)$ inverz keresleti függvény szerint alakul. A vállalatok darabonkénti önköltsége rendre 2 illetve 3, azaz a maximalizálni kívánt hasznuk

$$f(q_1, q_2) = (p(q_1, q_2) - 2)q_1 \text{ és } g(q) = (p(q_1, q_2) - 3)q_2.$$

A 2×2 -es játékokhoz hasonlóan a (q_1^*, q_2^*) egyensúly, ha megoldása a

$$\frac{\partial f(q_1, q_2)}{\partial q_1} = 0 \text{ és } \frac{\partial g(q_1, q_2)}{\partial q_2} = 0$$

egyenletrendszernek. Jelen esetben ez a $q_1 = 49/9$, $q_2 = 46/9$, ami a $p = 55/3$ árat eredményezi, a hasznok pedig rendre $(49)^2/27$ és $(46)^2/27$. Figyelemre méltó, hogy a monopólium vagy kartell, ha az első vállalat technológiáját használja, akkor $q = q_1 = 8$ termelést és $p = 26$ piaci árat hoz, a haszon pedig 192. Azaz kevesebb vásárló jut hozzá a termékhez, és ők is jóval drágábban.

7.1. Feladat (Nemek harca). A példában feltételezzük az alábbi kifizetési mátrixot:

	mozi	színház	
mozi	5, 4	3, 3	Mi lehet a történet, mik a Nash egyensúlyok? Van köztük ESS?
színház	0, 0	4, 5	

7.2. Feladat (Vezérürü). A példában feltételezzük az alábbi kifizetési mátrixot:

	indul	vár	
indul	3, 3	4, 5	Mi lehet a történet, mik a Nash egyensúlyok? Van köztük ESS?
vár	5, 4	1, 1	

7.3. Feladat (Rapoport). Tegyük fel, hogy egy bimátrix játékban a játékosok $a < b < c < d$ kifizetéseket kapnak. Hányféle különböző mátrix lehetséges? Hány, ha két mátrixot egyenlőnek tekintünk, ha oszlop vagy sorcseréssel átvihetők egymásba? Írjuk fel a fogolydilemma, galamb-héja, nemek harca és a vezérürü játékok mátrixait.

7.4. Feladat (Pozőr). *A megfigyelések szerint megjelenhet egy 3. stratégia a galamb-héja játékban, az ún. pozőr. A pozőr eljátsza a héját, elveszi a galambtól az erőforrást, de osztozik (harc nélkül) egy másik pozőrrel. Egy héja ellen többet veszít, mint egy galamb, de kevesebbet, mint egy héja. Egészítsük ki a fenti mátrixot, hogy a Nash egyensúlyban mindhárom stratégia megjelenjen.*

7.5. Feladat. *Egy versenyben három vállalat állítja elő ugyanazt a terméket, 1, 2 és 3 önköltséggel. Az ár $p(q) = 20 - q$. Mi lesz a Cournot egyensúly? Mi várható, ha az első és a harmadik vállalat megegyezik?*

7.6. Feladat. *Egy tuskéspikónak egy terület értéke 1 perc, a játék pedig, hogy kivárják míg a másik távozik. Hogy írhatunk fel folytonos illetve diszkrét modellt? Mi a Nash egyensúly?*

8. fejezet

Kooperatív játékok

Az n -személyes kooperatív játékok vizsgálatát Neumann János és Oskar Morgenstern kezdte el. Mint korábban utaltunk rá, nem valamiféle „három személyes sakk”, vagy a futball leírása a cél, hanem a racionális osztozkodás törvényeinek tanulmányozása abban az esetben, mikor a játékosok egy tetszőleges csoportjának „ereje” ismert.

Definíció. Egy n -személyes kooperatív játék alatt a következő rendszert értjük:

Adott az $I = \{1, 2, \dots, n\}$, a játékosok halmaza. Egy $S \subseteq I$ halmazt **koalíciónak** nevezzük, és adott egy $v : 2^I \rightarrow \mathbf{R}$ (a koalíciókhoz egy valós számot rendelő) ún. **karakterisztikus függvény** úgy, hogy $v(\emptyset) = 0$

Gyakran az ún. szuperadditivitást is megköveteljük a karakterisztikus függvényre:

Definíció. Egy v karakterisztikus függvény **szuperadditív**, ha $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$, amennyiben $S, T \subseteq I$ és $S \cap T = \emptyset$.

A $v(S)$ jelenti szemléletesen azt a hasznot (kifizetést, hatalmat stb.), amit az S -ben lévő játékosok egymással összefogva együttesen elérhetnek (akár a többiek ellenére is). A $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ az $S \cap T = \emptyset$ esetén azt fejezi ki, hogy a két csoport összefogva legalább annyit elér, mint a külön szerzett haszon összege.¹

8.1. Példa. Ingatlan fejlesztés (két vásárlós piac)

Egy földműves által birtokolt föld mezőgazdasági értéke 100 ezer dollár. Két vevő pályázik rá, az egyik lakásépítéssel 200 ezer, a másik bevásárló központ létrehozásával 300 ezer dollár hasznot érhet el a föld felhasználásával. Vegyük észre, hogy míg a földműves egymagában is képes hasznát venni a földjének, addig az építők nem. Ez a következő 3-személyes játéknak felel meg:

$I = \{1, 2, 3\}$, ahol 1: földműves, 2, 3 pedig a két vevőjelölt.

$$\begin{array}{ll} v(\emptyset) = 0 & v(\{1, 2\}) = 200000 \\ v(\{1\}) = 100000 & v(\{1, 3\}) = 300000 \\ v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0 & v(\{2, 3\}) = 0 \\ & v(\{1, 2, 3\}) = 300000 \end{array}$$

Általában az érték a különböző tulajdonosok felhasználásában a , b és c , ahol $a < b < c$.

8.2. Példa (Szavazási játékok). Ez a klasszikus 50%+1 szavazattal megvalósuló döntéseket modellezi. $I = \{1, \dots, n\}$

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{esetén „S nyer”} \\ 0 & \text{esetén „S veszít”} \end{cases}$$

Az egyenlő értékű szavazattal:

¹ Az összefogással ezt el is tudják érni, hisz megtehetnék, hogy külön-külön játszanak $v(S)$ illetve $v(T)$ nyereményt szerezve, majd utána egyesítenék a nyereményüket.

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{ha } |S| > n/2 \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

8.3. Példa (A súlyozott szavazási játékok). Az i -edik játékosnak w_i szavazata van és q szavazat kell a győzelemhez. $I = \{1, \dots, n\}$

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \sum_{i \in S} w_i \geq q \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Jelöljük ezt a játékot a rövidebb $(q; w_1, w_2, \dots, w_n)$ formával. Vegyük észre, hogy például a $(3; 2, 2, 2, 2)$ játék v karakterisztikus függvénye nem szuperadditív.

Definíció. Egy n -személyes játék **egyszerű**, ha a v karakterisztikus függvény csak 0 és 1 értéket vesz fel.

8.4. Példa. Az ENSZ Biztonsági Tanács működése.

A BT-nek 5 állandó és 10 ideiglenes tagja van. Egy határozat életbe lép, ha mind az öt állandó és legalább négy ideiglenes tag megszavazza. Ez felírható, mint $(39; 7, 7, 7, 7, 7, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ súlyozott többségi játék.

8.1. Elosztások

Az n -személyes kooperatív játékokban a játékosoknak jutó *ésszerű* kifizetéseket, az ún. *elosztásokat* akarjuk meghatározni. Egy elosztást egy $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ n -dimenziós valós vektorral írhatunk le, ahol x_i az i -edik játékos része. Aesophus meséjével ellentétben feltesszük, hogy az osztzkodást csak a v karakterisztikus függvény befolyásolja, valamint a játékosok tisztában vannak az érdekeikkel és megvédik azokat.² Szóba jön az alábbi két szempont:

1. $x_i \geq v(\{i\})$, $i = 1, \dots, n$, szóban „Egyéni racionalitás”
2. $\sum_{i=1}^n x_i = v(I)$, avagy „Pareto optimalitás.”

Az 1. pont azt fejezi ki, hogy az egyik játékos sem fogad el olyan elosztást, amelynél jobbat (mindenféle koalíció nélkül) egymaga is képes elérni. A $\sum_{i=1}^n x_i \leq v(I)$ annyit tesz: nem osztható több, mint amennyi van. Az egyenlőség viszont megköveteli, hogy a játékosok által megszerezhető maximális összeget osszuk szét. (Azaz egyfajta kooperációra „kényszeríthetjük” a játékosokat.)

Definíció. Az olyan $x \in \mathbf{R}^n$ vektorokat, amelyekre teljesülnek az 1. és 2. feltételek, **elosztásnak** hívjuk, az összes elosztás halmazát pedig $A(v)$ -vel jelöljük.

8.5. Példa. $I = \{1, 2, 3\}$, $v(S) = 0$, ha $|S| < 2$, míg $v(S) = |S|/3$ különben.

Ekkor az elosztások halmaza

$$A(v) = \{x \in \mathbf{R}^3 : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^3 x_i = 1\}.$$

Az elosztások $A(v)$ halmaza „túl nagy”, így általában nem tekinthető megoldásnak. Különböző, többé-kevésbé ésszerű feltételekkel szokás szűkíteni az $A(v)$ -t, és a kapott részhalmazt deklarálni a létrejöhethető megoldások halmazának. A sokféle megközelítés számos vitára adott alkalmat és a mai napig sem lehet egyértelmű győztest hirdetni. Mi három koncepciót fogunk vázolni, a *mag* (core), a *stabil halmaz* és a *Shapley érték* fogalmát. Ezek mindegyike nagyon tanulságos.

Definíció. Ha $x, y \in A(v)$, akkor egy $\emptyset \neq S \subseteq I$ **hatékonyan preferálja** x -et y -nal szemben, ha $x_i > y_i$ minden $i \in S$ esetén és $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$. Jelben $x \succ_S y$.

²Valóján ez elég erős és az életben ritkán teljesülő feltétel.

Az elnevezés és a motiváció nyilvánvaló. Az $x_i > y_i$ $i \in S$ miatt az S -beli játékosok jobban kedvelik x -et, mint y -t. A $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$ a hatékonyság, ugyanis az S koalíció kikényszerítheti az y elvetését és a számára előnyösebb x_i ($i \in S$) kifizetést garantálhatja tagjainak.

8.6. Példa. Vegyük a $(2; 1, 1, 1)$ játékot és az $x = (1/3, 5/12, 1/4)$, $y = (1/2, 1/3, 1/6)$ és $z = (9/24, 1/3, 7/24)$ vektorokat. Látható, hogy $x, y, z \in A(v)$, továbbá $x \succ_{\{2,3\}} y$ ($x_2 = 5/12 > 1/3 = y_2$, $x_3 = 1/4 > 1/6 = y_3$, és $x_2 + x_3 = 5/12 + 1/4 \leq v(\{2,3\}) = 2/3$). Hasonlóan belátható a $z \succ_{\{1,3\}} x$ reláció; ugyanakkor nincs olyan $\emptyset \subsetneq \{1,2,3\}$, amelyre $z \succ_S y$. (Ez azt jelenti, hogy míg egy rögzített S -re a „ $\succ_S$ ” reláció tranzitív. Ezzel szemben ha úgy definiálunk egy „ $\succ$ ” relációt, hogy $x \succ y$ akkor és csak akkor, ha létezik olyan $\emptyset \neq S \subseteq I$, melyre $x \succ_S y$, akkor ez a „ $\succ$ ” reláció nem tranzitív.)

8.2. A mag és kiszámítása

Definíció. Egy n -személyes játék **magja** azon x elosztásokból áll, amelyekkel szemben egyetlen y ielosztást sem preferál hatékonyan valamely nem üres S koalíció. Jelben a mag $C(v) := \{x \in A(v) : \text{nem létezik olyan } y \in A(v) \text{ és } \emptyset \neq S \subseteq I, \text{ hogy } y \succ_S x\}$.

8.7. Példa. Vegyük a $(7; 8, 1, 1)$ súlyozott többségi játékot. Itt $v(S) = 1$, ha $1 \in S$ és $v(S) = 0$, ha $1 \notin S$. Ezért $A(v) = \{x : x_1 \geq 1, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \text{ és } \sum_{i=1}^3 x_i = 1\} = \{(1, 0, 0)\}$, azaz $|A(v)| = 1$. Mivel egy elosztás van csak, $A(v) = C(v)$, és így $C(v) = \{(1, 0, 0)\}$. Mint várható volt, az 1 „viszi az egészet.”

Egy v karakterisztikus függvényű játék $C(v)$ magjában lévő vektorok joggal tekinthetők ésszerű megoldásoknak. Ezzel azonban nem értünk a problémák végére.

8.8. Példa. Számoljuk ki a $(2; 1, 1, 1)$ súlyozott többségi játék magját. Tegyük fel, hogy $y \in A(v)$. Ekkor valamely $1 \leq i < j \leq 3$ esetén $y_i + y_j < 1$, hisz $y_1 + y_2 + y_3 = 1$. Megmutatjuk, hogy van olyan $z \in A(v)$ és $\emptyset \neq S \subseteq \{1, 2, 3\}$, amelyre $z \succ_S y$. Az indexek cseréjével feltehetjük, hogy $y_1 + y_2 < 1$, s mintegy a „maradékot” (y_3 -at) szétosztjuk az első és második játékos között: $z_1 := y_1 + y_3/2$, $z_2 := y_2 + y_3/2$. Így persze $z \succ_{\{1,2\}} y$. Másszóval bármely $y \in A(v)$ -re létezik olyan $z \in A(v)$ és nem üres $S \subseteq \{1, 2, 3\}$ halmaz, hogy $z \succ_S y$. Ez persze azt jelenti, hogy a mag az üres halmaz, vagyis nem tudunk jó megoldást javasolni.

Szükségünk van tehát egyrészt a mag szerkezetének jobb megértésére a kényelmesebb kiszámítás érdekében, másrészt tennünk kell valamit, ha a mag üres. Az első problémára vonatkozik a mag leírása, mint konvex poliéder.

8.1. Tétel. Egy v karakterisztikus függvényű n -személyes játékban az x elosztás eleme a magnak akkor és csak akkor, ha minden S koalícióra a $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$ egyenlőtlenség teljesül.

Bizonyítás. Vegyünk egy olyan x vektort, amelyre teljesül az összes, a feltételben levő egyenlőtlenség. Tegyük fel, hogy van olyan $y \in A(v)$ és nem üres $S \subset I$, hogy $y \succ_S x$. Ekkor $y_i > x_i$ minden $i \in S$ és $\sum_{i \in S} y_i \leq v(S)$ a hatékony preferencia miatt, amiből a

$$\sum_{i \in S} y_i \leq v(S) \leq \sum_{i \in S} x_i < \sum_{i \in S} y_i$$

ellentmondás adódik.

A másik irány bizonyításához tekintsünk egy, a feltétel valamelyik egyenlőtlenségét megsértő $x \in A(v)$ vektort, és legyen $\emptyset \neq S \subset I$, amelyre sérül; azaz $\sum_{i \in S} x_i < v(S)$. Találni akarunk egy olyan $y \in A(v)$ vektort és $\emptyset \neq T \subset I$ halmazt, amelyre $y \succ_T x$. Az előbbieket miatt $v(S) = \sum_{i \in S} x_i + \epsilon$, ahol $\epsilon > 0$. Az y -t úgy állítjuk elő, hogy az ϵ -t „felosztjuk” az S koalíció tagjai között, azaz $y_i := x_i + \epsilon/|S|$, ha $i \in S$. Kérdés, mi legyen y_i , ha $i \notin S$? Az y vektornak benne kell lennie $A(v)$ -ben, így az egyéni racionalitás feltételeit nem sértheti, azaz $y_i \geq v(\{i\})$ minden $i \in I$. Ezek

automatikusan teljesülnek, ha $i \in S$, hiszen $x \in A(v)$ és $y_i > x_i \geq v(\{i\})$ ha $i \in S$. Teljesülnie kell továbbá a Pareto optimalitásnak, vagyis $\sum_{i=1}^n y_i = v(I)$. Keressük hát az y_i -ket $i \notin S$ -re a következő alakban:

$$y_i = v(\{i\}) + \delta_i,$$

ahol $\delta_i \geq 0$. Ezzel

$$\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i \in S} x_i + \epsilon + \sum_{i \notin S} v(\{i\}) + \sum_{i \notin S} \delta_i,$$

amiből a $\sum_{i \in S} x_i + \epsilon = v(S)$ és $\sum_{i=1}^n y_i = v(I)$ miatt következik a

$$v(I) = v(S) + \sum_{i \notin S} v(\{i\}) + \sum_{i \notin S} \delta_i.$$

Átrendezve a δ_i -kre az alábbi feltétel adódik:

$$\sum_{i \notin S} \delta_i = v(I) - v(S) - \sum_{i \notin S} v(\{i\}).$$

Nevezzük a fenti egyenlet jobboldalát δ -nak, és defináljuk majd a δ_i -ket a $\delta_i := \delta / (n - |S|)$ formulával. Ekkor az y elosztás lesz, amennyiben $\delta \geq 0$. (Valóban, hisz $\sum_{i=1}^n y_i = v(I)$ és $y_i \geq v(\{i\})$ $i \in I$ -re.) Végül δ nem negativitásának megmutatására használjuk a v függvény szuperadditivitását; $\sum_{i \notin S} v(\{i\}) \leq v(I \setminus S)$. Így

$$\delta = v(I) - v(S) - \sum_{i \notin S} v(\{i\}) \geq v(I) - v(S) - v(I \setminus S) \geq v(I) - v(I) = 0,$$

ahol az utolsó egyenlőtlenségben ($v(I) \geq v(S) + v(I \setminus S)$) ismét a szuperadditivitást használtuk, és ezzel kész vagyunk. $\square$

8.9. Példa. A tétel segítségével kiszámíthatjuk az ingatlan fejlesztés játék magját.

$\mathbf{v}$	$\mathbf{A(v)}$	$\mathbf{C(v)}$
$v(\{1\}) = 100000$	$x_1 \geq 100000$	$A(v)$ elemei, melyekre
$v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$	$x_2 \geq 0$	(iii) $x_1 + x_2 \geq 200000$
$v(\{1, 2\}) = 20000$	$x_3 \geq 0$	(i) $x_1 + x_3 \geq 300000$
$v(\{1, 3\}) = 30000$	(ii) $\sum_{i=1}^3 x_i = 300000$	$x_2 + x_3 \geq 0$
$v(\{2, 3\}) = 0$		
$v(\{1, 2, 3\}) = 300000$		
(i) és (ii) $\Rightarrow x_2 = 0$, (iii) $\Rightarrow x_1 \geq 200000$, azaz a mag a következő:		

$$C(v) = \{x : 200000 \leq x_1 \leq 300000, x_2 = 0, x_3 = 300000 - x_1\}.$$

A várakozásnak megfelelően a 2. játékos kizáródik az üzletből, és a földet a 3. veszi meg egy 200 és 300 ezer dollár közti összegért. Ennél többet nem tudunk mondani, de ez természetes, hiszen a valóságban sem dönthető el előre, mi lesz az ár. (Az függhet az alkufolyamattól.)

8.3. Stabil megoldások

Amennyiben a játék maga üres, nem tudunk ésszerű megoldást javasolni, és ez is hasznos információ. Elképzelhető más, stabilitást figyelembe vevő szempont alapján történő választás $A(v)$ -ből. Ez volt Neumann és Morgenstern eredeti gondolata.

Egy korábbi definíciónk egy G irányított gráfban egy független és domináló $S \subseteq V$ pont-halmaz *mag* vagy *stabil halmaz*. (Sajnos a magyar terminológia könnyen zavart okozhat, mivel ez

a mag az angolban *kernel*, míg az előző tétellel karakterizált mag az *core*.) Egy n -személyes játék elosztásainak $A(v)$ halmaza felfogható egy G_v gráfként; $V(G_v) = A(v)$, és $(x, y) \in E(G_v) \Leftrightarrow x \succ_S y$ valamely $S \subseteq I$ -re.

Definíció. Egy $B \subseteq A(v)$ halmaz **stabil megoldás** a v karakterisztikus függvénnyel meghatározott játékban, ha B mag (kernel, stabil halmaz) a G_v gráfban.

Megjegyzés: A „másik” mag (core) is leírható a G_v gráf segítségével: $C(v)$ azon pontok halmaza $A(v)$ -ben, amelyekbe nem fut be él, ha mint G_v -beli pontként tekintjük őket.

Az első pillantásra nem nyilvánvaló, mi értelme van a stabil halmazokat megoldásnak tekinteni. Az egyik motiváció lehet a stabil párosítási probléma, amelynek a megoldásai éppen egy gráf stabil halmazai. Továbbá stabil halmaz létezhet akkor is, ha a mag (core) üres.

8.10. Példa. A $(2; 1, 1, 1)$ súlyozott többségi játékra láttuk, hogy $C(v) = \emptyset$.

Legyen

$$B = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right), \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right), \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}.$$

Belátjuk, hogy B stabil halmaz.

B független halmaz: Ha pl. $(1/2, 1/2, 0) \succ_S (1/2, 0, 1/2) \Rightarrow S = \{2\}$, de $1/2 \leq v(\{2\}) = 0$ nem teljesül; ellentmondás. A többi eset bizonyítása teljesen hasonló módon történhet.

B domináló halmaz: Legyen $x \in A(v)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$. Ha $x_1 > 1/2$, akkor $x_2, x_3 < 1/2$, de ekkor $(0, 1/2, 1/2) \succ_{\{2,3\}} (x_1, x_2, x_3)$. A szimmetria miatt feltehető, hogy $x_1 \geq \max\{x_2, x_3\}$, így az előző megjegyzés miatt $x_2, x_3 \leq 1/2$. Ha x_2 vagy éppen $x_3 = 1/2$, akkor $x \in B$. Ha viszont mindkettő kisebb, mint $1/2$, akkor $(0, 1/2, 1/2) \succ_{\{2,3\}} (x_1, x_2, x_3)$. Hasonló megfontolással adódik, hogy kontinuum sok stabil halmaz van: minden $c \in (0, 1/2)$ esetén a $B_c := \{(x_1, 1 - c - x_1, c) : 0 \leq x_1 \leq 1 - c\}$ halmaz stabil.

8.11. Példa. A 8.9 példában kiszámoltuk az ingatlanfejlesztés játék magját. Bármely n -személyes játékra, ha B egy stabil halmaz, akkor $C(v) \subseteq B$. Esetünkben egy B stabil halmaz feltétlenül bővebb $C(v)$ -nél ($B \setminus C(v) \neq \emptyset$), hiszen az $x = (100000, 100000, 100000) \in A(v)$ elosztásra nem létezik olyan $y \in C(v)$ és $S \subseteq \{1, 2, 3\}$, amelyre $y \succ_S x$. Megmutatjuk, hogy $B := \{(x_1, x_2, x_3) : 100000 \leq x_1 \leq 300000, x_2 = 0, x_3 = 300000 - x_1\}$ egy stabil halmaz. B független: Legyen $x, y \in B$ és $x \succ_S y$.

Mivel $x_2 = y_2 = 0$, az $x_1 > y_1$, akkor és csak akkor, ha $x_3 < y_3$, illetve $x_3 > y_3 \Rightarrow x_1 < y_1$. Tehát $S = \{1\}$ vagy $S = \{3\}$, ami lehetetlen.

B domináló: Tegyük fel, hogy egy $y \in B$ -re $y_2 > 0$. Legyen ekkor $x = (x_1, x_2, x_3) := (y_1 + y_2/2, 0, y_3 + y_2/2)$. Nyilvánvalóan $x \in B$ és $x \succ_{\{1,3\}} y$.

Egy stabil halmaz tehát a mag által sugalltól eltérő megoldásokat is megenged. Érdekes tulajdonsága, hogy „osztzkodást” írhat elő egy játékban, amelynek üres a magja (lásd 8.10 példa). Sajnos nem pusztán a nehezen kiszámíthatóságban hasonlít a magra; 1969-ben Lucas bebizonyította, van olyan játék, melynek nincs stabil halmaza. Egy karakterében különböző megközelítést jelent a *Shapley érték*, amely a játékosok „erejét”, alkupozícióját hivatott modellezni.

8.4. A Shapley érték

A cél egy olyan Φ függvény definiálása, amely minden v karakterisztikus függvénnyel leírt játékhoz hozzárendel egy $\Phi(v) \in \mathbf{R}^n$ vektort. Az i -edik játékos *Shapley értéke* $\Phi_i(v)$, ha $\Phi(v) = (\Phi_1(v), \dots, \Phi_n(v))$ és az alábbi axiómák teljesülnek Φ -re:

1. Legyen π az $I = \{1, \dots, n\}$ halmaz egy permutációja, és $w(S) = v(\pi(S))$ minden $S \subseteq I$ -re. Ekkor $\Phi_i(w) = \Phi_{\pi(i)}(v)$.
2. $\sum_{i=1}^n \Phi_i(v) = v(I)$.

3. Ha $v(S \setminus \{i\}) = v(S)$ minden $S \subseteq I$ -re, akkor $\Phi_i(v) = 0$.
4. Additivitás. Ha v és v' karakterisztikus függvények az I halmazon és $w = v + v'$, akkor $\Phi(w) = \Phi(v) + \Phi(v')$.

Megjegyzés: Az első axióma azt fejezi ki, hogy a játékosok ereje független az elnevezésüktől. A második a Pareto optimalitás analogonja, a megszerezhető haszon teljes felosztása. A harmadik szerint nulla az „értéke” annak a játékosnak, akinek lényegében nincs befolyása a játék menetére. Végül a negyedik azt követeli meg, ha két független játékot játszanak ugyanazon játékosok, akkor a nyereményük a két játék összege lesz. Az igazán meglepő, hogy *van*, ráadásul pontosan egy, Φ függvény, amely eleget tesz ezeknek a szigorú feltételeknek.

8.2. Tétel. (Shapley) *A szuperadditív³ karakterisztikus függvények halmazán létezik egy egyértelműen meghatározott Φ függvény, amely eleget tesz az 1-4 axiómáknak. Továbbá*

$$\Phi_i(v) = \sum_{i \in S \subseteq I} \gamma(|S|)(v(S) - v(S \setminus \{i\})),$$

ahol

$$\gamma(k) = \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}.$$

8.12. Példa (Blokoló kisebbség). *(51; 49, 48, 3)*

$$\Phi_i(v) = \sum_{i \in S \subseteq I} \gamma(|S|)(v(S) - v(S \setminus \{i\})) = \sum_{i \in S, |S|=2} \frac{1}{3!}(1-0) = \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3},$$

azaz $\Phi(v) = (1/3, 1/3, 1/3)$.

8.13. Példa (Az ingatlanfejlesztés Shapley értékei).

$$\begin{aligned} \Phi_1(v) &= \frac{2!}{3!}(v(\{1\}) - v(\emptyset)) + \frac{1}{3!}[(v(\{1, 2\}) - v(\{1\})) + (v(\{1, 3\}) - v(\{1\}))] + \\ &\quad + \frac{2}{3!}(v(\{1, 2, 3\}) - v(\{2, 3\})) = 216666 \frac{2}{3} \\ \Phi_2(v) &= \frac{1}{3!}[(v(\{1, 2\}) - v(\{2\})) + \frac{2}{3!}(v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 3\}))] = 16666 \frac{2}{3} \\ \Phi_3(v) &= \frac{1}{3!}[(v(\{1, 3\}) - v(\{1\})) + \frac{2}{3!}(v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 2\}))] = 66666 \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Látható, hogy a 2. számú játékosnak is fontos szerepe van (míg a $C(v)$ elosztásaiban semmit nem kapott). Kaphat díjazást az egyes játékosoktól (maradjon felverni az árat) és a hármastól is (tűjön el végre).

8.5. A Shapley tétel következményei

Az egyszerű játékokra (azaz, melyekben a $v(S) = 0$ vagy 1 minden S koalícióra) a Shapley érték kiszámítása egyszerűsödik.

$$\Phi_i(v) = \sum_{i \in S \subseteq I} \gamma(|S|)(v(S) - v(S \setminus \{i\})),$$

és most, $v(S) - v(S \setminus \{i\}) = 1$ pontosan akkor, ha $v(S) = 1$ és $v(S \setminus \{i\}) = 0$ különben.

Legyen $\mathcal{S}_i$ ($i \in S \subseteq I$) az i -t tartalmazó nyerő koalíciók halmaza, melyek az i -t elhagyva már nem nyerők. Így

$$\Phi_i(v) = \sum_{i \in S \in \mathcal{S}_i} \gamma(|S|).$$

³Ha ezután Shapley értéket említünk, mindig feltesszük a szuperadditivitást.

8.14. Példa (ENSZ, Biztonsági Tanács (39; 7, 7, 7, 7, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)). Egy nem állandó i tagra azon S minimális koalíciók esetén nem nulla a $v(S) - v(S \setminus \{i\})$, amelyek mind az öt állandó tagot és pontosan három ideiglenes tagot tartalmaznak az i -edik tagon kívül. Ezek száma $\binom{9}{2}$, míg $\gamma(9) = 8!6!/15!$, azaz

$$\Phi_i(v) = \binom{9}{2} \frac{8!6!}{15!} = \frac{4}{5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13} \approx 0,001865$$

Az első és második axióma miatt ha j egy állandó tagja a BT -nek, akkor

$$\Phi_j(v) = \frac{1 - 10\Phi_i(v)}{5} = \frac{1 - \frac{8}{7 \cdot 11 \cdot 13}}{5} \approx 0,1963.$$

Az öt állandó tag birtokolja tehát a döntéshozatal több, mint 98%-át, míg az ideiglenes tagok befolyása a 2%-ot sem éri el. A példa mutatja, hogy egy súlyozott többségi játékban a játékosok valódi ereje és a szavazataik száma között messze nem lineáris a kapcsolat, illetve a gyengébb játékosok érdekérvényesítő képessége tragikusan kicsi. Elképzelhető viszont, hogy 7 ideiglenes tag összefog és mindig együtt szavaz. Ekkor együttes erejük $1/6$, csak úgy, mint az állandó tagoké ebben az esetben, míg a kimaradó 3 nem állandó tag ereje nulla! A régi tanács, *divide et impera*, matematikailag is alátámasztható.⁴

Egyszerű játékok esetében elegáns valószínűségi interpretációja adható meg a Shapley értéknek. **Definíció.** [Pivot] Egy π permutációjára I -nek egy i elem *pivotális*, ha az i -t π -ben megelőző elemek által vesztes, de i -t hozzávéve győztes koalíciót alkotnak.

Ha egy S nyerő, $S \setminus \{i\}$ vesztes koalíció, akkor S -re nézve $(s-1)!(n-s)!$ számú permutációban lesz i pivotális, ahol $s = |S|$.

8.3. Tétel. Egy v karakterisztikus függvényű játékban $\Phi_i(v)$ egyenlő annak a valószínűségével, hogy i pivotális, amennyiben az I bármely permutációját azonos valószínűséggel választjuk.

8.15. Példa. Az ausztrál parlamenti rendszer működése

Az ország hat szövetségi államból áll, és törvényeket ezek képviselői, illetve a szövetségi kormányzat hozza. Az elfogadás feltétele, hogy legalább öt állam, vagy két állam és a szövetségi kormányzat támogassa az adott törvényt. Egy permutációban a szövetségi kormányzat pivotális, ha a harmadik, a negyedik vagy ötödik helyen áll. Ezek egymást kizáró események, valószínűségük $1/7 + 1/7 + 1/7 = 3/7$. Az egyes államok Shapley értéke egyenlő, $4/7 \cdot 1/6 = 2/21$, ami a szövetségi kormányzat erejének két kilencede.

Felmerül a kérdés, mi a Shapley érték és az elosztások kapcsolata.

8.4. Tétel. Minden n -személyes játékra a $\Phi(v)$ vektor eleme az elosztások $A(v)$ halmazának.

Bizonyítás. A 2. axióma szerint $\sum_{i=1}^n \Phi_i(v) = v(I)$, így a Pareto optimalitás teljesül. Az egyéni racionalitás $\Phi_i \geq v(\{i\})$ egyenlőtlenségei a következők miatt állnak. Először is a $v(S) - v(S \setminus \{i\}) \geq v(\{i\})$ a szuperadditivitás miatt. Ezzel

$$\Phi_i(v) \geq \sum_{i \in S \subset I} \gamma(|S|)v(\{i\}) = v(\{i\}) \sum_{i \in S \subset I} \gamma(|S|) = v(\{i\}),$$

hiszen

$$\sum_{i \in S \subset I} \gamma(|S|) = \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{k-1} \gamma(k) = \sum_{i=1}^n \frac{(n-1)!(k-1)!(n-k)!}{(n-k)!(k-1)!n!} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = 1.$$

□

⁴Ezért is ideiglenesek a tagországok, így valószínűtlen az összefogásuk, illetve könnyebben befolyásolhatók.

Összefoglalva az eddigieket, egy n -személyes játék elképzelhető megoldásai (kifizetései) az elosztások $A(v)$ halmaza. Mivel $A(v)$ -t

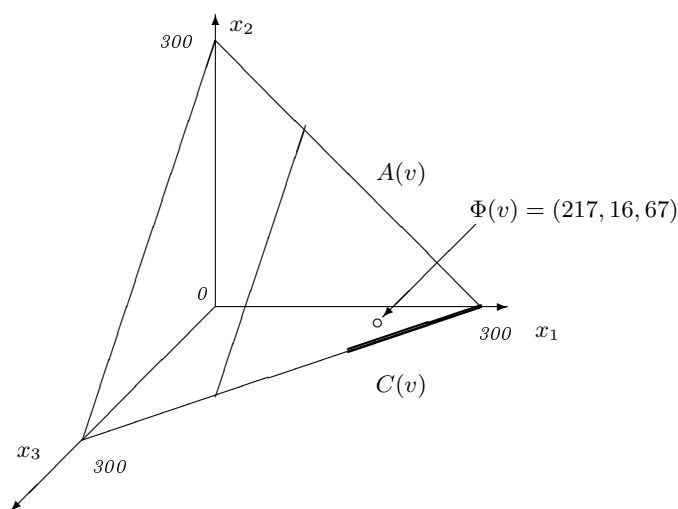
$$\sum_{i=1}^n x_i = v(I) \text{ egyenlet és az } x_i \geq v(\{i\}) \ (i \in I)$$

egyenlőtlenségek határozzák meg, $A(v)$ egy konvex poliéder. A $C(v)$ meg az $A(v)$ -nek része, és szintén poliéder, hiszen

$$C(v) = \{x \in \mathbf{R}^n : \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), S \subseteq I\},$$

míg egy stabil B halmazról tudjuk, hogy $C(v) \subseteq B \subseteq A(v)$. Végül a Shapley érték $\Phi(v)$ vektora szintén $A(v)$ -ben van.

8.16. Példa. Az ingatlanfejlesztés „megoldásai” (a koordinátákat ezer dollárban mérve).



8.6. Gyakorlat

Kooperatív játékokkal modellezhető helyzetek

8.6.1. Szemét játék

Képzeljünk el egy kertvárosi szomszédságot n önálló teleken lakott házzal. Minden ház napi egy-ségnyi hulladékot termel, amivel kezdeni kell valamit. Ha megoldott a szemeteszállítás, akkor ez csak pénz kérdés. Ha nem, akkor mi történhet, illetve milyen modell (vagy modellek) vetődnek fel a helyzet kapcsán?

A legegyszerűbb arra gondolnunk, hogy, a költség csökkentésének céljából, a lakók megpróbálják egymáshoz átdobálni a szemetet. Viszont amíg valaki megszabadul a saját szemetétől, mások bedobálhatják hozzá az övéket. Egy megoldás lehet, hogy összeállnak páran és egymást nem szemetelik. Formálisan a v karakterisztikus függvény:

$$v(S) = \begin{cases} |S| - n & \text{ha } S \neq \emptyset \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Használjuk a mag karakterizációs tételét és mutassuk meg, hogy $C(v) = \emptyset$.

8.6.2. Ausztrál törvényhozás

A központi kormányzat (jelöljük G -vel) és hat állam ⁵ képviselője fogadhat el szövetségi törvényt. Az elfogadáshoz szükséges vagy a központi kormányzat és legalább két állam, vagy legalább öt állam szavazata.

Lássuk be, hogy ez szuperadditív karakterisztikus függvénnyel írható le.

8.6.3. Bizottságok

A bizottságok részben a szakmai, részben a demokratikus döntés illúzióját hivatottak elmélyíteni. A tapasztalat szerint a következő paramétereket ajánlatos betartani:

- Ne legyen túl kicsi vagy túl nagy a bizottság, 3 – 15 fő.
- Ha lehet, páratlan sok tagból álljon, egyenlő szavazattal.
- Legyen elnök.

A tipikus egyszerű többség esetében tehát az $n = 2k + 1$ tagú bizottság a $(k + 1; \overbrace{1, \dots, 1}^n)$ szavazási játékkal írható le. Páros n esetén gyakori szabály, hogy az elnök szavazata dönt.

8.1. Feladat (Triviális játék). *A v karakterisztikus függvény által meghatározott játék triviális, ha minden $S, T \subset I$ esetén $v(S) + v(T) = v(S \cup T)$, ha $S \cap T = \emptyset$. Mi lesz $A(v)$, $C(v)$ és $\Phi(v)$? Miért kaphatta a játék a nevét?*

8.2. Feladat. *Adjunk meg egy olyan gyakorlati esetet, amelyben feltételezhető, hogy a karakterisztikus függvény nem szuperadditív.*

8.3. Feladat (Egyszerű játék). *Egy játék egyszerű, ha a v karakterisztikus függvény csak a nulla és egy értékeket vesz fel. Mutassuk meg, ha egy egyszerű játék szuperadditív, akkor a v karakterisztikus függvénye monoton.*

8.4. Feladat. *Felfogható-e az ausztrál törvényhozás illetve az elnökkel rendelkező bizottság súlyozott szavazási játékként?*

8.5. Feladat. *Felfogható-e egy többkamarás parlament súlyozott szavazási játékként?*

8.6. Feladat. *Mi lesz $A(v)$, $C(v)$ és $\Phi(v)$ a 8.4 feladat játékaiban?*

8.7. Feladat. *Alakítsuk át a fogolydilemmát zérusösszegű kooperatív játékká. (A sheriff kifizetése legyen a másik kettő -1 -szerese.) Mi lesz v , $A(v)$, $C(v)$ és $\Phi(v)$? Hogyan interpretálható ez a forma?*

8.8. Feladat (Óceán játék). *Mi a játékosok Shapley értéke a $(51, 40, 40, 1, \dots, 1)$ súlyozott szavazási játékban, ahol tíz egység szavazatú játékos van?*

8.9. Feladat (USA törvényhozás). *A képviselőház 435 fős, a szenátus pedig száz. Egy javaslat akkor megy át, ha mindkét házban több, mint 50 %-ot ér el, ⁶ és az elnök is rábólint vagy mindkét házban 2/3-os többséget kap (ekkor az elnök már nem is kell hozzá). Mutassuk meg, hogy szuperadditív a játék v karakterisztikus függvénye, és adjuk meg a Shapley értékeket!*

⁵ Ezek: Nyugat-Ausztrália (WA), Queensland (QSD), Új-Dél-Wales (NSW), Victoria (V), Dél-Ausztrália (SA) és Tasmania (TAS)

⁶ A helyzet egy kicsit bonyolultabb, ha a szenátusban döntetlen van, akkor az alelnök dönt.

9. fejezet

Stabil Párosítások

A stabil párosítás vagy stabil házasság probléma kiváló példa mind a gyakorlat és elmélet viszonyának szemléltetésére, mind a mohó algoritmus egy újabb illusztrációjára. A problémakört eredetileg az USA-ban a 40-es évek közepén kulmináló orvos gyakornok hiány, illetve elosztási zavar motiválta. A végzős orvosok ezreit kellett a kórházak által meghirdetett helyekre beosztani; ráadásul mindkét fél (orvos vs. kórház) a saját preferenciáit igyekezett érvényesíteni. Az eredetileg alkalmazott technikák teljesen alkalmatlanná váltak 1947-re, mikor is egy radikálisan új rendszert vezettek be helyettük. Érdekes módon ennek elméleti vizsgálatát csak 1962-ben tette meg D. Gale és L. S. Shapley, s igazából ők nem tudtak a problémáról: az egyetemi felvételi rendszert illetve a házasságok stabilitását akarták modellezni.¹

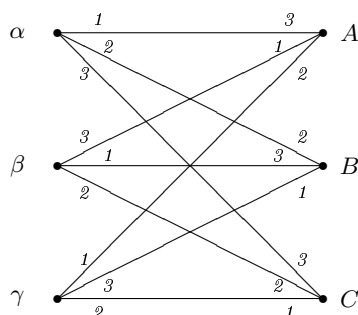
9.1. Stabil házasság

Mi az általuk vizsgált legegyszerűbb modellt ismertetjük, utalva rá, hogy igen sok általánosítás született azóta. A stabil házasság problémában adott n férfi, n nő és mindegyikük valahogyan rangsorolja az ellentétes nem tagjait; ez az illető személy *preferencia listája*. A férfiakat görög, a nőket latin betűkkel jelöljük majd. Így például akkor mondjuk, hogy az α (férfi) *jobban kedveli* vagy *preferálja* A -t B -hez képest, ha α preferencia listáján A előrébb van, mint B . A személyeket és preferenciáikat leírhatjuk (duplán) súlyozott páros gráfokkal, vagy mátrixokkal is az alábbiaknak megfelelően:

9.1. Példa. [Stabil párosítás gráf és bimátrix formában]

¹Néhány éve a magyar felsőoktatási felvételi rendszere is hasonló algoritmust használ.

	A	B	C
α	1, 3	2, 2	3, 1
β	3, 1	1, 3	2, 2
γ	2, 2	3, 1	1, 3



A mátrix egy elemének első koordinátája a megfelelő oszlop által reprezentált nő helyezése a sorhoz tartozó férfi ranglistáján, míg a második koordináta a fordított helyezés.

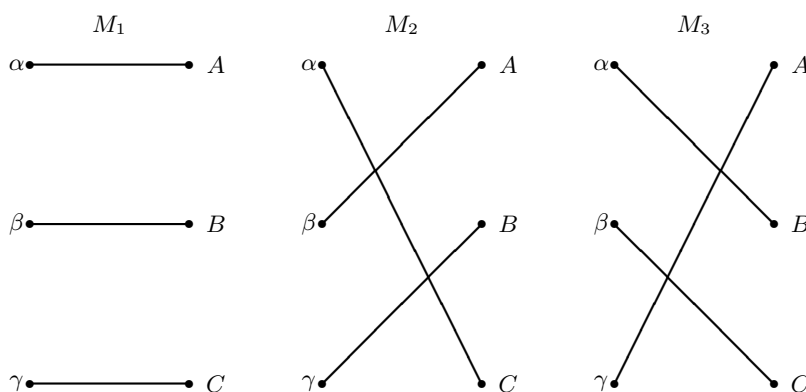
A feladat egy olyan n -elemű M párosítás megadása, amely, legalábbis valamely értelemben, elképzelhető. Gyakorlati és elméleti megfontolások alapján az alábbi definíció tűnik ésszerűnek:

Definíció. Egy M párosítás **instabil** ha vannak olyan α, β férfiak és A, B nők, hogy $(\alpha, A) \in M$, $(\beta, B) \in M$, de β preferálja A -t B -hez képest, és A preferálja β -t α -hoz képest. Egy M párosítás **stabil**, ha nem instabil.

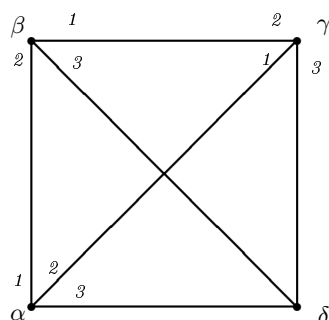
A definíció motivációja kézenfekvő: feltehető, hogy az instabil esetben β illetve A felbontja pillanatnyi kapcsolatát, és egymással lép kapcsolatra. A célunk egy stabil M párosítás keresése lesz majd, már ha van ilyen egyáltalán. (Halmos és Vaughan javasolt korábban egy modellt, amely globális optimumra törekedett, nem véve figyelembe a lokális érdekeket, lehetőségeket. Ezért legfeljebb kikényszeríthető, míg a fenti stabilitás szerint egy M teljes párosítás nem bomlik fel, ha magára hagyjuk a rendszert.)

Kérdés persze, van-e egyáltalán megoldás? Az ?? példában három megoldás van:

$$M_1 = \{(\alpha, A), (\beta, B), (\gamma, C)\}, M_2 = \{(\alpha, C), (\beta, A), (\gamma, B)\} \text{ és } M_3 = \{(\alpha, B), (\beta, C), (\gamma, A)\}.$$



9.2. Példa. [Stabil szobatárs] A stabil házasság mintája alapján definiálhatjuk az ún. szobatárs problémát. Itt adott $2n$ ember, akiket kétszemélyes szobákba kell telepíteni és az előzőekhez hasonlóan preferenciákkal rendelkeznek. Nyilvánvaló, ha adott négy személy $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ úgy, hogy α, β és γ preferencia listáján δ az utolsó, α -én β , β -én γ és γ -én α az első, akkor nincs stabil párosítás.



A 9.2 példa fényében kellemes meglepetés az alábbi tétel.

9.1. Tétel. (Gale-Shapley) *A stabil házasság problémának mindig van megoldása.*

Bizonyítás. Valójában egy nagyon hatékony, mohó típusú algoritmust adunk, melynek végeredménye bizonyosan stabil párosítás. Tradicionálisan, hisz ez igencsak tradicionális eljárás, a megfelelő köznapi kifejezéseket használjuk a leírás során.

A eljárás első lépésében minden férfi ajánlatot tesz a kedvencének. Minden nő a legjobb ajánlatot fogadja el, de ez csak annyit jelent, hogy „várakozó listára” helyezi a kérőt. A második lépésben az elutasított kérők újra ajánlatot tesznek, ezúttal a preferencia listájukon 2. helyezett hölgynek. A nők ismét a pillanatnyilag legjobb ajánlatot fogadják el; esetlegesen lecserélve a várakozó listán lévő kérőt. Hasonlóan folytatódik ez a későbbiekben is: egy elutasított (vagy egy várakozó listáról lekerült) férfi a soron következő jelölttel próbálkozik, míg a nők a lehető legjobb jelöltet tartják meg.

Legkésőbb $n^2 - 2n + 2$ lépés elteltével minden hölgy kap legalább egy kérőt, így a várakozó listáján is lesz majd valaki. (Ugyanis ha egy lépésben van olyan nő, aki nem kapott még ajánlatot, akkor lennie kell elutasításnak is ebben a lépésben, illetve egy férfi csak egyszer tesz ajánlatot egy nőnek.)

Mikor minden nő kapott ajánlatot, akkor véget vetünk az eljárásnak, és a pillanatnyi párokat véglegesnek kiáltjuk ki. Megmutatjuk, hogy az így kapott M párosítás stabil. Tegyük fel, hogy van olyan α és A , melyre $(\alpha, A) \notin M$, de α preferálja a párjához képest. Ekkor viszont α valamikor ajánlatot tett A -nak és A elutasította őt, azaz a várakozó listáján α -nál „jobb” személy volt, s ha cserélődött is azóta, csak még jobb lehet később. Így A a párját jobban kedveli, mint α -t, azaz nincs instabilitás. $\square$

9.3. Példa.

	A	B	C	D
α	1, 3	2, 3	3, 2	4, 3
β	1, 4	4, 1	3, 3	2, 2
γ	2, 2	1, 4	3, 4	4, 1
δ	4, 1	2, 2	3, 0	1, 4

Az algoritmus végrehajtását egy táblázaton követhetjük. Egy cella baloldali eleme az adott lépésben a sor által kódolt személytől ajánlatot kapó, a jobboldali elem pedig a sor ajánlatát elfogadott személy.

	1. lépés	2. lépés	3. lépés	4. lépés	5. lépés	6. lépés
α	A, A	$\emptyset, A$	$\emptyset, A$	$\emptyset, \emptyset$	$B, \emptyset$	C, C
β	$A, \emptyset$	D, D	$\emptyset, D$	$\emptyset, D$	$\emptyset, D$	$\emptyset, D$
γ	B, B	$\emptyset, B$	$\emptyset, \emptyset$	A, A	$\emptyset, A$	$\emptyset, A$
δ	D, D	$\emptyset, \emptyset$	B, B	$\emptyset, B$	$\emptyset, B$	$\emptyset, B$

A követhetőség kedvéért felvettük a férfiak preferencia listáit, ahol felülvonással jeleztük, ha már történt ajánlat: $\alpha(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, D)$

$$\beta(\bar{A}, \bar{D}, C, B)$$

$$\gamma(\bar{B}, \bar{A}, C, D)$$

$$\delta(\bar{D}, \bar{B}, C, A) \text{ A megoldást az utolsó oszlop jobboldaláról olvashatjuk le:}$$

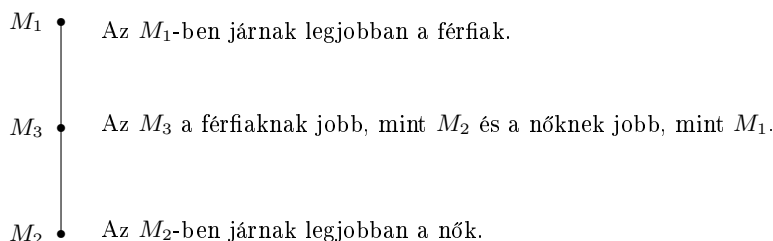
$$M = \{(\alpha, C), (\beta, D), (\gamma, A), (\delta, B)\}.$$

9.2. A stabil párosítások szerkezete

Felmerül a kérdés, tudunk-e valami közelebbit mondani a stabil párosítások szerkezetéről, összehasonlíthatók-e stb. Vegyünk két stabil párosítást, M_1 -et és M_2 -öt. Az M_1 *férfi szempontból* jobb, mint M_2 , ha minden férfi legalább olyan jó párt kap M_1 -ben, mint M_2 -ben; jelölésben $M_1 \geq_F M_2$. Nem lehet bármely két stabil párosítást összehasonlítani, de az összes stabil párosítás, mint azt J. H. Conway megmutatta, ún. *disztributív* vagy más szóval *geometriai hálót* alkot.²

Speciálisan van legnagyobb és legkisebb eleme. (Ha a nők szempontjából nézzük, ugyanazt a hálót kapjuk, csak megfordítva. Azaz ami az egyik nemnek a legjobb, a másiknak a legrosszabb.) Ez utóbbit egyszerűen beláthatjuk.

9.4. Példa. Az 9.1 példában szereplő stabil párosítások az alábbi hálót alkotják:



Definíció. Egy A hölgy *lehetséges* az α férfi számára, ha van olyan M stabil párosítás, amelyre $(\alpha, A) \in M$.

9.2. Tétel. Az előző algoritmus minden férfinak a legjobb lehetséges párt adja, míg minden nőnek a legrosszabbat.

Bizonyítás. Az első állítást a lépések szerinti indukcióval látjuk be. Tegyük fel, hogy a soron következő lépésig egyetlen férfit sem utasított el olyan nő, aki lehetséges lett volna számára. Tegyük fel továbbá, hogy ebben a lépésben A elutasítja α -t. Azt állítjuk, hogy ekkor A nem lehetséges α számára. Valóban, ha A pillanatnyi párja β , akkor β preferálja A -t az összes nőhöz képest, kivéve akik korábban visszautasították. Ezek azonban, az indukciós feltétel miatt, nem lehetségesek β számára. Ha tehát létezne egy olyan M stabil párosítás, amelyre $(\alpha, A) \in M$, ebben β a párját (nevezzük B -nek) kevésbé kedvelné, mint A -t, hiszen mind A és B lehetséges β számára. Ekkor viszont az (α, A) , (β, B) instabilitást okoz, azaz A nem lehetséges α számára, s ezzel beláttuk a tétel első felét.

Legyen M^* az algoritmusunk által adott *férfi optimális* megoldása, M pedig egy tetszőleges stabil párosítás. Belátjuk, hogy bármely A nő esetén az ő M -beli párja nem rosszabb, mint az M^* -beli párja. (Igazából pontosan akkor nem rosszabb, ha ugyanaz a párja a két párosításban, és határozottan jobb, ha nem.) Ha $(\alpha, A) \in M^*$, $(\beta, A) \in M$ és $\alpha \neq \beta$, akkor $(\alpha, B) \in M$ valamely $B \neq A$ hölgyre. A tétel első fele miatt persze α preferálja A -t B -hez képest. Másrészt az M

²Egy L háló, ha van két kétváltozós művelete, $\vee$ és $\wedge$, és ezek *idempotensek* $x \vee x = x$, $x \wedge x = x$, *kommutatívak*, $x \vee y = y \vee x$, $x \wedge y = y \wedge x$, *asszociatívak*, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ és *elnyelők*, azaz $x \vee (x \wedge y) = x$ és $x \wedge (x \vee y) = x$ minden $x, y, z \in L$ esetén. *Disztributív* a háló, ha teljesül még az $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ egyenlőség is.

párosítás stabil, így speciálisan az (α, B) , (β, A) párok stabilitása az jelenti, hogy A preferálja β -t α -hoz képest; s pont ezt akartuk bizonyítani. $\square$

Megjegyzések: Az algoritmus eredeti felhasználásánál a kórházak tették az ajánlatokat, és azt hangoztatták (természetesen bizonyítás nélkül), hogy ez az orvosok javára válik. Számos tanulság vonható itt le, s ezekből csak az egyik, hogy nem árt meggondolni nyilvánvalónak tűnő (vagy annak beállított) állításokat, mint azt Gale és Shapley tették volt.

A másik, hasonlóan fontos észrevétel a döntési helyzetek illetve stratégiák buktatóira vonatkozik. A modell azt sugallja, „elébe kell menni” az eseményeknek és kishitűség nélkül megpróbálni a legjobbnak tűnő megoldásokat a „sült galambra várás” helyett.

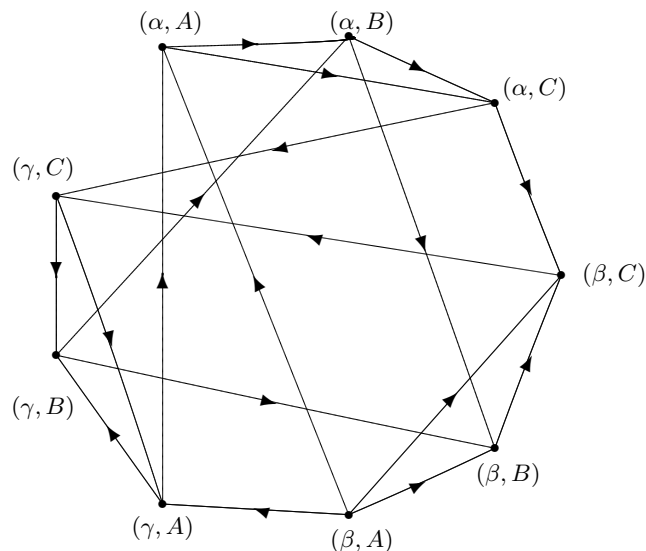
9.3. A stabil párosítás mint mag

Korábban definiáltuk egy irányított G gráf magját; ez egy olyan $S \subset V(G)$ halmaz volt, amely független és domináló egyben. Ez a fogalom különösen fontos a játékelméletben, hisz a megoldások stabilitását fogalmazza meg matematikai formában. A stabil párosítás motiválhatja ezt a definíciót, ugyanis egy rögzített probléma stabil párosításai tulajdonképpen magok egy megfelelően alkotott gráfban.

Definiáljuk egy G gráf *vonalgárfját*, $L(G)$ -t, a következőképpen: $L(G)$ pontjai G élei lesznek, azaz $V(L(G)) := E(G)$, és $L(G)$ két pontja, e és f , között van él, ha G -ben tekintve az e és f éleknek van közös pontja. Ha G pontjaihoz preferencia listák vannak rendelve, irányítsuk az (e, f) élt $L(G)$ -ben úgy, hogy az a preferált pontból indul és a kevésbé kedvelt pontra mutat közös ponthoz tartozó lista szerint.

Állítás: A fenti definíciókkal a G gráf stabil párosításai éppen az $L(G)$ gráf magjainak felelnek meg.

Példa: Az első példa G gráfjához tartozó $L(G)$:



9.4. Gyakorlat

9.1. Feladat (Hollywoodi párok). Mit mondhatunk a stabil párosításokról, ha α_i -vel jelölt személy az A_i -vel jelöltet kedveli legjobban és viszont?

9.2. Feladat (Egy dimenziós értékelés). Tegyük fel, hogy van egy bijektív $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény úgy, hogy bármely A_j preferálja α_i -t az α_j -vel pontosan akkor, ha $f(i) > f(j)$. Mit mondhatunk a stabil párosításokról?

9.3. Feladat (J.H. Conway). *Mutassuk meg, hogy a stabil párosítások geometriai hálót alkotnak (páros gráf esetén) bármely oldal szempontjából nézve. Mit mondhatunk a párosításokra? Milyen algoritmussal keressünk ilyet?*

9.4. Feladat. *Hány stabil párosítás van az alábbi adatokkal definiált problémában?*

	A	B	C	D
α	1, 3	2, 3	3, 2	4, 3
β	1, 4	4, 1	3, 3	2, 2
γ	2, 2	1, 4	3, 4	4, 1
δ	4, 1	2, 2	3, 0	1, 4

10. fejezet

Csoportok döntéshozatala

Az életben gyakran felmerül, hogy emberek egy csoportjának egy probléma megoldásának különböző alternatíváit sorba kell rendeznie.

10.1. Példa. Egy család autót vásárol, és a kereskedő a következő extrákat ajánlja: blokkolásgátló (ABS), légzsák (L), légkondicionáló (AC) és sztereo rádió (S). Mivel mindet nem engedhetik meg maguknak, mindenki egy fontossági listát állít fel.

férj feleség 1. gyerek 2. gyerek

ABS	AC	S	AC
AC	L	AC	L
S	S	L	ABS-S
L	ABS	ABS	

A kérdés ezek után: mi legyen a közös sorrend? (Az ABS-S jelöléssel az érzékeltetjük, hogy megengedjük a döntetlent két alternatíva összehasonlításánál.)

10.1. Profilok és konszenzus függvények

Általánosan: Adott egy t elemű I halmaz (az egyének csoportja) és egy A , az alternatívák halmaza. Jelölje P az A sorrendjeinek (döntetlent megengedve) a halmazát, ekkor $P \times \dots \times P = P^t$ a lehetséges inputok tere, elemei az ún. *profilok*, jelük $(P_1, \dots, P_t)$. Egy $F : P^t \rightarrow P$ függvényt *konszenzus függvénynek* (social welfare function) hívunk. A célunk természetesen a valamely szempontból ésszerű konszenzus függvények vizsgálata.

Az egyszerű többség szabálya

Az $a, b \in A$ alternatívákra a csoport a -t b felé helyezi, ha az egyének többsége ezt tette. Sajnos ez a szabály *nem* vezet konszenzus függvényhez, mint azt az alábbi ún. *szavazói* vagy *Condorcet* paradoxon mutatja.

10.2. Példa (Condorcet paradoxon). Legyen $I = \{1, 2, 3\}$, $A = \{a, b, c\}$.

P_1	P_2	P_3
a	b	c
b	c	a
c	a	b

A szabály szerint a megelőzi b -t, b megelőzi c -t és c megelőzi a -t, ami a rendezés tranzitivitása miatt nem lehetséges.

Borda érték

Egy $(P_1, \dots, P_t) \in P^t$ -re és $a \in A$ -ra definiáljuk a $b_i(a)$ értéket ($b_i : A \rightarrow \mathbf{N}$ függvény) az alábbi formulával: $b_i(a) := P_i$ -ben az a mögé helyezett alternatívák száma. A Borda érték pedig $b(a) := \sum_{i=1}^t b_i(a)$, és a csoport x -et y elé helyezi, ha $b(x) > b(y)$. Így valóban adódik egy konszenzus függvény; tulajdonképpen pl. a pontozásra alapuló sportágakban hasonló történik. Egy súlyos ellenvetés a módszer ellen az alábbi profil kiértékelése:

	P_1	P_2	$\dots$	P_{t-1}	P_t
	x	x		x	y
10.3. Példa.	y	y		y	$\vdots$
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	x

Nyilvánvalóan $b(y) - b(x) = |A| - 1 - (t - 1) = |A| - t$, azaz ha az alternatívák száma nagyobb, mint a csoport mérete, akkor az y alternatívát a csoport x elé helyezi. Így az értékelés, ha más nem, nagyon érzékeny a hibákra, elfogultságokra, esetlegesen manipulációkra.

Lexikografikus rendezés

Helyezzük $x \in A$ -t $y \in A$ elé, ha P_1 -ben x megelőzi y -t. Ha P_1 -ben x és y esetleg azonos helyen van, nézzük P_2 -t és így tovább. Ez nyilvánvalóan konszenzus függvény, s így matematikai szempontból semmi baj sincs vele. A szó köznapit értelmében persze szó sincs konszenzusról, az egyes játékos *diktátor*.

Nem könnyű tehát minden igénynek eleget tevő konszenzus függvényt találni. Hasonló megközelítést alkalmazunk, mint a Shapley érték definíciójánál; megpróbálunk axiómákat adni egy megfelelő konszenzus függvényre. Az alábbi négy axiómát 1951-ben Arrow fogalmazta meg.

10.2. Arrow tétel

Arrow axiómák

- (A konszenzus függvény és az egyéni értékelések pozitív asszociációja)
Ha egy adott profilra a konszenzus függvény a -t b elé helyezi, akkor ezt teszi a profil alábbi módosítása után is:
 - Az egyének értékelésében az alternatívák sorrendje a -t kivéve nem változik.
 - Minden értékelésben az a alternatíva és bármely más alternatíva sorrendje változatlan marad, vagy a javára változik.
- (Függetlenség az irreleváns alternatívától) Legyen A_1 egy tetszőleges részhalmaza az alternatíváknak. Ha egy profilt úgy módosítunk, hogy minden egyén sorrendje az A_1 elemei között változatlan, akkor a konszenzus függvény ugyanazt a sorrendet adja A_1 elemei között az eredeti és a módosított profil esetében.
- (A polgárok szuverenitása)
Bármely a és b alternatívákra van olyan profil, melyre a konszenzus függvény a -t b elé helyezi.
- (Nincs diktátor)
Nincs olyan egyén, aki ha a -t b elé helyezi, akkor a konszenzus függvény is ezt teszi, függetlenül a többi egyén értékelésétől.

Az Arrow axiómák az igazságosságot és az ésszerűséget próbálják megragadni. Ezért aztán eléggé meglepő és némileg talán kiábrándító a következő tétel.

10.1. Tétel. (Arrow) Ha $t > 1$ és $|A| > 2$, akkor nem létezik az 1-4 axiómáknak eleget tevő konszenzus függvény.

Megjegyzés: Arrow tétele rávilágít döntéshelyzetek bizonyos csapdáira. Egyik, gyakran megvalósuló megoldás a diktátor, egy másik választási lehetőségek szűkítése kettőre, rossz esetben *egyre*. A harmadik pedig, hogy felkészülünk a csapdákra, és megpróbáljuk feloldani a problémát minimális igazságtalanság árán.

10.3. Igazságos osztozkodások

Felmerül az olyan osztozkodás amelyben az a cél, legalábbis nyilvánosan, hogy mindenki egyformán jól járjon. Adott egy kupac aranypor, ezen szeretne osztozni két aranyásó azzal a feltétellel, hogy egyforma rész illeti meg őket, és a másik hibája miatt nem kaphatnak kevesebbet. Két játékos esetén egy nagyon régi ötlet, az *aranyásó* algoritmus megoldja ezt: az egyik kettéosztja a kupacot, a másik választ belőle.

Általánosítások. Felmerül, hogy $n \geq 2$ ember osztozkodását is megoldjuk. A másik irány, hogy minden ember irigy is, és nemcsak $1/n$ -ed részt akar, de azt is, hogy az övé legyen a legnagyobb darab, azaz *irigységmentes* legyen a felosztás. Az is fontos, hogy az eljárás, amellyel ezeket a célokat eléri, minél egyszerűbb legyen. A felosztandó kupac pedig egy C korlátos, mérhető halmaz, amin adottak a μ_i , Lebesgue abszolút folytonos mértékek és $\mu_i(C) = 1$ minden $i \in \{1, \dots, n\}$ -re.

Mozgó kés. A legegyszerűbb a holland aukcióhoz hasonló eljárás: húzzunk egy kést C fölött balról jobbra, és mikor valamelyik játékos úgy úgy véli, hogy a baloldali rész elérte az $1/n$ -et, kiáltson fel, elviheti azt és kiszáll a játékból. A maradékra alkalmazzunk rekurzívan ugyanezt az eljárást.

Csökkentés. Állítsuk sorba a játékosokat, és az első vágjon le egy H , szerinte $1/n$ mértékű darabot. Ezután kérdezzük meg a másodikat, hogy a levágott darab szerinte nagyobb-e $1/n$ -nél. Ha nem, akkor nem lesz kifogása, hogy az első legyen, ha igen, akkor vágjon annyit, amennyivel több, azt tegye vissza a $C \setminus H$ -hoz, és innen az övé lesz H maradéka. A eljárást folytatjuk a soron következőkkel, kihasználva azt, hogy a már megszólaltatott játékosok szerint a továbbadott maradék mértéke nem haladja meg az $1/n$ -et. A részhalmaz utoljára vágó játékosé lesz, ő kiszáll, a többiek pedig folytatják ugyanígy.

Irigységmentes elosztás 3 személy esetén. Az aranyásó algoritmus nemcsak igazságos de irigységmentes elosztás is. John Selfridge és John H. Conway 1960-ban megoldotta ezt $n = 3$ -ra; lásd alább. Az $n > 3$ esetek nem egyszerűek, nincs bizonyítva még az sem, hogy korlátos lépésben megoldhatóak. Legyenek a játékosok A, B és C , és amikor egy játékos cselekszik akkor a saját mértékét követi.

Conway-Selfridge algoritmus, az $n = 3$ esetre.

1. Először A vágja három egyenlő részre a halmazt.
2. B levág a legnagyobb részből annyit, hogy két egyforma legnagyobb legyen. A levágott részen később osztoznak.
3. C választ egy darabot, majd B és A viszi az utolsót. Ha C nem vitte el a B által megvágott darabot, akkor B -nek kell ezt választania. Hívjuk V -nek, amelyiküké a vágott darab, a másik (B vagy C) legyen NV .
4. A 2. pontban levágott darabot ossza el NV három egyenlő részre.
5. A játékosok elviszik a felvágott maradékot ebben a sorrendben: V , A és NV .

10.2. Tétel. *A Conway-Selfridge algoritmus irigységmentes elosztást ad.*

Bizonyítás. Világos, hogy A nem irigy V -re, hisz még akkor sem lenne az, ha V kapja meg az összes, a 2. pontban levágott részt. NV -re sem, hisz a 3. pontban vele egyforma darabot kapott, az 5. pontban pedig megelőzi a választásban. A V szintén nem irigykedhet; a 3. pontban az egyik legnagyobbat kapta, a levágott részből meg ő vesz előként. Az NV szintén egy legnagyobbat kap a 3. pontban, a 4. pontban pedig ő osztja el egyenlő részekre a maradékot. $\square$

10.4. Gyakorlat

10.1. Feladat. *Határozzuk meg, melyik Arrow axiómákat sérti meg a Borda (illetve Condorcet) értékelés.*

10.2. Feladat. *Mutassuk meg, hogy két alternatíva esetén a többségi függvény teljesíti az Arrow axiómákat.*

11. fejezet

Függelék

A függelékbe befoglalunk néhány anyagot, mely a további tanulmányokban jöhet elő, illetve a kurzus mélyebb tanulmányozását segítheti.

11.1. Lineáris programozás

A lineáris programozás az egyik legkézenfekvőbb eszköz erőforrások hatékony felhasználásának, vagy éppen követelmények teljesítésének modellezésében. Akkor folyamodhatunk hozzá, ha a problémánk lineáris, determinisztikus és a mennyiségeink korlátlanul oszthatóak.

11.1.1. A diéta probléma

Célunk egy olyan étrend összeállítása, ami fedezi a napi minimális szükségleteinket, de lehetőleg minél olcsóbb. Minimális szükséglet: 2000 kCal, 55 g fehérje, 800 mg kalcium, jelölésben Ca . Ezeket az adatokat például táplálkozás tudományi szakkönyvekből nyerhetjük; az értékek függhetnek az nemtől, életkortól, a végzett fizikai aktivitástól, éghajlattól és a tudomány pillanatnyi állásától.¹ Néhány étel becsült adagja, tápértéke és ára.

Étel	Adag	Tápanyag Energia (kCal)	tartalom Fehérje (g)	Ca (mg)	Ár (cent)
Zabpehely	28 g	110	4	2	3
Csirke	100 g	205	32	12	24
Tojás	2 db	160	13	54	13
Tej	2,37 dl	160	8	285	9
Meggyes lepény	170 g	420	4	22	20
Disznóhús babbal	260 g	260	14	80	19

A feltételeknek például 10 adag disznóhús babbal megfelelne és csak 1,9 dollárba kerül. Ez a gyomor számára megterhelő tűnik, ezért bevezetünk adag/nap korlátokat. (Igazából azt szeretnénk, hogy a majdani modellünk képes legyen kezelni az ilyen típusú megszorításokat.)

Étel	Adag/nap
Zabpehely	4
Csirke	3
Tojás	2
Tej	8
Meggyes lepény	2
Disznóhús babbal	2

¹ Az élet fenntartásához szükséges energiát az elmúlt 50 évben túlbecsülték; ez a hiba a keringési problémák és a cukorbetegség előfordulásának növekedésével járt.

A leglényegesebb minden problémánál a változók kijelölése. Most a változóinkat az ételekhez rendeljük és a változó értéke az elfogyasztandó étel mennyiségét (adagban) jelenti majd. Jelölje x_1 az elfogyasztandó zabpehely, x_2 a csirke, x_3 a tojás, x_4 a tej, x_5 a meggyes lepény, x_6 a disznóhús babbal adagok számát! Az étrendnek a következő feltételeket kell kielégítenie:

- Adag/nap korlát szerint

$$0 \leq x_1 \leq 4$$

$$0 \leq x_2 \leq 3$$

$$0 \leq x_3 \leq 2$$

$$0 \leq x_4 \leq 8$$

$$0 \leq x_5 \leq 2$$

$$0 \leq x_6 \leq 2$$

- Napi szükséglet szerint

$$\begin{array}{rrrrrrr} 110x_1 & +205x_2 & +160x_3 & +160x_4 & +420x_5 & +260x_6 & \geq & 2000 \\ 4x_1 & +32x_2 & +13x_3 & +8x_4 & +4x_5 & +14x_6 & \geq & 55 \\ 2x_1 & +12x_2 & +54x_3 & +285x_4 & +22x_5 & +80x_6 & \geq & 800 \end{array}$$

Itt figyelembe vettük, hogy egy ételből nem fogyaszthatunk negatív mennyiséget vagy túl sokat, illetve összegeztük a bennük lévő tápértéket. Végül pedig az étrend költségét is kifejezhetjük a bevezetett változókkal és megadott konstansokkal:

$$3x_1 + 24x_2 + 13x_3 + 9x_4 + 20x_5 + 19x_6$$

Ezek után a diéta probléma matematikai leírása a következő:

$$\begin{array}{llllllll} \min & 3x_1 & +24x_2 & +13x_3 & +9x_4 & +20x_5 & +19x_6 & \\ & 110x_1 & +205x_2 & +160x_3 & +160x_4 & +420x_5 & +260x_6 & \geq & 2000 \\ & 4x_1 & +32x_2 & +13x_3 & +8x_4 & +4x_5 & +14x_6 & \geq & 55 \\ & 2x_1 & +12x_2 & +54x_3 & +285x_4 & +22x_5 & +80x_6 & \geq & 800 \\ & x_1 & & & & & & \leq & 4 \\ & & x_2 & & & & & \leq & 3 \\ & & & x_3 & & & & \leq & 2 \\ & & & & x_4 & & & \leq & 8 \\ & & & & & x_5 & & \leq & 2 \\ & & & & & & x_6 & \leq & 2 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \geq & 0 \end{array}$$

11.1.2. Dualitás

Vizsgáljuk meg az alábbi standard LP-t!

$$\begin{array}{llllllll} \max & 4x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & 3x_4 & \\ & x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & \leq & 1 & (1) \\ & 5x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 8x_4 & \leq & 55 & (2) \\ & -x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 5x_4 & \leq & 3 & (3) \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

A feladat megoldása helyett adjunk felső becslést a célfüggvény z^* értékére! A (2) egyenlőtlenséget $5/3$ -dal megszorozva egy felső korlátot kapunk z^* -ra.

$$\begin{aligned} \frac{5}{3}(5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4) &\leq 55 \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 &\leq \frac{25}{3}x_1 + \frac{5}{3}x_2 + 5x_3 + \frac{40}{3}x_4 \leq \frac{275}{3} \\ z^* &\leq \frac{275}{3} \end{aligned}$$

A (2) + (3) egy jobb felső korlátot ad:

$$\begin{array}{rrrrrrrr} 5x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 8x_4 & \leq & 55 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 5x_4 & \leq & 3 \\ \hline 4x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 3x_4 & \leq & 58 \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 & \leq & 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 & \leq & 58 \\ z^* & \leq & 58 \end{array}$$

Továbbvive a gondolatot, vegyük az egyenlőtlenségek nemnegatív lineáris kombinációját, azaz az első szorozzuk meg y_1 -gyel a másodikat y_2 -vel, a harmadikat y_3 -mal, majd adjuk össze őket! (Nyilvánvalóan teljesül a végső egyenlőtlenség, ha y_1, y_2, y_3 nemnegatív.)

$$(y_1 + 5y_2 - y_3)x_1 + (-y_1 + y_2 + 2y_3)x_2 + (-y_1 + 3y_2 + 3y_3)x_3 + (3y_1 + 8y_2 - 5y_3)x_4 \leq y_1 + 55y_2 + 3y_3$$

Ha a következő feltételek teljesülnek, akkor $y_1 + 55y_2 + 3y_3$ egy felső korlátot ad a célfüggvény értékére:

$$\begin{array}{rrrrrr} y_1 & + & 5y_2 & - & y_3 & \geq & 4 \\ -y_1 & + & y_2 & + & 2y_3 & \geq & 1 \\ -y_1 & + & 3y_2 & - & 3y_3 & \geq & 5 \\ 3y_1 & + & 8y_2 & - & 5y_3 & \geq & 3 \end{array}$$

A fentiek teljesülése mellett kapjuk:

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 &\leq y_1 + 55y_2 + 3y_3 \\ z^* &\leq y_1 + 55y_2 + 3y_3 \end{aligned}$$

Ezzel a módszerrel felső korlátot keresve a következő LP feladathoz jutunk:

$$\begin{array}{llllll} \min & y_1 & + & 55y_2 & + & y_3 \\ & y_1 & + & 5y_2 & - & y_3 & \geq & 4 \\ & -y_1 & + & y_2 & + & 2y_3 & \geq & 1 \\ & -y_1 & + & 3y_2 & - & 3y_3 & \geq & 5 \\ & 3y_1 & + & 8y_2 & - & 5y_3 & \geq & 3 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Az eredeti feladatot **primál**, a fent kapottat pedig **duál** vagy **duális** feladatnak nevezzük.

Egy standard formában lévő LP és a duálisa általánosan:

Primál	Duál
$\max \quad \sum_{j=1}^n c_j x_j$	$\min \quad \sum_{i=1}^m b_i y_i$
$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, m$	$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j \quad j = 1, \dots, n$
$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$	$y_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$

11.1. Tétel. *(Gyenge dualitás)*

Ha $(x_1, \dots, x_n)$ a primál feladatnak, az $(y_1, \dots, y_m)$ pedig a duál feladatnak egy lehetséges megoldása, akkor

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

Bizonyítás. A duális probléma konstrukciójából nyilvánvaló. Formálisan:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \right) x_j = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) y_i \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i,$$

hiszen $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j$, $x_j \geq 0$ ($j = 1, \dots, n$) és $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$, $y_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$). $\square$

Primál-duál kapcsolat: A duális változók valamilyen értelemben az eredeti LP mesterséges változóikhoz rendelhetők. A duális változók értéke pedig éppen a mesterséges változók pillanatnyi célfüggvény együtthatóinak -1 -szerese.²

11.2. Tétel. *(Erős dualitás)*

Ha a primál feladatnak van egy optimális $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ megoldása, akkor a duál feladatnak van olyan $(y_1^*, \dots, y_m^*)$ optimális megoldása, amelyekre

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j^* = \sum_{i=1}^m b_i y_i^*$$

Bizonyítás. A gyenge dualitás tétel miatt elég, ha találunk egy olyan $(y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ lehetséges megoldást a duális feladatra, amelyre a $\sum_{j=1}^n c_j x_j^* = \sum_{i=1}^m b_i y_i^*$ egyenlőség teljesül. A primál feladat megoldásánál bevezetjük a

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad (i = 1, \dots, m)$$

mesterséges változókat.

Tegyük fel, hogy elértünk az utolsó szótárhoz:

$$z = z^* + \sum_{k=1}^{n+m} \bar{c}_k x_k \quad \bar{c}_k \leq 0, (k = 1, \dots, n+m),$$

$$z^* = \sum_{j=1}^n c_j x_j^*$$

²A kapcsolat szemléletesen a szótárak transzponálásának fogható fel, a -1 -gyel való szorzásra a minimum-maximum aszimmetria miatt van szükség.

A primál-duál kapcsolatnak megfelelően próbáljuk meg az $y_i^* = -\bar{c}_{n+i}$ ($i = 1, \dots, m$) behelyettesítést! Azt állítjuk, hogy ez a duális lehetséges megoldása, a többi számolás kérdése csak.

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j = z^* + \sum_{j=1}^n \bar{c}_j x_j - \sum_{i=1}^m y_i^* \overbrace{\left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right)}^{x_{n+i}}$$

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j = \left(z^* - \sum_{i=1}^m b_i y_i^* \right) + \sum_{j=1}^n \left(\bar{c}_j + \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* \right) x_j$$

Ezt az egyenlőséget egyszerű algebrai manipulációval kaptuk az előzőből, azaz minden $x_1, x_2, \dots, x_n$ értékre igaznak kell lennie. Ebből adódnak a

$$\Rightarrow z^* = \sum_{i=1}^m b_i y_i^*, \quad c_j = \bar{c}_j + \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^*$$

egyenlőségek. Mivel $\bar{c}_k \leq 0$ minden $k = 1, \dots, n+m$ esetén, így

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* \geq c_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

$$y_i^* \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m)$$

Tehát az $y_i^* = -\bar{c}_{n+i}$ ($i = 1, \dots, m$) a duális lehetséges megoldása, továbbá $\sum_{i=1}^m b_i y_i^* = \sum_{j=1}^n c_j x_j^*$, és ezzel beláttuk a tételt. $\square$

A matematikában egy operátort akkor nevezünk dualizálásnak, ha egymás után kétszer alkalmazva az eredeti problémához jutunk vissza. Az elnevezésünk jogosságát igazolja, hogy a duális feladat duálisa a primál feladat.

A duál feladat

$$\max \sum_{i=1}^m (-b_i) y_i$$

$$\sum_{i=1}^m (-a_{ij}) y_i \leq -c_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

$$y_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m)$$

A duális feladat duálisa

$$\min \sum_{j=1}^n (-c_j) x_j$$

$$\sum_{j=1}^n (-a_{ij}) x_j \geq -b_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n)$$

Ez pedig nyilvánvalóan ekvivalens a primál feladattal:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j & \leq b_i \quad (i = 1, \dots, m) \\ x_j & \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

Kapcsolat a primál és a duál feladat között

A dualitás tétel megmutatja, hogy a primál és duál feladat nem lehet tetszőleges kapcsolatban. A különböző variációk (optimum, nincs lehetséges megoldás, nem korlátos a célfüggvény) lehetőségét az alábbi táblázat összegzi.

			DUÁL	
		Optimális	N.L.M.O.	Nem korlátos
	Optimális	lehet	nem lehet	nem lehet
PRIMÁL	N.L.M.O.	nem lehet	lehet	lehet
	Nem korlátos	nem lehet	lehet	nem lehet

A táblázat kilenc eleméből nyolcat közvetlenül megkaphatunk a gyenge, illetve erős dualitás tételekből. A kilencedik (a primálnak és a duálnak nincs lehetséges megoldása) pedig egy könnyű feladat.

Megjegyzés: A dualitás fogalma rendkívül hasznos, mert rugalmas hozzáállást tesz lehetővé az LP feladatokhoz. Három ilyen lehetőséget sorolunk fel itt:

1. A szimplex algoritmus végrehajtásánál a lépések száma közelítőleg a sorok számával arányos. Így az olyan feladatok megoldásánál, melyek sok egyenlőtlenséget és kevés változót tartalmaznak, érdemes áttérni a duális feladatra.
2. Akkor is célszerű áttérni, ha a duális feladatban nincs szükség, míg az eredetiben lenne, az első fázisra. (Például a diéta problémában egy minimum feladat adott és a célfüggvény együtthatói mind pozitívak. A standardizálás után ezek negatívak lesznek, így a duális jobboldala egy negatív komponensű vektor, amely a standardizálásnál pozitívvá válik.)
3. Egy gyakorlati feladatnál nem ritka, hogy menet közben új feltételeket kell hozzávenni az LP-hez. Ekkor újra kell kezdeni a megoldást, többnyire ismételve a szimplex módszer első fázisát. Ez elkerülhető a duál feladattal dolgozva, hiszen ekkor az új feltétel csak mint egy új, nem bázis változó jelenik meg. Ekkor hozzávehetjük a szótárunkhoz és folytathatjuk az eljárást az éppen aktuális bázisból.
4. A dualitás *ellenőrzésre* is jól használható. Ha például adott egy $Ax = b$ egyenletrendszer egy $\hat{x}$ megoldása, akkor egy behelyettesítéssel bizonyíthatjuk, hogy ez valóban jó megoldás. Egy $Ax \leq b$, $x \geq 0$, $\max cx$ standard feladatra javasolt x^*, y^* primál duál megoldaspárjának jósága is bizonyítható behelyettesítéssel az $Ax^* \leq b$, $A^t y^* \geq c$, $x^*, y^* \geq 0$ és $cx^* = by^*$ rendszerbe.

11.1.3. A duális változók gazdasági értelmezése

A dualitás elmélet egyik legszebb és leghasznosabb következménye, hogy a duális változóknak szemléletes jelentése tulajdonítható. Az érthetőség kedvéért egy motivációval előzzük meg a tétel

kimondását.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j & \min \quad & \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, m & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j \quad j = 1, \dots, n \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n & y_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Egy, talán a középiskolai fizikából még ismerős fogalommal élünk, és ún. „dimenzió analízist” hajtunk végre. Tegyük fel, hogy a LP feladatunk egy maximális nyereséget célzó, korlátozott erőforrások mellett felírt gyártási folyamat modellje:

- m : erőforrások száma
- n : terméktípusok száma
- x_j : a j -edik terméktípusból gyártásra kerülő mennyiség
- a_{ij} : a j -edik terméktípus egységnyi mennyiségének előállításához szükséges mennyiség az i . erőforrásból
- b_i : az i -edik erőforrásból rendelkezésre álló mennyiség
- c_j : a j -edik terméktípus egységnyi előállításával keletkező haszon

Tegyük fel például, hogy az x_j -t kg-ban mértük (jelben $\dim(x_j) = \text{kg}$), míg b_i erőforrást m^3 -ban, akkor az a_{ij} nyilván m^3/kg -ban mérendő. Hasonlóan természetesen úgy venni, hogy a c_j -t viszont Ft/kg-ban adjuk meg, így a duális feladat bal oldalán egy $a_{ij}y_i$ mennyiség dimenziója a c_j dimenziójával kell egyezzen. Azaz, ha $\dim(y_i)$ jelöli a mértékegységet, melyben az y_i duális változót mérni szeretnénk, akkor

$$\begin{aligned} \dim(a_{ij})\dim(y_i) &= \dim(c_j) \\ \dim(y_i) &= (Ft/\text{kg})(\text{kg}/m^3) = Ft/m^3 \end{aligned}$$

Így arra gondolhatunk, hogy y_i nem más, mint az i -edik erőforrás ára (vagy inkább értéke), amit a következő, bizonyítás nélkül kimondott tétel formalizál.

11.3. Tétel (Érzékenység). *Ha egy LP feladatnak van legalább egy nem degenerált optimális megoldása, akkor van olyan pozitív ϵ , ha $|t_i| \leq \epsilon$ minden $i = 1, \dots, m$ -re, akkor a*

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i + t_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ & x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

LP feladatsereg mindegyikének van optimális megoldása, és az optimum érték

$$z^*(t_1, \dots, t_m) = z^* + \sum_{i=1}^m y_i^* t_i,$$

ahol z^ az eredeti LP feladat optimuma, $y_1^*, \dots, y_m^*$ pedig a duál feladat (DP) optimális megoldása.*

A LP optimális megoldásához tartozó y_i^* az ún. „marginális ár”, vagy „árnyék ár”. Valóban y_i^* nem más, mint az i -edik erőforrásnak az LP megoldójának a szempontjából nézett értéke, hisz az erőforrás mennyiségének egységnyi növelésével (bizonyos határokon belül) éppen y_i^* -gal növekszik

a nyereség. Azaz y_i^* -nál nagyobb árat már nem érdemes fizetni az i -edik forrásért, míg kisebbet igen.³

11.1. Példa (Erdőművelés). 100 acre erdő terület egy részét kivágják és regenerálódni hagyják, másik részét kivágják, de utána beültetik fenyőfákkal. Az első módszer acre-enként 10 dollárba kerül és 50 dollárt hoz, míg a másikon ezek az értékek 50 dollár, illetve 120 dollár. Befektetésre szánt összes tőkének 4000 dollár. Kérdés, mekkora területet hagyjunk regenerálódni és mennyit ültessünk be, hogy a lehető legnagyobb profithoz jussunk?

Optimum számítási modell:

x_1 : kivágásra, majd regenerálódásra szánt terület nagysága acre-ban

x_2 : kivágásra, majd beültetésre szánt terület nagysága acre-ban

	befektetés	bevétele	hozam
1. módszer	\$10	\$50	\$40
2. módszer	\$50	\$120	\$70

$$\max \quad 40x_1 + 70x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 100 \\ 10x_1 + 50x_2 &\leq 4000 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Optimális megoldás: $x_1^* = 25$, $x_2^* = 75$, $z^* = 6250$.

A dualitás elméletének ereje azonban a probléma sokkal finomabb elemzésére is képes. Nagyon kézenfekvően felmerülnek az alábbi kérdések: Mekkora kamat mellett érdemes kölcsönt felvenni a nagyobb hasznot hajtó tevékenység kiterjesztésére? Mekkora kár éri a tulajdonost, ha leég egy acre erdő?

A duális megoldás $y_1^* = 32,5$ és $y_2^* = 0,75$. Az y_2^* a tőke értéke, azaz \$1 plusz tőkebefektetés 75 centet hoz. Ha ennél olcsóbban megszerezhető, akkor érdemes belevágni. Másrészt, ha egy más tevékenységre fordítva ennél több hasznot hoz, akkor inkább arra fordítandó.

Sokkal meglepőbb első pillantásra az egységnyi területen lévő fa „értéke”, pontosabban az elvesztésével járó kár. Míg a biztosító alighanem valamely 40 és 70 dollár közé eső összeget ítélné meg (hisz ennyi hasznot hozna az első, illetve a második kitermelés szerint) a gazda jövedelme csak $y_1^* = 32,5$ dollárral csökken. A látszólagos paradoxon feloldása, hogy akkor a tőke felszabaduló része a nagyobb hasznot hozó tevékenységre fordítható, így mérséklődik a kár. Ez a jelenség figyelmeztetésként szolgál: az árnyék ár függ a tevékenység egészétől.

Nehéz túlbecsülni ennek az egyszerű állításnak az implikációit. Számtalanszor előfordul, hogy egy „beállt” komplex rendszer részeinek pusztulása után gyorsan helyreáll, s az eredetinel gyorsabban fejlődik.

11.2. Befektetések

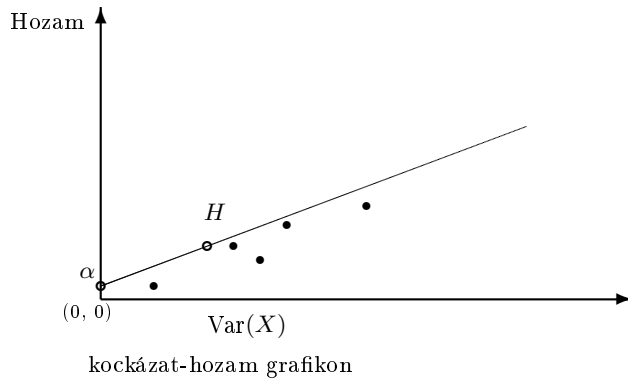
11.2.1. A Markowitz modell tanulságai

Az alábbi ábra néhány fiktív befektetési lehetőség (fekete körök), a H -val jelölt üres kör egy hatékony portfólió, míg az α -val jelölt az államkötvény kamata. Ha feltesszük, hogy a pénzrendszer rugalmas, azaz az államkötvény kamatával egyező kamattal hitelt is felvehető, akkor a hatékony

³ Az erőforrások értékét tehát egyfajta hasznosság alapján alapítottuk meg és ez nemcsak az LP által kódolt környezettől függ, hanem a választott optimális megoldástól is.

portfoliók az (α, H) szakasz egyenesén helyezkednek el. Az egyedi befektetések mindig ezen egyenes alatt maradnak.

A modell megerősíti azt a közgazdasági megfigyelést, hogy a hozam növelése csak nagyobb kockázat árán lehetséges.⁴ Az államkötvény nulla kockázatú a modellben, ha az állam saját pénzzel rendelkezik. (Ekkor nyomtat megfelelő mennyiséget, azaz az adósságát ebben a pénznemben rendezheti. Az inflációt itt nem vesszük figyelembe.) Persze vannak a pénzügyi modellen kívül keletkező kockázatok, ezeket csak gyökeresen más módszerekkel vehetjük figyelembe.



A befektetések nem pusztán a Markowitz modell által kezelhetők. Néhány megközelítés alapjait megemlítjük az alábbiakban.

11.2.2. Chartisták vs fundamentalisták

Az egyedi befektetések értékelése nagyon nehéz feladat. Felmerült, hogy az idő-ár függvény múltbeli viselkedéséből mennyire lehet következtetni a jövőbeli értékekre.

A chartista elképzelések szerint vannak mintázatok amelyekből a függvény növekedése vagy csökkenése jósolható. Ilyen előrejelzéseket gyakran láthatunk, de sokan vélik, nem vehetők ezek komolyabban, mint az asztrológiai rovat.

Bachelier és a későbbi kutatások szerint ez esetleg *sodródó geometriai Brown mozgást* követ, így csak annak a paraméterei becsülhetők [7]. Más mérések azt mutatják, ehhez bizonyos idő kell, rövid távon hatványtörvény eloszlást követnek az ár, függhet a változásuk iránya a múlttól [8].

A fundamentalista megközelítés az adott tulajdon alapvető tulajdonságaiból próbálja meghatározni az értéket. Mondjuk ha egy vasúti részvény valós értéke a kérdés, akkor például az alábbiak kellenének: Az összes utas és áruforgalmi adat, a járművek mennyisége és állapota, a pályához való hozzáférés, a szerződések, az emberi erőforrás minősége stb. Bár a megközelítés alapos, több probléma is akad. Nehéz a lényegesnek vélt adatokat megszerezni és a hatásukat összegezni. Illetve adódhatnak a rendszeren kívülről jövő hatások, melyek természetüknél fogva kiszámíthatatlanok.

11.2.3. Független hozamok

Jól vizsgálható az optimalitás akkor, ha a lehetséges befektetések azonos eloszlásúak és függetlenek [12]. (Persze igazából sosem azok, például egy válság esetén egyszerre csökken az ára majdnem mindennek.)

Az alább vázolt modellben az i -edik befektetés $X^{(i)}$ -szeres nyereséget ad. (Ez eltér a korábbi leírástól, hisz a kezdeti befektetés is elszámolja, így az tehetjük fel, $X^{(i)} \geq -1$, vagyik nem veszünk többet, mint a beszerzési ár.)

⁴A sorozatosan elért nagy hozam mögött fennáll valamilyen manipuláció, leginkább a *bennfentes kereskedés* gyanúja.

Az egész tőzsdét az $X = (X^{(1)}, \dots, X^{(n)})$ vektor írja le. Ha a kezdőtőke T_0 és $a_j^{(i)}$ az j -edik évben az i -edik befektetésre eső része az osztókének. Így az $a_j = (a_j^{(1)}, \dots, a_j^{(n)})$ vektor a befektetési stratégia, azaz $\sum_{i=1}^n a_j^{(i)} \leq 1$. Ha $a_j X_j$ a $\sum_{i=1}^n a_j^{(i)} X_j^{(i)}$ skalárszorzatot jelenti, akkor az osztóke m év után

$$T_m = T_0 \prod_{j=1}^m (1 + a_j X_j).$$

A legnagyobb nyereséget ígérő részvénybe fektetve az összes tőkét minden fordulóban a legnagyobb várható értéket adja, de olyan nagy szórással, hogy a T_n nagy eséllyel nullához tart.

A következő gondolatmenet ad egy befektetési stratégiát.

Mivel

$$\ln T_n - \ln T_0 = \sum_{j=1}^m \ln(1 + a_j X_j),$$

és ha feltesszük, hogy $a_j = a$, akkor a fenti egyenlet jobboldala akkor a legnagyobb nagy m -re⁵, ha az $\mathbb{E}[\ln(1 + a_j X_j)]$ maximális. Ez kiterjeszthető a folyamat egészére a martingálok használva. Ha a^* az optimális stratégia és T_m^* az osztóke az m -edik évben az a^* használat mellett, T_m pedig egy tetszőleges stratégiát használva, akkor T_m/T_m^* szupermartingál (illetve ha a^* minden koordinátája pozitív és összegük kisebb, mint egy, akkor martingál is egyben).

Ezzel $\lim_{m \rightarrow \infty} T_m/T_m^* = T$ egy valószínűséggel létezik és $\mathbb{E}[T] \leq 1$, tehát a^* hosszú távon is a legjobb stratégia. Azaz az optimalitáshoz nem a $\mathbb{E}[T_m]$ maximalizálása, hanem a $\mathbb{E}[\ln T_m]$ maximalizálása kell.

11.2.4. Szórás becslés

Térjünk vissza a 4.3.1 alfejezetben bevezetett jelölésekre a portfólió problémában. A hatékony portfólió megkeresését felfoghatjuk azon esemény valószínűség maximalizálásának, ahol a hozam legalább ρ . Azaz a cél

$$\max_{x_1, \dots, x_n} \Pr \left(\sum_{j=0}^n \mu_j x_j \geq \rho \right).$$

Ez persze így nehéz, ezért a komplementer esemény (nem érjük el a ρ hozamot) valószínűségére adunk egy korlátot (a Csebisev egyenlőtlenséggel) és ezt próbáljuk minimalizálni. Legyen a portfólió várható értéke $\mu = \mathbb{E} \left(\sum_{j=0}^n \xi_j x_j \right) = \sum_{j=0}^n \mu_j x_j$ és $\text{Var}(\sum_{j=0}^n \xi_j x_j) = x^T C x$. Ezzel

$$\Pr(\mu \leq \rho) = \Pr \left(\mu - \sum_{j=0}^n \xi_j x_j \geq \mu - \rho \right) = \Pr \left(\left| \mu - \sum_{j=0}^n \xi_j x_j \right| \geq \mu - \rho \right) = \frac{\text{Var} \left(\sum_{j=0}^n \xi_j x_j \right)}{(\mu - \rho)^2}.$$

Így az alábbi kvadratikus programozási problémához jutunk.

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{x^T C x}{(\mu - \rho)^2} \\ \sum_{j=1}^n \mu_j x_j &= \rho \\ \sum_{j=1}^n x_j &= 1 \\ x_j &\geq 0 \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

⁵ A nagy számok törvénye miatt.

11.2.5. Függés a befektetőtől

Az alábbi megközelítésekben a befektető személyes igényeinek hatása a közös elem. Látható, hogy ez jelentős változás a Markowitz típusú modellekhez képest.

Indexek és életpályák

A tőzsde (és közvetve a gazdaság) állapotát már régóta speciális portfóliókkal mérik, ezek az *indexek*. Egy-egy indexbe súlyozottan szerepelnek egy tőzsde fontosabb papírai (lásd DJIA, S&P500, Nikkei 225, DAX, BUX) esetleg további csavarokkal (a Nasdaq Composite, ami a technológiai cégeket nézi, de árutőzsdei indexek is). Ezek hosszabb távon nagyobb hozamot adnak a banki kamatoknál vagy állampapírnál, bár az összetételük változik, nem mindegy milyen intervallumban vagyunk illetve a likviditás is problémásabb.

A magánembereknek életkortól függő befektetési mintázatot szoktak javasolni.⁶ A mintázat most egy vektor, ahol (RE, S, B, C) rendre az ingatlan (real estate), részvény (stock), állampapír (government bond) és készpénz/betét (cash) százalékos arányát jelzi. Míg sok év aktivitás (esetleg költözés, jelentős jövedelem) várható, egy $(10, 40, 40, 10)$ is lehet jó, az aktív pálya vége felé inkább $(30, 30, 30, 10)$, míg nyugállományban $(30, 10, 30, 30)$.

Gyakori portfólió váltás

A napi kereskedés (day trading) vagy a sokszor bírált (néha egyenesen tagadott) nagy frekvenciájú kereskedés (high frequency trading) egészen más céllal és eszköztárral rendelkezik. Itt a pillanatnyi híreket, árfolyamok rugalmatlanságát próbálják kihasználni. Ez rendszerint a gyors tőzsdei elérés, nagy számító kapacitás, automatikus kereskedés, mesterséges intelligencia stb. útján történik, melyek magukban is érdekes (és néha aggasztó) problémákhoz vezetnek.

Az egyik klasszikus módszer egy papír értékének egy modellen (pl. az említett sodródó geometriai Brown mozgás vagy Mandelbrot modellje) paraméter becslés. Ha egy adott érték ℓ alá megy az ár, akkor vásárlást, egy u érték felett eladást kezdeményez a program. Az ún. *scalping* stratégiában két papír előre megfigyelt korrelációját használják. Ha pl. pozitív a korreláció és az egyik drágul, de a másik még nem, akkor gyorsan vesznek belőle (ár esésnél vagy negatív korrelációnál eladnak). Ezek a műveletek növelik a tőzsde volatilitását, mert a visszacsatolások időnként óriási rohamokat okoznak.⁷

Derivatívák, határidős üzletek, kockázatok

A tőzsdi papírokkal (áruval, pénzzel stb.) összetett tranzakciók is végezhetőek. Az *opciós ügyletekben* az vehető meg (vagy adható el), hogy egy adott időben adott árfolyamon szállítunk (*short pozíció*) vagy vehetünk (*long pozíció*) valamit. Ennek nagy a jelentősége, mert biztosításra is használható. (Pl. ha egy üzlet haszna más x pénznemben keletkezik, mint amiben a költségek, akkor az árfolyamváltozások óriási kockázatot jelentenek. Ekkor az x pénznemre eladott shortolás eltünteti a bizonytalanság ezen faktorát.)

Az opciós ügyletek könnyen alkalmazhatók tőkeáttételre (hozam és kockázat növelésre). Az árazásra, használatra mély elmélet és széleskörű gyakorlat fejlődött ki, melyet még vázlatosan se ismertethetünk itt.

A sok ember pénzét kezelő befektető másfajta stratégiákat is követhetnek. Bizonyos esetekben (nyugdíjintézetek) törvények szabályozzák, milyen pozíciókat vehetnek fel. Tipikusan a hitelminősítők által biztonságosnak ítélt adósoknak nyújthatnak hitelt (vehetik meg a kötvényeit).

A kockázati tőkét kezelő *hedge fund*-ok tipikusan a tőzsdre éppen belépő, nagy növekedéssel kecsegtető cégekbe ruháznak be. Ezek többsége nem lesz sikeres, viszont néhány esetleg hatalmas hasznot hoz.

⁶ A befektetések sokszor adókedvezményt hordoznak, illetve idő előtti bontásuk ennek elvesztésével járhat.

⁷ Ün. *buborékok*, azaz elszálló árfolyamok, illetve óriási árfolyamesések az elektronikus kereskedés előtt is bekövetkeztek időről időre.

Említésre érdemes az ún. *barbell* (súlyzó) stratégia, lásd [13], melyben paradox módon nem a Markovitz-féle kockázat csökkentés a cél. Ebben részben roppant stabil (arany, ingatlanok stb.) és olyan opciós ügyletek vannak, amelyek nagy hasznot hoznak áresések idején. A stratégia általában veszít, viszont időnként hatalmas hasznot hoz. Az alapja az, hogy a kockázatok egy része a tőzsdén (vagy gazdaságon) kívül keletkezik, előzetes elemzésekkel nem elérhető, de jóval gyakoribb, mint azt általában gondolják.

11.3. Nash tételei

11.3.1. A Nash egyensúly létezése véges játékokban

A bizonyításokban a Brouwer fixponttételt vagy az általánosabb Kakutani fixponttételt használják. Mi az egyszerűbb Brouwer tételt választjuk, annál is inkább mert ez sok szállal kapcsolódik a kombinatorikus játékokhoz.

Definíció. Ha adott egy f függvény a C halmazon, azaz $f : C \mapsto C$, akkor az $z \in C$ pont *fixpont*, ha $f(z) = z$.

11.4. Tétel. (*Brouwer fixpont tétel*) Legyen C egy kompakt, konvex halmaz az R^n -ben és f egy, a C -t önmagába képző folytonos függvény. Ekkor f -nek van fixpontja, azaz van olyan $z \in C$, amelyre $f(z) = z$.

Definíció. [n -személyes játék] Egy $G = (N, X, u)$ véges n -személyes (nem-kooperatív) játék alatt a következőt értjük:

$N = \{1, 2, \dots, n\}$, a játékosok halmaza,

$X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$, ahol minden k -ra $X_k = \{1, \dots, m_k\}$, azaz egy m_k elemű véges halmaz, az k -adik játékos tiszta stratégiáinak halmaza,

$u : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \mapsto R^n$, *kifizető függvény*, amelynek k -adik komponense a k -adik játékos nyereménye egy adott $(i_1, \dots, i_n) \in X$ stratégia n -es mellett.

A mátrixjátékokhoz hasonlóan értelmezhetjük a kevert stratégiákat, az k -adik játékosra ez X_k^* ,

$$X_k^* = \{p_k = (p_{k,1}, \dots, p_{k,m_k}) : p_{k,i} \geq 0, \text{ minden } i\text{-re, és } \sum_{i=1}^{m_k} p_{k,i} = 1\}.$$

A játékosok egy adott kevert stratégiájára, azaz $p = (p_1, \dots, p_n)$ esetén a k -adik játékos várható kifizetése $g_k(p_1, \dots, p_n)$,

$$g_k(p_1, \dots, p_n) = \sum_{i_1=1}^{m_1} \dots \sum_{i_n=1}^{m_n} p_{1,i_1} \dots p_{n,i_n} u_k(i_1, \dots, i_n).$$

Jelölje továbbá $g_k(p_1, \dots, p_n | i)$ a k -adik játékos várható kifizetését, ha a k -adik játékos a p_k kevert stratégiáról az $i \in X_k$ tiszta stratégiára vált át,

$$g_k(p_1, \dots, p_n | i) = g_k(p_1, \dots, p_{k-1}, \delta_i, p_{k+1}, \dots, p_n | i),$$

ahol a δ_i az az eloszlás, amely az i -t egy valószínűséggel veszi fel. Vegyük észre, hogy a $g_k(p_1, \dots, p_n)$ visszanyerhető a $g_k(p_1, \dots, p_n | i)$ -k ismeretében, ugyanis

$$g_k(p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^{m_k} p_{k,i} g_k(p_1, \dots, p_n | i).$$

Definíció. Egy $(p_1, \dots, p_n) \in X^*$ kevert stratégia **Nash egyensúlyi helyzet**, ha minden $k = 1, \dots, n$ -re és minden $i \in X_k$ -ra

$$g_k(p_1, \dots, p_n | i) \leq g_k(p_1, \dots, p_n).$$

11.5. Tétel (Nash). Minden véges n -személyes játéknak van Nash egyensúlyi helyzete.

Bizonyítás. Minden k -ra X_k^* kompakt és konvex részhalmaza az R^n -nek, ezért a $C = X_1^* \times \dots \times X_n^*$ is kompakt és konvex része az R^m -nek, ahol $m = \sum_{i=1}^n m_i$. Defináljuk az f függvényt úgy, hogy a $z = (p_1, \dots, p_n) \in C$ -re $f(z) = z' = (p'_1, \dots, p'_n)$, ahol

$$p'_{k,i} = \frac{p_{k,i} + \max(0, g_k(p_1, \dots, p_n|i) - g_k(p_1, \dots, p_n))}{1 + \sum_{j=1}^{m_k} \max(0, g_k(p_1, \dots, p_n|i) - g_k(p_1, \dots, p_n))}.$$

Minden $p_{k,i} \geq 0$ és a nevezőt úgy választottuk, hogy $\sum_{j=1}^{m_k} p'_{k,i} = 1$, ezért $z' \in C$. Továbbá az f függvény folytonos, hiszen minden $g_k(p_1, \dots, p_n)$ függvény folytonos. Így használhatjuk a Brouwer fixpont tételt, vagyis van olyan $z' = (q_1, \dots, q_n) \in C$, amelyre $f(z') = z'$. Ekkor viszont

$$q_{k,i} = \frac{q_{k,i} + \max(0, g_k(z'|i) - g_k(z'))}{1 + \sum_{j=1}^{m_k} \max(0, g_k(z'|i) - g_k(z'))}$$

minden $k = 1, \dots, n$ és $i = 1, \dots, m_n$ -re. Másrészt a $g_k(z')$ az átlaga a $g_k(z'|i)$ számoknak, így $g_k(z'|i) \leq g_k(z')$ legalább egy olyan i -re, amelyre $q_{k,i} > 0$. Mivel a z' fixpont, erre az i -re igaz, hogy $\max(0, g_k(z'|i) - g_k(z')) = 0$, azaz

$$q_{k,i} = \frac{q_{k,i}}{1 + \sum_{j=1}^{m_k} \max(0, g_k(z'|i) - g_k(z'))}.$$

Ez csak úgy lehet, ha $\sum_{j=1}^{m_k} \max(0, g_k(z'|i) - g_k(z')) = 0$, azaz $g_k(z'|i) \leq g_k(z')$ minden k -ra és i -re. Ez viszont azt jelenti, hogy $(q_1, \dots, q_n)$ Nash egyensúlyi helyzet. $\square$

Megjegyzés: A bizonyításból látható, hogy az egyensúlyi helyzetek megkeresése az f fixpontjainak a megkeresését jelenti. Ez a mátrixjátékok esetén lineáris programozási feladatra vezetett, általában sajnos sokkal nehezebb dolgunk van.

11.3.2. Nash-alkumegoldás (NBS)

Adott egy $X \subset \mathbb{R}^2$ korlátos konvex zárt halmaz és $d \in \mathbb{R}^2$. X -re úgy tekintünk, mint a kifizetések lehetséges halmazára, amiben megegyezhet a két játékos, míg a d kifizetést (*status quo* vagy *disagreement point*) akkor kapják, ha nem jutnak dűlőre. Ésszerű feltenni, hogy van olyan $x \in X$, hogy $d < x$ és minden $x \in X$ -re $d \leq x$.⁸ A megegyezést egy $F : (X, d) \rightarrow X$ függvénybe kódoljuk, ahol F -re természetes axiómákat teszünk fel:

- (i) Invariáns affin transzformációkra
- (ii) Pareto-optimális⁹
- (iii) Független az irreleváns alternatíváktól
- (iv) Szimmetrikus.

Az $S = F(X, d)$ pontot Nash-alkumegoldásnak, röviden NBS-nek (*Nash Bargaining Solution*) nevezzük. Részletezzük az axiómákat.

- (i) $\tau_{Ab} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ affin transzformáció, azaz $\tau_{Ab}(x) := Ax + b$, ahol

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} \text{ és } b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Így $F(X, d) = S \Rightarrow F(\tau_{Ab}(X), \tau_{Ab}(d)) = \tau_{Ab}(S)$.

(ii) szerint csak az X jobb-felső határa lehet megoldás, azaz az olyan $(x_1, x_2) \in X$, amelyre nem létezik $(z_1, z_2) \in X$ úgy, hogy $x_i < z_i$, $i = 1, 2$.

A (iii) formálisan $F(X, d) = S$, $Y \subset X$, $S \in Y$ és $d \in Y \Rightarrow F(Y, d) = S$.

A (iv) szerint ha X szimmetrikus az $x_1 = x_2$ egyenesre, akkor S ezen az egyenesen van.

⁸ $\mathbb{R}^2$ -ben $y < x$ ($y \leq x$) akkor és csak akkor, ha $y_i < x_i$ ($y_i \leq x_i$), $i = 1, 2$ esetén.

⁹ Jegyezzük meg, hogy ez a fogalom mást takar, mint a Shapley-értéknél használt Pareto-hatákonyság.

11.1. Lemma. (Nash) Tegyük fel, hogy az X határához egy S pontban húzott érintő olyan R és T pontokban metszi a d -ben állított vízszintes és függőleges egyeneseket, melyre $S = (R + T)/2$. Ekkor $S = F(X, d)$, azaz NBS.

Bizonyítás. Legyen $d = (d_1, d_2)$ és S olyan Pareto-optimális pont, amelyre $S = (R + T)/2$, továbbá, ha $T = (t_1, t_2)$ és $R = (r_1, r_2)$

$$A = \begin{pmatrix} (t_1 - d_1)^{-1} & 0 \\ 0 & (r_2 - d_2)^{-1} \end{pmatrix} \text{ és } b = \begin{pmatrix} -d_1/(t_1 - d_1) \\ -d_2/(r_2 - d_2) \end{pmatrix}.$$

Ekkor $\tau_{Ab}(d) = (0, 0)$, $\tau_{Ab}(R) = (0, 1)$, $\tau_{Ab}(T) = (1, 0)$ és $\tau_{Ab}(S) = (0.5, 0.5)$. Legyen $Y = \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 \leq 1, x_1, x_2 \geq 0\}$, azaz $\tau_{Ab}(X) \subset Y$. Most a $\tau_{Ab}(S) = F(Y, 0)$ (iv) miatt és mind a $(0, 0)$ és $\tau_{Ab}(S)$ eleme a $\tau_{Ab}(X)$ halmaznak. Így a (iii) axióma szerint $\tau_{Ab}(S) = F(\tau_{Ab}(X), \tau_{Ab}(d))$ és ebből az (i) miatt $S = F(X, d)$. $\square$

Példa: A fogolydilemmára X egy háromszög, melynek csúcsai $(-1, -1)$, $(-10, 0)$, $(0, -10)$, $d = (-5, -5)$. $S = (-1, -1)$, azaz a paradoxon eltűnik.

11.6. Tétel. (Nash) Az $F(X, d)$ az egyértelmű megoldása a $\max(x_1 - d_1)(x_2 - d_2)$, $(x_1, x_2) \in X$ feladatnak.

Bizonyítás. A d origóba tolásával feltehetjük, hogy $d = (0, 0)$ és a célfüggvény $x_1 x_2$. Utánna a megfelelő A mátrixú $\tau_A := \tau_{A(0,0)}$ affin transzformációval elérhető, hogy a feladat egyértelmű¹⁰ S optimum pontja az $(1, 1)$ pontba kerüljön. Ha az X halmaz képe az $x_2 = 2 - x_1$ egyenes alatt marad, akkor a 11.1. lemma miatt az $(1, 1) = F(\tau_{Ab}(X), 0)$, így (i) miatt $S = F(X, d)$. Tegyük fel, hogy van olyan $(x'_1, x'_2) \in \tau_{Ab}(X)$, mely a $x_2 = 2 - x_1$ egyenes fölött van, feltehető, hogy $x'_1 < 1$. Ekkor az $m < -1$ meredekségű, az $I = [(1, 1), (x'_1, x'_2)]$ szakasz része $\tau_{Ab}(X)$ -nek és van olyan $(x_1^*, x_2^*) \in I$, amire $x_1^* x_2^* > 1$. Ez viszont ellenmond S optimalitásának, hiszen a τ_A hiperbolát hiperbolába visz és monoton az $x_1 x_2$ szorzatra. $\square$

¹⁰ X konvex, korlátos és zárt.

Irodalomjegyzék

- [1] Vašek Chvátal, *Linear programming*. A Series of Books in the Mathematical Sciences. W. H. Freeman and Company, New York, 1983.
- [2] Michael J. Crowe, A history of vector analysis. Notre Dame, 2002 őszi félév
https://www.mtsu.edu/faculty/wding/files/A_History-of-Vector_Analysis.pdf letöltés ideje: 2020.04.18.
- [3] Fényes Imre, *A fizika eredete*. Kossuth Kiadó 1980.
- [4] Forgó Ferenc és Szép Jenő, *Bevezetés a játékelméletbe*. Közgazdasági és Jogi, Budapest, 1974.
- [5] David Gale, Lloyd S. Shapley, College Admissions and the Stability of Marriage. *Amer. Math. Monthly* **69** (1962), no. 1, 9–15.
- [6] Seth Godin, *Unleashing the Idea Virus*. www.ideavirus.com.
- [7] Samuel Karlin és Howard M. Taylor, *Sztochasztikus folyamatok*. Gondolat Kiadó, 1985.
- [8] Benoit B. Mandelbrot, The variation of the prices of cotton, wheat, and railroad stocks, and of some financial rates. *Fractals and scaling in finance*. Springer, New York, NY, 1997. 419–443.
- [9] Robert Nau, *Seminar in Choice Theory*. www.gametheory.net
- [10] Fred Roberts, *Discrete mathematical models with applications to social, biological, and environmental problems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1976.
- [11] Simonyi Károly, *A fizika kultúrtörténete*. 2. bővített kiadás, Gondolat kiadó, Budapest, 1981.
- [12] Székely Gábor, *Paradoxonok a véletlen matematikájában*. Typotex, 2010.
- [13] Nassim Nicholas Taleb, *A fekete hattyú avagy a legváratlanabb hatás*. Gondolat kiadói kör, Budapest, 2012.
- [14] E. Wigner, E. P. The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. Richard Courant lecture in mathematical sciences delivered at New York University, May 11, 1959. Communications on Pure and Applied Mathematics. 13: (1960)
<https://www.dartmouth.edu/matc/MathDrama/reading/Wigner.html>