1. előadás

Bevezetés

Lehetetlen egészen pontosan megállapítani, mi tekinthető az operációkutatás első eredményeinek, hisz az optimalizálás mégcsak nem is az emberi faj kiváltsága. Kétségtelen viszont, hogy már korai civilizációk élelmiszerelosztási, illetve hadtáprendszerének működtetéséhez szükség volt optimalizálási és ütemezési problémák tudatos megoldására.

Jobban követhető a fejlődés az operációkutatás centrális diszciplinája, a *lineáris programozás* esetében. Ennek ez idő szerint legkorábbi formalizálását 1757-ben adta a horvát Boscovič, aki királyi csillagászként hibaszámításra dolgozta ki módszerét. Szintén a hibaszámítás gondolata foglalkoztatta Napóleon egyiptomi hadjáratában részt vevő Fouriert. Ő a piramisok magasságára volt kiváncsi, és mellékesen a lineáris programozást is megfogalmazta. Mi több, 1820 körül geometriai terminust használva lényegében ugyanazt a *szimplex algoritmust* javasolta, amellyel 130 évvel később Dantzig híressé vált. (Megjegyzendő, hogy ugyancsak hibaszámítási problémák során jutott el Laplace a centrális határeloszlás tételéhez, Gauss pedig a róla elnevezett ún. *Gauss elimináció* algoritmusához és a Gauss vagy normális eloszlás bevezetéséhez.)

Fourier idejében azonban mind a lineáris algebra fejlettsége, mind a "számítógépek" színvonala elégtelen volt a felfedezés jelentőségének felismeréséhez. Így 1874-ben közgazdasági elméleteket vizsgálva Walras újra felfedezte a lineáris programozást. A századforduló táján Farkas Gyula fizikai egyensúly feltételeket vizsgálva, 1928-ban Neumann János pedig a játékelméletet megalapozva bizonyították klasszikussá vált tételeiket.

A XX. században, 1947-ben, Koopmans állított fel olyan közgazdasági modellt, amely a későbbi lineáris programozáshoz vezetett. Valamivel korábban Kantorovics is hasonló formulázását adta optimalizálási problémáknak, de az ő eredményei az elzártság miatt (30-as évek Szovjetúniója) sokáig ismeretlenek maradtak.

A II. világháború idején az Egyesült Államok hadserege hozott létre egy speciális kutató csoportot, amely a katonai operációk matematikai megalapozását volt hivatott elvégezni. Innen a terület elnevezése is: operációkutatás (Operations Research). Ennek a csoportnak volt meghatározó tagja George Dantzig, aki újraalkotta a lineáris programozási modellt és első ízben hatékony algoritmust adott rá, az azóta klasszikussá vált szimplex módszert. (A sors fintoraként, az algoritmus katonai jelentősége miatt néhány évig nem publikálhatta a felfedezését.)

A fejlődés ezek után kezdődött meg igazán, hatalmasra nőtt az alkalmazások köre, az elmélet pedig szerteágazott. Megszületett a játékelmélet, a hálózati folyamok elmélete, a sztochasztikus programozás, a nemlineáris programozás, a kombinatorikus optimalizálás, szemidefinit programozás stb.

Az operációkutatás és a belőle kinőtt területek fontosságát illusztrálja a lineáris programozási modellekért Kantorovicsnak és Koopmansnak 1975-ben, illetve a játékelméleti eredményeikért a Nash, Selten és Harsányi triónak 1994-ben adott közgazdasági Nobel díj.

Nem állt meg a lineáris programozás fejlődése sem, az utóbbi időkben is születtek lényeges eredmények. Itt Khachiyan által 1979-ben a lineáris programozásra alkalmazott *ellipszoid módszerre* és Karmarkar 1984-es eredményére, mellyel elindította az ún. *belső pont módszerek* vizsgálatát, kell utalnunk.

A magyarok szintén kivették részüket a munkából: Prékopa András amellett, hogy óriási szerepet játszott a sztochasztikus programozás megalapozásában, a hazai operációkutatást szinte egymaga teremtette meg. Az utóbbi időkkel kapcsolatban pedig Lovász László nevét kell megemlítenünk, aki mind a kombinatorikus optimalizálás, mind a szemidefinit programozás területén rengeteg mély gondolattal gazdagította az elméletet. E sorok írója mindkettőjük iránt hálát érez az oktatásukért és segítségükért.

A szimplex módszer

A diéta probléma

Célunk egy olyan étrend összeállítása, ami fedezi a napi minimális szükségleteinket, de lehetőleg minél olcsóbb. Minimális szükséglet: 2000 kCal, 55 g fehérje, 800 mg kalcium, jelölésben Ca. Ezeket az adatokat például táplálkozás tudományi szakkönyvekből nyerhetjük; az értékek függhetnek az nemtől, életkortól, a végzett fizikai aktivitástól, éghajlattól és a tudomány pillanatnyi állásától.[1] Néhány étel becsült adagja, tápértéke és ára.

		Tápanyag	tartalom		
Étel	Adag	Energia (kCal)	Fehérje (g)	Ca (mg)	Ár (cent)
Zabpehely	28 g	110	4	2	3
Csirke	100 g	205	32	12	24
Tojás	2 db	160	13	54	13
Tej	2,37 dl	160	8	285	9
Meggyes lepény	170 g	420	4	22	20
Disznóhús babbal	260 g	260	14	80	19

A feltételeknek például 10 adag disznóhús babbal megfelelne és csak 1,9 dollárba kerül. Ez a gyomor számára megterhelő tűnik, ezért bevezetünk adag/nap korlátokat. (Igazából azt szeretnénk, hogy a majdani modellünk képes legyen kezelni az ilyen típusú megszorításokat.)

Étel	Adag/nap
Zabpehely	4
Csirke	3
Tojás	2
Tej	8
Meggyes lepény	2
Disznóhús babbal	2

A leglényegesebb minden problémánál a változók kijelölése. Most a változóinkat az ételekhez rendeljük és a változó értéke az elfogyasztandó étel mennyiségét (adagban) jelenti majd. Jelölje x_1 az elfogyasztandó zabpehely, x_2 a csirke, x_3 a tojás, x_4 a tej, x_5 a meggyes lepény, x_6 a disznóhús babbal adagok számát! Az étrendnek a következő feltételeket kell kielégítenie:

[1] Az élet fenntartásához szükséges energiát az elmúlt 50 évben túlbecsülték; ez a hiba a keringési problémák és a cukorbetegség előfordulásának növekedésével járt.

- Adag/nap korlát szerint
$$0 \leq x_1 \leq 4$$
$$0 \leq x_2 \leq 3$$
$$0 \leq x_3 \leq 2$$
$$0 \leq x_4 \leq 8$$
$$0 \leq x_5 \leq 2$$
$$0 \leq x_6 \leq 2$$

- Napi szükséglet szerint

$$\begin{array}{rrrrrrcr}
110x_1 & +205x_2 & +160x_3 & +160x_4 & +420x_5 & +260x_6 & \geq & 2000 \\
4x_1 & +32x_2 & +13x_3 & +8x_4 & +4x_5 & +14x_6 & \geq & 55 \\
2x_1 & +12x_2 & +54x_3 & +285x_4 & +22x_5 & +80x_6 & \geq & 800
\end{array}$$

  Itt figyelembe vettük, hogy egy ételből nem fogyaszthatunk negatív mennyiséget vagy túl sokat, illetve összegeztük a bennük lvő tápértéket. Végül pedig az étrend költségét is kifejezhetjük a bevezetett változókkal és megadott konstansokkal:

$$3x_1 \quad +24x_2 \quad +13x_3 \quad +9x_4 \quad +20x_5 \quad +19x_6$$

Ezek után a diéta probléma matematikai leírása a következő:

$$\begin{array}{lrrrrrrcr}
\min & 3x_1 & +24x_2 & +13x_3 & +9x_4 & +20x_5 & +19x_6 & & \\
 & & & & & & & & \\
 & 110x_1 & +205x_2 & +160x_3 & +160x_4 & +420x_5 & +260x_6 & \geq & 2000 \\
 & 4x_1 & +32x_2 & +13x_3 & +8x_4 & +4x_5 & +14x_6 & \geq & 55 \\
 & 2x_1 & +12x_2 & +54x_3 & +285x_4 & +22x_5 & +80x_6 & \geq & 800 \\
 & x_1 & & & & & & \leq & 4 \\
 & & x_2 & & & & & \leq & 3 \\
 & & & x_3 & & & & \leq & 2 \\
 & & & & x_4 & & & \leq & 8 \\
 & & & & & x_5 & & \leq & 2 \\
 & & & & & & x_6 & \leq & 2 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \geq & 0
\end{array}$$

Általában *lineáris programozás* alatt következő problémákat értjük:

Adottak a $c_1, c_2, \ldots, c_n$ valamint a $b_1, b_2, \ldots, b_m$ valós számok és egy m-szer n-es $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ valós mátrix, továbbá a mátrix minden sorához hozzárendelünk egy "$\leq$", "$\geq$" vagy "$=$" relációt. A cél az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ valós értékű változók egy olyan behelyettesítési értékeinek meghatározása, amely maximalizálja (vagy minimalizálja) a $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ lineáris függvény értéket, továbbá a $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j$ a b_i értékkel a sorhoz rendelt relációban van. (Azaz $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b_i$, $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \geq b_i$ vagy $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b_i$.)

Megjegyzés: A változók egy részére explicit módon adhatunk korlátokat (pl. $x_i \geq 0$, vagy $l_i \leq x_i \leq u_i$, ahol l_i, u_i valósak), de ez befoglalható az A mátrixba is.

Definíció. Az A mátrix által definiált relációknak (továbbá az esetleges $x_i \geq 0$, $l_i \leq x_i \leq u_i$ feltételeknek szintén) eleget tevő $x = (x_1, \ldots, x_n)$ vektorokat **lehetséges megoldásoknak**, míg a célfüggvényt maximalizáló (minimalizáló) $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ lehetséges megoldásokat **optimális megoldásoknak** nevezzük.

Lássunk egy példát optimális megoldás keresésére, ahol az LP feladat a később definiálandó ún. *standard formában* van.

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\max & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & & \\
& & & & & & & \\
& 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 5 \\
& 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 11 \\
& 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & \leq & 8 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Vezesük be az x_4, x_5, x_6 *mesterséges változókat*! (Szokásos a *slack* változó elnevezés is.)

$$\begin{array}{rrcrcrcrl}
\max & z & & & & & & & \\
x_4 = & 5 & - & 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & (1) \\
x_5 = & 11 & - & 4x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & (2) \\
x_6 = & 8 & - & 3x_1 & - & 4x_2 & - & 2x_3 & (3) \\
z = & & & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 &
\end{array}$$

$$x_1, \ldots, x_6 \geq 0$$

Egy lehetséges megoldás: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 5$, $x_5 = 11$, $x_6 = 8$, $z = 0$.

Természetesen az x_4, x_5, x_6 változók csak nemnegatív értéket vehetnek fel, különben az eredeti egyenlőtlenségek nem teljesülnének. Próbáljuk meg hát az x_1-et növelni úgy, hogy az x_4, x_5, x_6 változó értéke nemnegatív maradjon; így persze x_1-re korlátok adódnak;

$$(1) \Rightarrow x_1 \leq \frac{5}{2} \qquad (2) \Rightarrow x_1 \leq \frac{11}{4} \qquad (3) \Rightarrow x_1 \leq \frac{8}{3}$$

Mivel (1) adja a legszorosabb korlátot, így egy új megoldás: $x_1 = 5/2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, $x_6 = 1/2$, $z = 25/2$.

(1)-ből x_1-et kifejezve kapjuk: $x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \qquad (1)$

Ezt helyettesítsük be (2)-be és (3)-ba:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl}
x_5 & = & 11 & - & 4(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4) & - & x_2 & - & 2x_3 & \quad (2) \\
x_6 & = & 8 & - & 3(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4) & - & 4x_2 & - & 2x_3 & \quad (3) \\
z & = & & & 5(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4) & + & 4x_2 & + & 3x_3 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl}
x_1 & = & \frac{5}{2} & - & \frac{3}{2}x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & - & \frac{1}{2}x_4 & (1) \\
x_5 & = & 1 & + & 5x_2 & & & + & 2x_4 & (2) \\
x_6 & = & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{2}x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & + & \frac{3}{2}x_4 & (3) \\
z & = & \frac{25}{2} & - & \frac{7}{2}x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & - & \frac{5}{2}x_4 &
\end{array}$$

Hívjuk a baloldalon szereplő változókat, x_1, x_5 és x_6-ot *bázisnak.* A bázison kívüli változók 0-át vesznek fel. A célfüggvény értéke az itt megjelenő konstans, tehát $z = 25/2$.

Most az x_2-t és x_4-t nem lenne érdemes növelni, mert ez a z célfüggvényt csökkentené. Kiválasztjuk x_3-t, s megnézzük, hogy meddig lehet növelni.

$$(1) \Rightarrow x_3 \leq 5 \qquad (3) \Rightarrow x_3 \leq 1$$

Mivel (3) adja a legszorosabb korlátot, így egy új megoldás: $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, $x_6 = 0$, $z = 13$.
(3)-ból x_3-t kifejezve kapjuk: $x_3 = 1 + x_2 + 3x_4 - 2x_6$

Ezt helyettesítsük be (1)-be:

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
x_3 = & 1 & + & x_2 & + & 3x_4 & - & 2x_6 \\
x_1 = & 2 & - & 2x_2 & - & 2x_4 & + & x_6 \\
x_5 = & 1 & + & 5x_2 & + & 2x_4 & & \\
z = & 13 & - & 3x_2 & - & x_4 & - & x_6
\end{array}$$

Nem lehet tovább menni, mert ily módon nem tudjuk tovább növelni z értékét. Ugyanakkor *nem is kell* tovább keresnünk, biztos, hogy semmiféleképpen nem növelhető a célfggvény, azaz egy maximális megoldást találtunk. A z célfüggvény értéket sokféleképpen, de mindig pontosan kifejezhetjük a változóinkkal.[2] Most úgy sikerült ez a kifejezés, hogy a szereplő együttható nem pozitívak: $z = 13 - 3x_2 - x_4 - x_6$. Bármely megoldást tekintsünk is, az x_2, x_4 és x_6 változók értéke nem negatív. Ez viszont, a célfüggvény együtthatóinak nempozitivitása miatt, azt jelenti, hogy a célfüggvény sohasem lehet 13-nál nagyobb. Mivel $x_j \geq 0$, ha $j = 1, \ldots, 6$, így az $x_2 = 0$, $x_4 = 0$, $x_6 = 0$ választás maximális megoldást ($z = 13$) ad. A fent leírt lépések a **szimplex algoritmus** lépései.

Standard feladatok, szótárok

LP standard feladat, vagy *standard formájú LP* alatt a következő problémákat értjük.

$$\begin{array}{rcll}
\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & & \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq & b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\
x_j & \geq & 0 & (j = 1, 2, \ldots, n)
\end{array}$$

Szavakban:

[2] A változóink *nem* lineárisan függetlenek egymástól, ezért nem egyértelmű a kifejezés.

1. Az $x_1, \ldots, x_n$ változók lineáris célfüggvényét *maximalizáljuk.*

2. A szereplő (lineáris) egyenlőtlenségek mind *kisebb-egyenlő* formában vannak. (Azaz nincs nagyobb-egyenlőség.)

2. Nem szerepel egyenlőség a relációk között.

4. Minden $x_1, \ldots, x_n$ változó *nemnegatív.*

Megjegyzés: Minden LP standard formára hozható, azaz megadható egy olyan standard formájú LP feladat amelynek a megoldásából kiolvashatjuk az eredeti probléma megoldását. **1.** a minimalizálást az célfüggvény -1-gyel való szorzásával maximum keresésre vezethetjük vissza. **2.** egy egyenlőséget helyettesíthetünk két egyenlőtlenséggel. **3.** Ha egy egyenlőtlenség balra néz, újra egy -1-gyel való szorzás segít. Végül egy tetszőleges értékeket felvevő x változót írjunk fel két nemnegatív változó *különbségeként*, azaz $x = x^+ - x^-$, ahol $x^+, x^- \geq 0$.

Egy LP standard feladat szótáralakja

A látott példához hasonlóan vezessünk be x_{n+i} $(i = 1, \ldots, m)$ nemnegatív változókat, melyek az egyenlőtlenségek két oldalának a különbségét mérik. Rendezzük a nyert egyenlőségeket úgy, hogy az x_{n+i} változók a bal oldalon, az összes többi tag jobb oldalon (a konstansok elöl) szerepeljenek.

$$\begin{aligned} x_{n+i} &= b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad (i = 1, \ldots, m) \\ z &= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \end{aligned}$$

Definíció. Az $x_1, \ldots, x_n$ változókat **természetes**, míg az $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ változókat **mesterséges** változóknak nevezzük.
Definíció. Egy szótárban a bal oldalt álló változók B halmazát **bázis változóknak**, míg a jobb oldalon állók N halmazát **nembázis változóknak** nevezzük.
Definíció. Egy **szótár által definiált megoldás** vagy **bázismegoldás** az, amelyben minden nembázis változó értéke nulla, míg a bázisváltozók értéke az egyenletek jobb oldalán álló konstans.

Állítás 1 *Ha egy szótár egy lehetséges megoldást definiál, akkor a rákövetkező szótár is azt fog.*

Bizonyítás. Az eddigiek alapján nyilvánvaló. □

Definíció. Két szótár **ekvivalens**, ha az általuk leírt egyenletrendszer összes (tetszőleges valós) megoldásai és a hozzájuk tartozó célfüggvényérték is megegyeznek.

Állítás 2 *Egy szótárnak a példában alkalmazott transzformációja egy, az előzővel ekvivalens szótárra vezet.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló, mert az alkalmazott algebrai manipulációk (egy egyenlet átrendezése, megszorzása egy nem zéró számmal, illetve változók behelyettesítése) nem változtat az egyenletrendszer megoldásain. □

Megjegyzés: Egy standard LP feladat *lehetséges megoldásai* és a belőle képzett szótárak *nemnegatív megoldásai* között szoros kapcsolat áll fenn, hisz a mesterséges változók nemnegatívitása éppen az eredeti LP egyenlőtlenségeinek teljesüléset jelenti. Ha $x_1, \ldots, x_n$ az LP egy lehetséges megoldása, akkor az $x_1, \ldots, x_n$ kiegészítve az bal és jobboldalak különbségével mint az $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ változók értékeivel a szótár egy nemnegatív megoldását adja. Fordítva, a szótár egy nemnegatív megoldásából a mesterséges változók elhagyásával az eredeti LP egy lehetséges megoldását kapjuk.

2. előadás

A példánkban láttuk, hogy a szimplex algoritmus alapvetően az alábbi fő szakaszokra bontható:

1. Inicializáció (kiindulás)
2. Iteráció (közelítés)
3. Termináció (befejezés)

Az eddigiekben szándékosan figyelmen kívül hagytuk az algoritmus során fellépő nehézségeket, elágazási lehetőségeket. Az inicializáció problémáját a következő órán tárgyaljuk, de az iteráció és termináció kérdéseit már most tisztázni fogjuk.

1. Inicializáció

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j &\le b \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j &\ge 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}$$

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Ha minden $b_i \ge 0$, akkor a $(0, 0, \ldots, 0)$ lehetséges megoldás. Ellenkező esetben nem tudjuk elkezdeni az iterációt. Az eljárásunk elkezdéséhez tehát szükségünk lesz egy olyan szótárra, amely lehetséges megoldást definiál.

2. Iteráció

$$z = z^* + \sum_{j \in N} \bar{c}_j x_j,$$

ahol z^* a célfüggvény pillanatnyi értéke; N a nembázis változók, B a bázis változók halmaza.

Tegyük fel, hogy a következő a pillanatnyi helyzet:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_2 & = & 5 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 3x_1 \\ x_5 & = & 7 & & & - & 3x_4 & - & 4x_1 \\ \hline z & = & 5 & + & \boxed{3x_3} & - & x_4 & - & x_1 \end{array}$$

Az x_3 értékét célszerű növelni úgy, hogy az x_2 és az x_5 ne legyen negatív. Viszont a fenti két egyenlet egyike sem ad megszorítást (felső korlátot) x_3-ra, a feladat célfüggvénye tetszőlegesen nagy értéket vehet fel. A továbbhaladás közben tehát az alábbiak történhetnek meg:

a) A szótárban a *pivot* (kiszemelt) változóhoz tartozó összes együttható ≥ 0, azaz nincs megszorítás. Ekkor a megoldás *nem korlátos.*

b) A célfüggvény változóinak együtthatói nem pozitívak. Ekkor *optimumnál vagyunk.*

c) Egyszerre több változó is beléphet a bázisba; következésképp ki kell egyet választanunk közülük.

d) A belépő változók értéke nem növelhető és a célfüggvény sem nő. Ekkor azt mondjuk *degeneráció* lépett fel.

Definíció. Egy szótár degenerált, ha benne valamely x_i bázisváltozó értéke nulla.
Példa:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_4 & = & 1 & & & & & - & 2x_3 \\ x_5 & = & 3 & - & 2x_1 & + & 4x_2 & - & 6x_3 \\ x_6 & = & 2 & + & x_1 & - & 3x_2 & - & 4x_3 \\ \hline z & = & & & 2x_1 & - & x_2 & + & \boxed{8x_3} \end{array}$$

A bázisból kilépő változó nem egyértelműen meghatározott, hiszen mindhárom egyenlet 1/2 megszorítást ad az x_3 változó értékére. A degeneráció által egy különösen kellemetlen “csapdába” kerülhetünk, ún. *ciklizáció* léphet fel.

Példa:

$$
\begin{array}{rcrrrrrrrrr}
x_5 & = & & - & \frac{1}{2}x_1 & + & \frac{11}{2}x_2 & + & \frac{5}{2}x_3 & - & 9x_4 \\
x_6 & = & & - & \frac{1}{2}x_1 & + & \frac{3}{2}x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & - & x_4 \\
x_7 & = & 1 & - & x_1 & & & & & & \\
\hline
z & = & & & \boxed{10x_1} & - & 57x_2 & - & 8x_3 & - & 24x_4
\end{array}
$$

Az 1. és a 2. egyenlet (x_5-t és x_6-t kifejező) adja a legszorosabb felső korlátot ($x_1 = 0$), így mondjuk kerüljön az x_5 helyére a bázisba az x_1 változó.

$$
\begin{array}{rcrrrrrrrrr}
x_1 & = & & & 11x_2 & + & 5x_3 & - & 18x_4 & - & 2x_5 \\
x_6 & = & & - & 4x_2 & - & 2x_3 & + & 8x_4 & + & x_5 \\
x_7 & = & 1 & - & 11x_2 & - & 5x_3 & + & 18x_4 & + & 2x_5 \\
\hline
z & = & & & \boxed{53x_2} & + & 41x_3 & - & 204x_4 & - & 20x_5
\end{array}
$$

A 2. egyenlet (x_6-t kifejező) adja a legszorosabb felső korlátot (1-ben: nincs, 2-ban: $x_2 = 0$, 3-ban: $x_2 \leq 1/11$), így az x_6 helyére kerül a bázisba az x_2 változó.

$$
\begin{array}{rcrrrrrrrrr}
x_2 & = & & - & \frac{1}{2}x_3 & + & 2x_4 & + & \frac{1}{4}x_5 & - & \frac{1}{4}x_6 \\
x_1 & = & & - & \frac{1}{2}x_3 & + & 4x_4 & + & \frac{3}{4}x_5 & - & \frac{11}{4}x_6 \\
x_7 & = & 1 & + & \frac{1}{2}x_3 & - & 4x_4 & - & \frac{3}{4}x_5 & - & \frac{11}{4}x_6 \\
\hline
z & = & & & \boxed{\frac{29}{2}x_3} & - & 98x_4 & - & \frac{27}{4}x_5 & - & \frac{53}{4}x_6
\end{array}
$$

Az 1. és a 2. egyenlet (x_2-tés x_1-t kifejező) adja a legszorosabb felső korlátot (1-ben, 2-ban: $x_3 = 0$, 3-ban: nincs), így mondjuk kerüljön az x_1 helyére a bázisba az x_3 változó.

$$
\begin{array}{rcrrrrrrrrr}
x_3 & = & & - & 2x_1 & & + & 8x_4 & + & \frac{3}{2}x_5 & - & \frac{11}{2}x_6 \\
x_2 & = & & & x_1 & & - & 2x_4 & - & \frac{1}{2}x_5 & + & \frac{5}{2}x_6 \\
x_7 & = & 1 & - & x_1 & & & & & & & \\
\hline
z & = & & - & 29x_1 & & + & \boxed{18x_4} & + & 15x_5 & - & 93x_6
\end{array}
$$

A 2. egyenlet (x_2-t kifejező) adja a legszorosabb felső korlátot (2-ban: $x_4 = 0$, 1-ben, 3-ban: nincs), így az x_2 helyére kerül a bázisba az x_4 változó.

$$
\begin{array}{rcrrrrrrrrr}
x_4 & = & & & \frac{1}{2}x_1 & - & \frac{1}{2}x_2 & - & \frac{1}{4}x_5 & + & \frac{5}{4}x_6 \\
x_3 & = & & & 2x_1 & - & 4x_2 & - & \frac{1}{2}x_5 & + & \frac{9}{2}x_6 \\
x_7 & = & 1 & - & x_1 & & & & & & \\
\hline
z & = & & - & 20x_1 & - & 9x_2 & + & \boxed{\frac{21}{2}x_5} & - & \frac{141}{2}x_6
\end{array}
$$

Az 1. és a 2. egyenlet (x_4-t és x_3-t kifejező) adja a legszorosabb korlátot (1-ben és 2-ban: $x_5 = 0$, 3-ban: nincs), így mondjuk kerüljön az x_3 helyére a bázisba az x_5 változó.

$$
\begin{array}{rcrrrrrrrrr}
x_5 & = & & & 4x_1 & - & 8x_2 & - & 2x_3 & + & 9x_6 \\
x_4 & = & & - & \frac{1}{2}x_1 & - & \frac{3}{2}x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & - & x_6 \\
x_7 & = & 1 & - & x_1 & & & & & & \\
\hline
z & = & & & 22x_1 & - & 93x_2 & - & 21x_3 & + & \boxed{24x_6}
\end{array}
$$

A 2. egyenlet (x_4-t kifejező) adja a legszorosabb felső korlátot (2-ben: $x_4 = 0$, 1-ben, 3-ban: nincs), így az x_4 helyére kerül a bázisba az x_6 változó.

$$
\begin{array}{rcrrrrrrrrr}
x_6 & = & & - & \frac{1}{2}x_1 & + & \frac{3}{2}x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & - & x_4 \\
x_5 & = & & - & \frac{1}{2}x_1 & + & \frac{11}{2}x_2 & + & \frac{5}{2}x_3 & - & 9x_4 \\
x_7 & = & 1 & - & x_1 & & & & & & \\
\hline
z & = & & & 10x_1 & - & 57x_2 & - & 8x_3 & - & 24x_4
\end{array}
$$

Ezzel újból abba a szótárba jutottunk, ahonnan a példánk indult. Ciklizáció lépett fel.

Tétel 1 *Ha a szimplex módszer nem áll meg, akkor ciklizálódik.*

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy $\binom{n+m}{m}$-féleképpen[3] lehetséges bázist választani. Azaz, ha vég nélkül folytatódik az eljárás, akkor előbb-utóbb újra előfordul egy bázis, amely korábban már szerepelt. Be fogjuk látni, hogy egy bázis egyértelműen meghatározza a hozzátartozó szótárat, így a bázisok ismétlődése a szótárak ismétlődése is egyben.
Tegyük fel, hogy két szótárban a bázisok megegyeznek:
1. szótár: (2.1)

[3] Emlékeztetünk arra, hogy $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, ejtsd n alatt a k, szám adja meg, hányféleképpen választhatunk ki k elemet egy n elemű halmazból.

$$
\begin{array}{rcrcll}
x_i & = & b_i & - & \sum\limits_{j\notin B} a_{ij}x_j & (i\in B) \\
\hline
z & = & v & + & \sum\limits_{j\notin B} c_jx_j &
\end{array}
$$

2. szótár: (2.2)

$$
\begin{array}{rcrcll}
x_i & = & b_i^* & - & \sum\limits_{j\notin B} a_{ij}^*x_j & (i\in B) \\
\hline
z & = & v^* & + & \sum\limits_{j\notin B} c_j^*x_j &
\end{array}
$$

Az Állítás 1. szerint a két szótár ekvivalens, így a Definíció 4. szerint a (2.1)-es szótár bármely x_1, x_2, …, x_n, x_{n+1}, …, x_{n+m}, z megoldása egyben a (2.2)-es szótárnak is megoldása és fordítva. Speciálisan, tetszőleges x_k nembázis változó, és t valós szám esetén legyen:

$$x_k = t,$$

$$x_j = 0 \qquad (j \notin B, j \neq k)$$

Ekkor

$$x_i = b_i - a_{ik}t \qquad (i \in B),$$

$$z = v + c_kt$$

Ezzel megkaptuk (2.1) egy megoldását, aminek ki kell elégítenie a fentiek alapján (2.2)-t is, így

$$b_i - a_{ik}t = b_i^* - a_{ik}^*t \quad \forall i \in B$$

és

$$v + c_kt = v^* + c_k^*t$$

Mivel t tetszőleges valós szám volt, ez csak úgy lehetséges, ha

$$\begin{aligned} a_{ik} &= a^*_{ik} \quad i \in B \\ b_i &= b^*_i \\ v &= v^* \\ c_k &= c^*_k \quad k \in \mathbf{N} \end{aligned}$$

A két szótár tehát tényleg megegyezik, s ebből következik a tétel. □

Ciklizáció elkerülésére szolgáló módszerek:
1. perturbációs vagy lexikografikus módszer (lsd. gyakorlat)
2. Bland módszer vagy másképpen legkisebb index módszere

Megjegyzés: A ciklizáció léte igazából csak elméletileg zavaró, a gyakorlatban szinte sohasem fordul elő. A degeneráció sokkal gyakoribb jelenség, és bizonyos esetekben kellemetlenül megnövelheti az algoritmus futási idejét. A később vizsgált ún. *perturbációs módszer* ez ellen is nyújt némi védelmet.

A legkisebb index módszere - Bland (1977):

1. A bázisba beléptethető változók közül vegyük a legkisebb indexűt.
2. A bázisból kiléptethető változók közül is a legkisebb indexűt válasszuk.

Tétel 2 *(Bland)*
A szimplex módszer befejeződik, ha a legkisebb index szabályt használjuk.

Bizonyítás. Indirekt módon tegyük fel, hogy ciklizáció lép fel az eljárás során. Jelöljük az egymás után következő szótárakat D_0, D_1, D_2, ..., $D_k = D_0$, ahol $D_k = D_0$ jelenti a ciklizáció bekövetkeztét.

Legyen egy változó **ugráló**, ha nem bázis változó néhány szótárban és bázis változó másokban. Legyen továbbá

x_t	:	az ugráló változók közül a legnagyobb indexű
D	:	az a szótár, ahol x_t elhagyja a bázist
x_s	:	az a változó, amelyik az x_t helyére kerül a D-ből való iterációnál
D^*	:	az a szótár, ahol x_t bekerül a bázisba

Írjuk fel először a D szótárt !

$$\begin{array}{ccccl} x_i & = & b_i & - & \sum_{j\notin B} a_{ij}x_j \quad (i \in B) \\ \hline z & = & v & + & \sum_{j\notin B} c_j x_j \end{array}$$

Mivel a ciklizáció csak úgy lehetséges, ha minden $D_i \longrightarrow D_{i+1}$ $(i = 0, \ldots, k-1)$ és $D_{k-1} \rightarrow D_0$ iteráció degenerált volt, így speciálisan a D és D^*-beli célfüggvény érték is megegyezik:

$$z = v + \sum_{j=1}^{n+m} c_j^* x_j.$$

Ahol $c_j^* = 0$, ha x_j bázisbeli D^*-ban, azaz $\sum_{j=1}^{n+m} c_j^* x_j$ csak egy másik, kényelmesebb mód a $\sum_{j\in N^*} c_j^* x_j$ leírására, ahol N^* a D^*-beli nembázisváltozóinak indexhalmaza.

Legyen $y \in \mathbf{R}$ tetszőleges, és írjunk mindkét szótárban x_s helyébe y-t, illetve $x_j = 0$-t, ha $j \in N$ és $j \neq s$. Így

$$x_i = b_i - a_{is}y \qquad i \in B$$

és

$$z = v + c_s y.$$

Mivel a célfüggvényeknek meg kell egyezniük, ezért

$$v + c_s y = v + c_s^* y + \sum_{i \in B} c_i^* (b_i - a_{is} y)$$

Átrendezve kapjuk, hogy

$$(c_s - c_s^* + \sum_{i \in B} c_i^* a_{is}) y = \sum_{i \in B} c_i^* b_i$$

Mivel y tetszőleges volt, ez csak úgy lehetséges, ha $(c_s - c_s^* + \sum_{i \in B} c_i^* a_{is}) = 0$ és így persze $\sum_{i \in B} c_i^* b_i = 0$. Mivel az x_s a D szótár bázisában az x_t helyére belépő változó, így $c_s > 0$.
Másrészt az x_s a D^* szótárban nem a bázisba belépő változó és az $s < t$, vagyis $c_s^* \leq 0$.

Így a $\sum_{i \in B} c_i^* a_{is} < 0$, azaz van olyan $r \in B$, hogy $c_r^* a_{rs} < 0$. Így $c_r^* \neq 0$, azaz x_r nem bázis változó D^*-ban. Következésképp x_r ugráló változó, és a feltételeink szerint $r \leq t$. Belátjuk továbbá, hogy $r < t$.
Az x_t változó távozik D bázisából, és ez csak úgy lehetséges, ha $a_{ts} > 0$. Mivel x_t a bázisba kerülő elem a D^* szótárnál, $c_t^* > 0$, és így $c_t^* a_{ts} > 0$, azaz x_t és x_r különböző változók és $r < t$. A kiválasztási szabály miatt c_r^* nem lehet pozitív, hisz akkor az x_r lenne a D^* bázisba belépő elem. Ebből viszont az következik, hogy $a_{rs} > 0$.
D és D^* ugyanazt a megoldást adja. Speciálisan x_r értéke nem változik az iterációk során, és mivel D^*-ban nem bázis $x_r = 0$, és így persze D-ben is nulla értéket vett fel, $b_r = 0$. Ekkor viszont D bázisát nem x_t-nek, hanem x_r-nek kellett volna elhagynia, és ez ellentmond a feltevésünknek.

Tehát a Bland szabály alkalmazása mellett nincs ciklizáció és így a Tétel 1. miatt a szimplex módszer befejeződik. □

3. előadás

A kétfázisú szimplex módszer

Továbbra is a standard alakra hozott LP feladat megoldása a célunk.

LP feladat	Szótáralak
$\max \ \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$	$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$
$Ax \leq b$	$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$
$x \geq 0$	

A korábbiakban sikeresen megbirkóztunk az iteráció és termináció lehetséges buktatóival. Elképzelhető azonban, hogy az iterációt el sem tudjuk kezdeni, mert a kezdeti szótárunk nem lehetséges megoldást kódol, azaz valamely i-re $b_i < 0$. Ebben az esetben először egy lehetséges szótárt kell találnunk. Ezt egy *segédfeladat* segítségével érhetjük el.

Segédfeladat:

$$\begin{aligned} \min \ & x_0 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_0 & \leq b_i \quad (i = 1, \ldots, m) \\ x_j & \geq 0 \quad (j = 0, \ldots, n) \end{aligned}$$

Segédfeladat szótáralakja:

$$\begin{aligned} x_{n+i} &= b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_0 \qquad (i = 1, \ldots, m) \\ w &= - x_0 \end{aligned}$$

Ez a szótár ugyan nem lehetséges megoldást kódol, de a segédfeladatnak mindenképpen lesz lehetséges megoldása. Az **1. fázis**ban megoldjuk a segédfeladatot. Vegyük azt az x_{n+k} változót, amelyikhez tartozó b_k-ra teljesül, hogy

a) b_k negatív,

b) b_k maximális a negatív b_i-k közül

x_0 kerül be a bázisba az adott x_{n+k} helyére. Folytassuk a szimplex módszert úgy, hogy ha x_0 elhagyhatja a bázist, akkor x_0-t cseréljük ki!

Az eredeti feladatnak akkor és csak akkor van lehetséges megoldása, ha segédfeladatnak van lehetséges megoldása $x_0 = 0$-val. Ha a segédfeladat optimális szótárában x_0 nem bázisváltozó és $w = 0$, akkor visszatérünk az eredeti feladatra (**2. fázis**):

- "Vágjuk le" az utolsó oszlopot ($x_0 = 0$)

$$x_i = b_i^* - \sum_{j \in N} a_{ij}^* x_j + \boxed{a_{i0}^* x_0} \qquad i \in B$$

- Írjuk át az eredeti z célfüggvényt a kapott bázisváltozókkal:

$$z = \sum_{j \in N} c_{ij}^* x_j,$$

  majd oldjuk meg az eredeti problémát a szimplex módszer segítségével.

Példa:

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\max & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & \\
\\
& 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 4 \\
& 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & \leq & -5 \\
& -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & \leq & -1 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

1. fázis: Segédfeladat:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\max & & & & & & - & x_0 & & \\
\\
& 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_0 & \leq & 4 \\
& 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & - & x_0 & \leq & -5 \\
& -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & x_0 & \leq & -1 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_0 & \geq & 0
\end{array}$$

Szótáralak:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_4 & = & 4 & - & 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_0 \\
x_5 & = & -5 & - & 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & x_0 \\
x_6 & = & -1 & + & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_0 \\
\hline
\\
w & = & & & & & & & & - & x_0
\end{array}$$

A b_2 a maximális abszolúlt értékű a negatív b_i-k közül, így az x_5 változó helyére kerül a bázisba x_0.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_0 & = & 5 & + & 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & x_5 \\
x_4 & = & 9 & & & - & 2x_2 & - & x_3 & + & x_5 \\
x_6 & = & 4 & + & 3x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & + & x_5 \\
\hline
w & = & -5 & - & 2x_1 & + & \boxed{3x_2} & - & x_3 & - & x_5
\end{array}$$

A továbbiaban már alkalmazhatjuk a szimplex módszert:
Mivel a harmadik egyenlet (az x_6-t kifejező) adja a legszorosabb korlátot (az elsőből: $x_2 \leq 5/3$, a másodikból: $x_2 \leq 9/2$, míg a harmadik szerint: $x_2 \leq 1$), így x_6 helyére kerül a bázisba az x_2 változó .

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_2 & = & 1 & + & 0,75x_1 & + & 0,75x_3 & + & 0,25x_5 & - & 0,25x_6 \\
x_0 & = & 2 & - & 0,25x_1 & - & 1,25x_3 & + & 0,25x_5 & + & 0,75x_6 \\
x_4 & = & 7 & - & 1,5x_1 & - & 2,5x_3 & + & 0,5x_5 & + & 0,5x_6 \\
\hline
w & = & -2 & + & 0,25x_1 & + & \boxed{1,25x_3} & - & 0,25x_5 & - & 0,75x_6
\end{array}$$

A 2. egyenlet (x_0-t kifejező) adja a legszorosabb korlátot (1.-ben: nincs, 2.-ban: $x_3 \leq 2/1,25$, 3.-ban: $x_3 \leq 7/2,5$), így x_0 helyére kerül a bázisba az x_3 változó .

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_3 & = & 1,6 & - & 0,2x_1 & + & 0,2x_5 & + & 0,6x_6 & - & 0,8x_0 \\
x_2 & = & 2,2 & + & 0,6x_1 & + & 0,4x_5 & + & 0,2x_6 & - & 0,6x_0 \\
x_4 & = & 3 & - & x_1 & & & - & x_6 & + & 2x_0 \\
\hline
w & = & & & & & & & & - & x_0
\end{array}$$

A segédfeladat ezzel befejeződött, és az optimum értéke nulla. Ez azt jelenti, hogy az eredeti feladatnak *van* lehetséges megoldása. Térjünk vissza az eredeti feladathoz, illetve annak egy lehetséges bázismegoldásához !

a) Elhagyjuk az utolsó oszlopot ($x_0 = 0$),

b) w helyett visszaírjuk z-t, az eredeti célfüggvényt.
$z = x_1 - x_2 + x_3$

$z = x_1 - (2,2 + 0,6x_1 + 0,4x_5 + 0,2x_6) + (1,6 - 0,2x_1 + 0,2x_5 + 0,6x_6)$
$z = -0,6 + 0,2x_1 - 0,2x_5 + 0,4x_6$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_3 & = & 1,6 & - & 0,2x_1 & + & 0,2x_5 & + & 0,6x_6 \\
x_2 & = & 2,2 & + & 0,6x_1 & + & 0,4x_5 & + & 0,2x_6 \\
x_4 & = & 3 & - & x_1 & & & - & x_6 \\
\hline
z & = & -0,6 & + & 0,2x_1 & - & 0,2x_5 & + & 0,4x_6
\end{array}$$

Ezek után következhet a második fázis, a már ismert módon.

A szimplex módszerben hatalmas erő rejlik. Nagyon hatékonyan, gyorsan és stabilan[4] működik, de mélyenfekvő elméleti állításokat is könnyen megkaphatunk segítségével. Ezek egyike a *lineáris programozás alaptétele.*

Tétel 3 *(Lineáris programozás alaptétele)*
Minden LP probléma, amely standard formában van, a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

(i) ha nincs optimuma, akkor vagy megoldhatatlan vagy nem korlátos;

(ii) ha van lehetséges megoldása, akkor van lehetséges bázismegoldása is;

(iii) ha van optimális megoldása, akkor van optimális bázismegoldása is.

Bizonyítás. A kétfázisú szimplex módszer első fázisa megmutatja, hogy nincs megoldás vagy ad egy lehetséges bázis megoldást. A második fázis eldönti, hogy a megoldás nem korlátos vagy ad egy optimális bázismegoldást. □

Megjegyzések:

1. A lineáris programozás egy másik megközelítésében először az LP alaptételét bizonyítják, majd erre alapozva tárgyalják a kétfázisú szimplex módszert; innen az elnevezés. Az LP alaptétele igaz nemcsak a standard formában, hanem az általános alakban megadott feladatra is. Ezt, bár egy esetben hivatkozni fogunk rá, nem bizonyítjuk, illetve azt sem definiáljuk pontosan, mit értenénk az általános LP feladat bázis megoldása alatt.

[4] A kerekítési hibák gyakran megnehezítik a lineáris algebrai algoritmusok számítógépes végrehajtását, ezért a numerikus stabilitáshoz szükséges a kifinomult implementáció. Bár a szimplex algoritmus egy 28-30 soros programmal is megvalósítható, a komoly tudományos és kereskedelmi programok mérete 20 és 40 ezer sor között van.

2. Felmerül a kérdés, hogy nem lehetne-e a kétfázisú szimplex módszer első fázisát valahogy "könnyebben" elvégezni, hiszen ott csak az eredeti feladat egy lehetséges bázis megoldását akarjuk megkapni. A hamarosan említésre kerülő *dualitás elmélet* többek között erre a kérdésre is választ ad. Mégpedig azt, hogy sokkal egyszerűbben nem eshetünk túl az első fázison sem.

Az LP feladatok összes optimális megoldása

A korábbiakban láttuk, hogy a lineáris programozási feladatoknak több (akár végtelen sok) megoldása is lehet, és ezeket a lehetséges szótárakkal jellemezhetjük. Mit mondhatunk vajon az optimális megoldásokról?

Példa: Az első órán megoldott feladat utolsó szótárából érdekes következtetéseket vonhatunk le.

$$\begin{array}{rrcrcrcr}
x_3 = & 1 & + & x_2 & + & 3x_4 & - & 2x_6 \\
x_1 = & 2 & - & 2x_2 & - & 2x_4 & + & x_6 \\
x_5 = & 1 & + & 5x_2 & + & 2x_4 & & \\
z = & 13 & - & 3x_2 & - & x_4 & - & x_6
\end{array}$$

Mivel az x_2, x_4 és x_6 változók negatív együtthatóval szerepelnek a célfüggvényben, az optimum érték *csak akkor* érhető el, ha $x_2 = x_4 = x_6 = 0$. Ebből viszont következik, hogy $x_1 = 2$, $x_3 = 1$ és $x_5 = 1$, azaz az optimális megoldás ebben az esetben egyértelmű.

Példa: Az alábbi esetben akad az utolsó szótárban nulla célfüggvényegyütthatójú nembázis változó:

$$\begin{array}{rrcrcrcr}
x_4 = & 3 & + & x_2 & - & 2x_5 & + & 7x_3 \\
x_1 = & 1 & - & 5x_2 & + & 6x_5 & - & 8x_3 \\
x_6 = & 4 & + & 9x_2 & + & 2x_5 & - & x_3 \\
z = & 8 & & & & & - & x_3
\end{array}$$

Ebben az esetben a fenti szótárnak eleget tevő nem negatív számok közül az *összes* olyan, amelyben $x_3 = 0$ optimális megoldás is egyben. A kétfázisú szimplex módszernél már alkalmazott gondolatot követve levágjuk szótár utolsó oszlopát és elhagyjuk a célfüggvényt. Az így kapott egyenletrendszer nem negatív megoldásai nyilvánvalóan az eredeti LP feladat összes optimális megoldásait adják.

$$\begin{array}{rrcrcr}
x_4 = & 3 & + & x_2 & - & 2x_5 \\
x_1 = & 1 & - & 5x_2 & + & 6x_5 \\
x_6 = & 4 & + & 9x_2 & + & 2x_5
\end{array}$$

Az x_1, x_4, x_6 változók nem negatívak, de amúgy tetszőlegesek, így a megoldások kifejezhető az alábbi egyenlőtlenség rendszerrel.[5]

$$\begin{array}{rcrl} -x_2 & + & 2x_5 & \leq 3 \\ +5x_2 & - & 6x_5 & \leq 1 \\ -9x_2 & - & 2x_5 & \leq 4 \\ x_2, & & x_5 & \leq 0 \end{array}$$

Általában is hasonlóképpen járhatunk el, azaz egy LP feladat összes optimális megoldását leírhatjuk az utolsó szótár segítségével. Ez különösen hasznos, ha például egy *másodlagos célfüggvényre* akarunk optimalizálni, azaz az optimális megoldások halmazán szeretnénk egy másik célfüggvény maximum helyét meghatározni. Ekkor a csonkolt utolsó szótárhoz egyszerűen hozzávesszük az új célfüggvényt; természetesen a pillanatnyi nembázis változókkal kifejezve.

A szimplex módszer sebessége

Felmerül a kérdés, mennyire gyors a szimplex módszer, mekkora LP feladatokat oldhatunk meg vele? Okkal feltételezhetjük, hogy a nagyobb feladatok megoldása több időt vesz igénybe. Ezért kézenfekvő, bár nem mindig szerencsés megközelítés szerint a futási időket a feladatok *méretének* (input adatok, vagy változók, relációk száma stb) függvényében vizsgáljuk.

Helyesen kell megválasztanunk azt, mi legyen a "sebesség" *mértékegysége.* Hasonló méretű feladatok gyökeresen eltérő nehézségűek lehetnek, illetve rendkívül sokat számít az algoritmus megvalósítása.

Később látni fogjuk, hogy a szimplex algoritmus egy iterációs lépésének a végrehajtása körülbelül annyi időt vesz igénybe, mintha két Gauss eliminációt hajtanánk végre. Így a sebesség egy mértéke az, hogy hány iterációs lépést kell végrehajtani. Szorítkozzunk standard LP-re.

A legrosszabb esetben, ha például ciklizáció lép fel, akkor soha nem ér véget az algoritmus. Ha védekezünk a ciklizáció ellen, akkor nem lehet több, mint $\binom{n+m}{m}$ iteráció a korábbi tételeinknek szerint. Ez $n = m$ esetén kb. $4^n/\sqrt{\pi n/2}$, azaz n-ben exponeciális korlátot ad.[6] Sajnos általában az alsó korlát is exponenciálisan nagy, azaz lehet olyan példákat adni, amelyeket a szimplex módszer nehezen old meg.

---

[5] A "$-9x_2 - 2x_5 \leq 4$" egyenlőtlenség akár el is hagyható, mert következik a másik két egyenlőtlenségből.

[6] Ez legegyszerűbben a Stirling formulából jön, amely szerint $n! \approx \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$, ahol $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$, azaz a természetes logaritmus alapja.

V. Klee és G.J. Minty példája (1972):

$n = m$

$$\begin{aligned} \max \sum_{j=1}^{n} 10^{n-j} x_j & & \\ 2\sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} x_j + x_i &\leq 100^{i-1} & (i = 1, 2, \ldots, n) \\ x_j &\geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}$$

Ezen feladatra a szimplex algoritmus $2^n - 1$ iterációs lépést igényel, azaz műveletigénye exponenciális a *legnagyobb együttható* szabály mellett. A Klee-Minty probléma $n = (m) = 3$-ra:

$$\begin{array}{rcrcrcr} \max\ 100x_1 & + & 10x_2 & + & x_3 & & \\ x_1 & & & & & \leq & 1 \\ 20x_1 & + & x_2 & + & & \leq & 100 \\ 200x_1 & + & 20x_2 & + & x_3 & \leq & 10000 \\ x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

R. Jeroszlov (1973) megmutatta, hogy az ún. *legnagyobb növekmény* pivot szabály (minden iterációs lépés végrehajtásakor azt a nembázis változót választjuk, amelynek a bázisba léptetésével a leginkább növekszik a célfüggvény) is igényelhet exponenciális sok $(2^n - 1)$ iterációs lépést.

Mivel a szimplex módszernek legrosszabb esetben exponenciális a műveletigénye, így felmerül a következő kérdés:

Van-e olyan algoritmus és $P(x, y, z)$ polinom az LP problémákra, aminek számítási igénye n, m és L esetén $\leq P(n, m, \log L)$, ahol L az LP-ben szereplő leghosszabban ábrázolt szám[7]?

A probléma pozitívan dőlt el 1979-ben, mikor L. G. Khachiyan az ún. "ellipszoid módszer" polinomialitását belátta. Nem sokkal később (1984-ben) N. K. Kamarkar is előállt egy zseniális "projektív" algoritmussal, amellyel a *belső pont módszerek* megjelentek az LP területén.

Ezekre az algoritmusokra itt nem térünk ki, mivel mind bonyolultságukban, mind terjedelmükben meghaladják a rendelkezésünkre álló kereteket.

[7]Feltesszük, hogy az adatok racionális számok, ekkor a kérdés azt célozza, hogy az *input adatok méretének függvényében* mennyi számításra van szükség.

Egészen mást tapasztalhatunk, ha véletlen feladatokat, vagy a gyakorlati életben előálló problémákat vizsgálunk. G. Dantzig 1965-ben számos standard LP problémát oldott meg gép segítségével, és alábbi *megfigyelést* tette. Ha $m < 50$, $n + m < 200$, akkor *általában* $3m/2$ iterációs lépést igényel az algoritmus. Nagyon ritkán fordulhat elő, hogy több, mint $3m$ lépésre van szükség.

Egy másik nagyon érdekes megfigyelés szerint az iterációk száma $cm \log n$ körül ingadozik, ahol c egy konstans. Mindkét esetben figyelemre méltó a formulák asszimetriája az n és m paraméterekre.

4. előadás
Dualitás

Vizsgáljuk meg az alábbi standard LP-t!

$$\max \quad 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrr}
x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & \leq & 1 & \quad (1)\\
5x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 8x_4 & \leq & 55 & \quad (2)\\
-x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 5x_4 & \leq & 3 & \quad (3)\\
x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 &
\end{array}$$

A feladat megoldása helyett adjunk felső becslést a célfüggvény z^* értékére! A (2) egyenlőtlenséget 5/3-dal megszorozva egy felső korlátot kapunk z^*-ra.

$$\frac{5}{3}(5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 \leq 55)$$

$$4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq \frac{25}{3}x_1 + \frac{5}{3}x_2 + 5x_3 + \frac{40}{3}x_4 \leq \frac{275}{3}$$

$$z^* \leq \frac{275}{3}$$

A $(2) + (3)$ egy jobb felső korlátot ad:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
5x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 8x_4 & \leq & 55\\
-x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 5x_4 & \leq & 3\\
\hline
4x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 3x_4 & \leq & 58
\end{array}$$

$$4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 \leq 58$$

$$z^* \leq 58$$

Továbbvive a gondolatot, vegyük az egyenlőtlenségek nemnegatív lineáris kombinációját, azaz az elsőt szorozzuk meg y_1-gyel a másodikat y_2-vel, a harmadikat y_3-mal, majd adjuk össze őket! (Nyilvánvalóan teljesül a végső egyenlőtlenség, ha y_1, y_2, y_3 nemnegatív.)

$$(y_1 + 5y_2 - y_3)x_1 + (-y_1 + y_2 + 2y_3)x_2 + (-y_1 + 3y_2 + 3y_3)x_3 +$$
$$+ (3y_1 + 8y_2 - 5y_3)x_4 \leq y_1 + 55y_2 + 3y_3$$

Ha a következő feltételek teljesülnek, akkor $y_1+55y_2+3y_3$ egy felső korlátot ad a célfüggvény értékére:

$$\begin{array}{rcrcrcl} y_1 & + & 5y_2 & - & y_3 & \geq & 4 \\ -y_1 & + & y_2 & + & 2y_3 & \geq & 1 \\ -y_1 & + & 3y_2 & - & 3y_3 & \geq & 5 \\ 3y_1 & + & 8y_2 & - & 5y_3 & \geq & 3 \end{array}$$

A fentiek teljesülése mellett kapjuk:

$$4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq y_1 + 55y_2 + 3y_3$$

$$z^* \leq y_1 + 55y_2 + 3y_3$$

Ezzel a módszerrel felső korlátot keresve a következő LP feladathoz jutunk:

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \min & y_1 & + & 55y_2 & + & y_3 & & \\ & y_1 & + & 5y_2 & - & y_3 & \geq & 4 \\ & -y_1 & + & y_2 & + & 2y_3 & \geq & 1 \\ & -y_1 & + & 3y_2 & - & 3y_3 & \geq & 5 \\ & 3y_1 & + & 8y_2 & - & 5y_3 & \geq & 3 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Az eredeti feladatot **primál**, a fent kapottat pedig **duál** vagy **duális** feladatnak nevezzük.

Egy standard formában lévő LP és a duálisa általánosan:

Primál	**Duál**
$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$	$\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \ldots, m$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \quad j = 1, \ldots, n$
$x_j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, n$	$y_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, m$

Tétel 4 *(Gyenge dualitás)*
Ha $(x_1, \ldots, x_n)$ a primál feladatnak, az $(y_1, \ldots, y_m)$ pedig a duál feladatnak egy lehetséges megoldása, akkor

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Bizonyítás. A duális probléma konstrukciójából nyilvánvaló. Formálisan:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i,$$

hiszen $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j$, $x_j \geq 0$ $(j = 1, \ldots, n)$ és $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$, $y_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, m)$. □

Mielőtt kimondanánk és bizonyítanánk az ún. *erős dualitás tételt* vizsgáljuk meg egy LP feladat utolsó szótárát. A következő, nagyon meglepő tulajdonságot vehetjük észre: Az eredeti feladat utolsó szótárából kiolvasható a duális feladat megoldása. Ha az eredeti megoldás optimális volt, akkor ez is az lesz. Például, ha a primál feladat utolsó szótára:

$$\begin{array}{rclcrcrcrcrcrcr}
x_2 & = & 14 & - & 2x_1 & - & 4x_3 & - & 5x_5 & & & & & - & 3x_7 \\
x_4 & = & 5 & - & x_1 & - & x_3 & - & 2x_5 & & & & & - & x_7 \\
x_6 & = & 1 & + & 5x_1 & + & 9x_3 & + & 21x_5 & & & & & + & 11x_7 \\
\hline
z & = & 29 & - & x_1 & - & 2x_3 & & \boxed{-\ 11}\,x_5 & & \boxed{+\ 0}\,x_6 & & & & \boxed{-\ 6}\,x_7
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
x_5 \longleftrightarrow y_1 & \qquad & y_1 = 11 \\
x_6 \longleftrightarrow y_2 & & y_2 = 0 \\
x_7 \longleftrightarrow y_3 & & y_3 = 6
\end{array}$$

A megfeleltetés: a duális változók valamilyen értelemben az eredeti LP mesterséges változóihoz rendelhetők. A duális változók értéke pedig éppen a mesterséges változók pillanatnyi célfüggvény együtthatóinak -1-szerese. Ez a hamarosan igazolt, tulajdonság rendkívül hasznos mind a dualitás tétel bizonyításánál, mind a gyakorlati problémák megoldásánál.

Tétel 5 *(Erős dualitás)*
Ha a primál feladatnak van egy optimális $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ megoldása, akkor a duál feladatnak van olyan $(y_1^*, \ldots, y_m^*)$ optimális megoldása, amelyekre

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

Bizonyítás. Az előbb lelátott gyenge dualitás tétel miatt elég, ha találunk egy olyan (y_1^*, y_2^*, …,y_n^*) lehetséges megoldást a duális feladatra, amelyre a $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$ egyenlőség teljesül. A primál feladat megoldásánál bevezetjük a

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

mesterséges változókat.

Tegyük fel, hogy elérkeztünk az utolsó szótárhoz:

$$z = z^* + \sum_{k=1}^{n+m} \bar{c}_k x_k \qquad \bar{c}_k \leq 0, (k = 1, \ldots, n+m),$$

$$z^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*$$

Ahogy említettük, próbáljuk meg az $y_i^* = -\bar{c}_{n+i}$ $(i = 1, \ldots, m)$ behelyettesítést! Azt állítjuk, hogy ez a duális lehetséges megoldása, a többi számolás kérdése csak.

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = z^* + \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j - \sum_{i=1}^{m} y_i^* \overbrace{\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)}^{x_{n+i}}$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \left(z^* - \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* \right) + \sum_{j=1}^{n} \left(\bar{c}_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \right) x_j$$

Ezt az egyenlőséget egyszerű algebrai manipulációval kaptuk az előzőből, azaz minden x_1, x_2, …, x_n értékre igaznak kell lennie. Ebből adódnak a

$$\Rightarrow z^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*, \qquad c_j = \bar{c}_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*$$

egyenlőségek. Mivel $\bar{c}_k \leq 0$ minden $k = 1, \ldots, n+m$ esetén, így

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \;\geq\; c_j \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

$$y_i^* \;\geq\; 0 \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

Tehát az $y_i^* = -\bar{c}_{n+i}$ $(i = 1, \ldots, m)$ a duális lehetséges megoldása, továbbá $\sum_{i=1}^m b_i y_i^* = \sum_{j=1}^n c_j x_j^*$, és ezzel beláttuk a tételt. $\square$

A matematikában egy operátort akkor nevezünk dualizálásnak, ha egymás után kétszer alkalmazva az eredeti problémához jutunk vissza. Az elnevezésünk jogosságát igazolja, hogy a duális feladat duálisa a primál feladat.
A duál feladat

$$\begin{aligned} \max \sum_{i=1}^m (-b_i) y_i & & & \\ \sum_{i=1}^m (-a_{ij}) y_i & \leq & -c_j & \quad (j = 1, \ldots, n) \\ y_i & \geq & 0 & \quad (i = 1, \ldots, m) \end{aligned}$$

A duális feladat duálisa

$$\begin{aligned} min \sum_{j=1}^n (-c_j) x_j & & & \\ \sum_{j=1}^n (-a_{ij}) x_j & \geq & -b_i & \quad (i = 1, \ldots, m) \\ x_j & \geq & 0 & \quad (j = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

Ez pedig nyilvánvalóan ekvivalens a primál feladattal:

$$\begin{aligned} \max \sum_{j=1}^n c_j x_j & & & \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j & \leq & b_i & \quad (i = 1, \ldots, m) \\ x_j & \geq & 0 & \quad (j = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

Kapcsolat a primál és a duál feladat között

A dualitás tétel megmutatja, hogy a primál és duál feladat nem lehet tetszőleges kapcsolatban. A különböző variációk (optimum, nincs lehetséges megoldás, nem korlátos a célfüggvény) lehetőségét az alábbi táblázat összegzi.

			DUÁL	
		Optimális	N.L.M.O.	Nem korlátos
	Optimális	lehet	nem lehet	nem lehet
PRIMÁL	N.L.M.O.	nem lehet	lehet	lehet
	Nem korlátos	nem lehet	lehet	nem lehet

A táblázat kilenc eleméből nyolcat közvetlenül megkaphatunk a gyenge, illetve erős dualitás tételekből. A kilencedik (a primálnak és a duálnak nincs lehetséges megoldása) pedig egy könnyű feladat.

Megjegyzés: A dualitás fogalma rendkívül hasznos, mert rugalmas hozzáállást tesz lehetővé az LP feladatokhoz. Három ilyen lehetőséget sorolunk fel itt:

1. A szimplex algoritmus végrehajtásánál a lépések száma közelítőleg a sorok számával arányos. Így az olyan feladatok megoldásánál, melyek sok egyenlőtlenséget és kevés változót tartalmaznak, érdemes áttérni a duális feladatra.

2. Akkor is célszerű áttérni, ha a duális feladatban nincs szükség, míg az eredetiben lenne, az első fázisra. (Például a diéta problémában egy minimum feladat adott és a célfüggvény együtthatói mind pozitívak. A standardizálás után ezek negatívak lesznek, így a duális jobboldala egy negatív komponensű vektor, amely a standardizálásnál pozitívvá válik.)

3. Egy gyakorlati feladatnál nem ritka, hogy menet közben új feltételeket kell hozzávenni az LP-hez. Ekkor újra kell kezdeni a megoldást, többnyire ismételve a szimplex módszer első fázisát. Ez elkerülhető a duál feladattal dolgozva, hiszen ekkor az új feltétel csak mint egy új, nem bázis változó jelenik meg. Ekkor hozzávehetjük a szótárunkhoz és folytathatjuk az eljárást az éppen aktuális bázisból.

Komplementaritás

Tétel 6 *Legyen $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ a primál feladat, $(y_1^*, \ldots, y_m^*)$ pedig a duál feladat egy lehetséges megoldása. Annak, hogy $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ és $(y_1^*, \ldots, y_m^*)$ rendre a primál és a duál feladat optimális megoldása legyen, szükséges és elegendő feltétele:*

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j \quad \textit{vagy} \quad x_j^* = 0 \quad (\textit{vagy mindkettő}) \quad j = 1, \ldots, n$$

és

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i \quad \textit{vagy} \quad y_i^* = 0 \quad (\textit{vagy mindkettő}) \quad i = 1, \ldots, m$$

Bizonyítás.

$$c_j x_j^* \leq \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \right) x_j^* \quad j = 1, \ldots, n$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \right) y_i^* \leq b_i y_i^* \quad i = 1, \ldots, m$$

A fenti egyenlőtlenségeket összeadva a

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \right) x_j^* = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \right) y_i^* \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Nyilvánvalóan $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*) x_j^*$ egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $x_j^* = 0$ vagy $c_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*$. Hasonlóan $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \right) y_i^*$ akkor csak akkor teljesül, ha $y_i^* = 0$ vagy $b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*$. □

Az eddigieknek megfelelően a primál, illetve a duál feladat mesterséges változói a következők:

$$\begin{aligned} x_{n+i} &= b_i - \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad (i = 1, \ldots, m) \\ y_{m+j} &= -c_j + \textstyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \qquad (j = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

A komplementaritás tétel a $x_{n+i} \longleftrightarrow y_i$, $y_{m+j} \longleftrightarrow x_j$ hozzárendelést valósítja meg a megfelelő változók között. Lehetséges megoldások egy x, y párja pontosan akkor optimális, ha $x_{n+i} y_i = 0$ és $y_{m+j} x_j = 0$ minden $i = 1, \ldots, m$ és $j = 1, \ldots, n$-re.

Megjegyzés: Az erős dualitás tétel bizonyítása közben beláttuk, hogy a szimplex módszer használatával az utolsó szótár utolsó sorából kiolvasható az x^* optimumhoz tartozó *egy* y^* duális optimum. Általában természetesen több duál optimális megoldás lehet; az összes, fenti feltételeknek eleget tevő vektor ilyen.

Tétel 7 *(Komplementaritás 2.)*
A primál feladat egy $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ *lehetséges megoldása optimális akkor és csak akkor, ha léteznek olyan* $(y_1^*, \ldots, y_m^*)$ *számok, hogy*

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j \quad \textit{valahányszor} \quad x_j^* > 0,$$

$$y_i^* = 0 \quad \textit{valahányszor} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* < b_i; \qquad (*)$$

és

$$\begin{array}{rcll} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* & \geq & c_j & j = 1, \ldots, n \qquad (**) \\ y_i & \geq & 0 & i = 1, \ldots, m \end{array}$$

Bizonyítás. Ha $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ optimális megoldása a primál feladatnak, akkor a Dualitás Tétel miatt létezik a dual feladatnak $(y_1^*, \ldots, y_m^*)$ optimális megoldása. Ez mivel egyben lehetséges megoldás is, kielégíti a tétel második feltételét $(**)$. Ekkor viszont az előző komplementaritási tétel szerint teljesül az első feltétel is $(*)$.

Másrészt, ha $(y_1^*, \ldots, y_m^*)$ kielégíti $(**)$ feltételt, akkor ez a duál feladat egy lehetséges megoldása. Ekkor viszont $(*)$ feltétel teljesülésével az előző komplementaritási tétel szerint $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ optimális megoldása a primál, míg $(y_1^*, \ldots, y_m^*)$ optimális megoldása a duál feladatnak. □

A dualitási tétel segítségével eldönthető, hogy adott x^*, y^* vektorok a primál és a duál optimális megoldásai vagy nem. A tétel segítségével ellenőrizni tudjuk egy LP feladat lehetséges megoldásáról, hogy az optimális-e. Azaz esetleg akkor is, ha *nem ismerjük* az y^* vektort.

1. Példa:

Ellenőrizzük, hogy az

$$x_1^* = 2, x_2^* = 4, x_3^* = 0, x_4^* = 0, x_5^* = 7, x_6^* = 0$$

optimális megoldása-e a

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcr}
\max & 18x_1 & - & 7x_2 & + & 12x_3 & + & 5x_4 & & & + & 8x_6 & & \\
\\
 & 2x_1 & - & 6x_2 & + & 2x_3 & + & 7x_4 & + & 3x_5 & + & 8x_6 & \leq & 1 \\
 & -3x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & 3x_4 & + & x_5 & + & 2x_6 & \leq & -2 \\
 & 8x_1 & - & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & & & + & 2x_6 & \leq & 4 \\
 & 4x_1 & & & + & 8x_3 & + & 7x_4 & - & x_5 & + & 3x_6 & \leq & 1 \\
 & 5x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 6x_4 & - & 2x_5 & - & x_6 & \leq & 5 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6 & \geq & 0
\end{array}
$$

LP feladatnak!

A 2. komplementaritás tétel első feltétele $(*)$ alapján:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
2y_1^* & - & 3y_2^* & + & 8y_3^* & + & 4y_4^* & + & 5y_5^* & = & 18 \\
-6y_1^* & - & y_2^* & - & 3y_3^* & & & + & 2y_5^* & = & -7 \\
3y_1^* & + & y_2^* & & & - & y_4^* & - & 2y_5^* & = & 0 \\
 & & y_2^* & & & & & & & = & 0 \\
 & & & & & & & & y_5^* & = & 0
\end{array}
$$

Mivel ennek a megoldása $(1/3, 0, 5/3, 1, 0)$ kielégíti a 2. komplementaritás tétel 2. feltételét $(**)$, ezért a "jelölt" $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_6^*)$ megoldás optimális.

2. Példa: Ellenőrizzük le, hogy az

$$x_1^* = 0, x_2^* = 2, x_3^* = 0, x_4^* = 7, x_5^* = 0$$

optimális megoldása-e a

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\max & 8x_1 & - & 9x_2 & + & 12x_3 & + & 4x_4 & + & 11x_5 & & \\
 & 2x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & \leq & 1 \\
 & x_1 & + & 7x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & + & x_5 & \leq & 1 \\
 & 5x_1 & + & 4x_2 & - & 6x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & \leq & 22 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & \geq & 0
\end{array}
$$

LP feladatnak!

A 2. komplementaritás tétel első feltétele $(*)$ alapján:

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
-3y_1^* & + & 7y_2^* & + & 4y_3^* & = & -9 \\
y_1^* & - & 2y_2^* & + & 2y_3^* & = & 4 \\
 & & y_2^* & & & = & 0
\end{array}
$$

Mivel ennek a megoldása $(3.4, 0, 0.3)$ nem elégíti ki a 2. komplementaritás tétel 2. feltételét $(**)$, ezért a "jelölt" $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_6^*)$ megoldás nem optimális.

A módszer nem mindig alkalmazható, de ha a $(**)$ egyenletrendszernek egyértelmű megoldása van, akkor igen. Bizonyítás nélkül közlünk egy erre vonatkozó állítást, mely hasznos feltételt ad erre az esetre.

Tétel 8 *Ha az $x_1^*, \ldots, x_1^*$ egy nem degenerált bázismegoldása egy LP feladatnak, akkor a $(**)$ egyenletrendszernek egyértelmű megoldása van.*

A duális változók gazdasági értelmezése

A dualitás elmélet egyik legszebb és leghasznosabb következménye, hogy a duális változóknak szemléletes jelentse tulajdonítható. Az érthetőség kedvéért egy motivációval előzzük meg a tétel kimondását.

$$
\begin{array}{lrclcl}
\max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & & & \min & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & & & \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq & b_i & i = 1, \ldots, m & & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i & \geq & c_j & j = 1, \ldots, n \\
& x_j & \geq & 0 & j = 1, \ldots, n & & y_i & \geq & 0 & i = 1, \ldots, m
\end{array}
$$

Egy, talán a középiskolai fizikából még ismerős fogalommal élünk, és ún. "dimenzió analízist" hajtunk végre. Tegyük fel, hogy a LP feladatunk egy maximális nyereséget célzó, korlátozott erőforrások mellett felírt gyártási folyamat modellje:

- m: erőforrások száma
- n: termékféleségek száma
- x_j: a j-edik termékféleségből gyártásra kerülő mennyiség
- a_{ij}: a j-edik termékféle egységnyi mennyiségének előállításához szükséges mennyiség az i. erőforrásból
- b_i: az i-edik erőforrásból rendelkezésre álló mennyiség
- c_j: a j-edik termékféle egységnyi előálításával keletkező haszon

Tegyük fel például, hogy az x_j-t kg-ban mértük (jelben $\dim(x_j)$=kg), míg b_i erőforrst m^3-ben, akkor az a_{ij} nyilván m^3/kg-ban mérendő. Hasonlóan természtes úgy venni, hogy a c_j-t viszont Ft/kg-ban adjuk meg, így a duális feladat bal oldalán egy $a_{ij} y_i$ mennyiség dimenziója a c_j dimenziójával kell egyezzen. Azaz, ha $\dim(y_i)$ jelöli a mértékegységet, melyben az y_i duális változót mérni szeretnénk, akkor

$$\begin{aligned} dim(a_{ij})dim(y_i) &= dim(c_j) \\ dim(y_i) &= (Ft/kg)(kg/m^3) = Ft/m^3 \end{aligned}$$

Így arra gondolhatunk, hogy y_i nem más, mint az i-edik erőforrás *ára* (vagy inkább *értéke*), amit a következő, bizonyítás nélkül kimondott tétel formalizál.

Tétel 9 *Ha egy LP feladatnak van legalább egy nem degenerált optimális megoldása, akkor van olyan pozitív ϵ, ha $|t_i| \leq \epsilon$ minden $i = 1, \ldots, m$-re, akkor a*

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j &\leq b_i + t_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j &\geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}$$

LP feladatseregnek is van optimális megoldása, és az optimum érték

$$z^*(t_1, \ldots, t_m) = z^* + \sum_{i=1}^{m} y_i^* t_i,$$

ahol z^* az eredeti LP feladat optimuma, $y_1^*, \ldots, y_m^*$ pedig a duál feladat (DP) optimális megoldása.

A LP optimális megoldásához tartozó y_i^* az ún. "marginális ár", vagy "árnyék ár". Valóban y_i^* nem más, mint az i-edik erőforrásnak az LP megoldójának a szempontjából nézett értéke, hisz az erőforrás mennyiségének egységnyi növelésével (bizonyos határokon belül) éppen y_i^*-gal növekszik a nyereség. Azaz y_i^*-nál nagyobb árat már nem érdemes fizetni az i-edik forrásért, míg kisebbet igen.[8]

Megjegyzés: A komplementaritás tételnek szintén van szemléletes jelentése. Tegyük fel, hogy az optimális megoldásnál vagyunk. A *vagy* kikötés szerint ha például a primál i-edik sorában szigorú egyenlőtlenség teljesül, akkor az

[8] Az erőforrások értékét tehát egyfajta hasznosság alapján alapítottuk meg és ez nemcsak az LP által kódolt környezettől függ, hanem a választott optimális megoldástól is.

$y_i^* = 0$, azaz ha az i-edik erőforrás *nem fogyott el*, akkor annak az értéke (számunkra) nulla.

Példa: Erdőművelés

100 acre erdő terület egy részét kivágják és regenerálódni hagyják, másik részét kivágják, de utána beültetik fenyőfákkal. Az első módszer acre-enként 10 dollárba kerül és 50 dollárt hoz, míg a másiknál ezek az értékek 50 dollár, illetve 120 dollár. Befektetésre szánt összes tőkénk 4000 dollár. Kérdés, mekkora területet hagyjunk regenerálódni és mennyit ültessünk be, hogy a lehető legnagyobb profithoz jussunk?

Optimum számítási modell:

x_1: kivágásra, majd regenerálódásra szánt terület nagysága acre-ban

x_2: kivágásra, majd beültetésre szánt terület nagysága acre-ban

	befektetés	bevétel	hozam
1. módszer	\$10	\$50	\$40
2. módszer	\$50	\$120	\$70

$$\max \quad 40x_1 + 70x_2$$

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & \leq & 100 \\ 10x_1 & + & 50x_2 & \leq & 4000 \\ x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Optimális megoldás: $x_1^* = 25$, $x_2^* = 75$, $z^* = 6250$.

A dualitás elméletének ereje azonban a probléma sokkal finomabb elemzésére is képes. Nagyon kézenfekvően felmerülnek az alábbi kérdések: Mekkora kamat mellett érdemes kölcsönt felvenni a nagyobb hasznot hajtó tevékenység kiterjesztésére ? Mekkora kár éri a tulajdonost, ha leég egy acre erdő?

A duális megoldás $y_1^* = 32{,}5$ és $y_2^*{=}0{,}75$. Az y_2^* a tőke értéke, azaz \$1 plusz tőkebefektetés 75 centet hoz. Ha ennél olcsóbban megszerezhető, akkor érdemes belevágni. Másrészt, ha egy más tevékenységre fordítva ennél több hasznot hoz, akkor inkább arra fordítandó.

Sokkal meglepőbb első pillantásra az egységnyi területen lévő fa "értéke", pontosabban az elvesztésével járó kár. Míg a biztosító alighanem valamely 40 és 70 dollár közé eső összeget ítélne meg (hisz ennyi hasznot hozna az első, illetve a második kitermelés szerint) a gazda jövedelme csak $y_1^* = 32{,}5$

dollárral csökken. A látszólagos paradoxon feloldása, hogy akkor a tőke felszabaduló része a nagyobb hasznot hozó tevékenységre fordítható, így mérséklődik a kár. Ez a jelenség figyelmeztetésként szolgál: az árnyék ár *függ* a tevékenység egészétől.

Nehéz túlbecsülni ennek az egyszerű állításnak az implikációit. Számtalanszor előfordul, hogy egy “beállt” komplex rendszer részeinek pusztulása után gyorsan helyreáll, s az eredetinél gyorsabban fejlődik.

Az általános dualitás és egy lehetlenségi tétel

Vegyünk egy általános LP problémát, ahol csak a nemnegativitási feltételeket választjuk. (Azaz az LP-t *nem* standard formában vizsgáljuk.)

$$\max \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{array}{rcll}
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq & b_i & (i \in I) \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & = & b_i & (i \in E) \\
x_j & \geq & 0 & (j \in R)
\end{array}$$

A feltételek indexeit két halmazra bontjuk: I jelöli az egyenlőtlenségeket, E pedig egyenlőségekkel teljesülőket. Hasonlóképp R a nem negatív ún. kötött változók indexeit tartalmazza. Egy x_j változó szabad, ha $j \notin R$ (még akkor is, ha esetleg a többi feltételből következik, hogy $x_j > 0$). A szabad változók indexhalmazát F jelölje. Vegyük észre, hogy az LP standard alakban van akkor és csak akkor, ha $E = \emptyset$ és $F = \emptyset$.

A $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i \in I)$ és $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i \in E)$

feltételek lineáris kombinációja a következő egyenlőtlenség:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

ha $y_1, y_2, \ldots, y_m$ valósak és $y_i \geq 0$, ha $i \in I$. A lineáris kombináció természetesen az

$$y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \leq b_i y_i \quad (i \in I)$$

és az

$$y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) = b_i y_i \quad (i \in E)$$

egyenlőtlenségek összeadásával keletkezik a $\sum_{i=1}^{m} y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$, illetve a $\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i$ azonosságból. Továbbá, ha $y_1, y_2, \ldots, y_n$ számok olyanok, hogy

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \quad \text{ha } j \in R$$

és a

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j \quad \text{ha } j \in F$$

akkor minden $x_1, x_2, \ldots, x_n$ lehetséges megoldására az LP-nek és minden $j = 1, 2, \ldots, n$-re $c_j x_j \leq \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i\right) x_j$, és így

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i\right) x_j.$$

Azaz, akárcsak korábban, újra kapjuk, hogy $\sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i$.

Összefoglalva az eddigieket a $\sum_{i=1}^m b_i y_i$ felső korlát lesz az LP optimumára, vegyük hát az értékét a lehető legkisebbre:

$$\min \quad \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

$$\begin{array}{rcll} \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i & \geq & c_j & (j \in R) \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i & = & c_j & (j \in F) \\ y_i & \geq & 0 & (i \in I) \end{array}$$

Ezt a problémát az eredeti probléma *duálisának*, vagy egyszerűen *duálisnak* nevezzük. A korábbiakhoz hasonlóan belátható az ún. *általános dualitás tétel*:

Tétel 10 *Ha egy lineáris programozási problémának van optimális megoldása, akkor a duálisának is van optimális megoldása, és a két optimum érték megegyezik.*

A tétel mind gyakorlati, mind elméleti szempontból rendkívül hasznos. Egyrészt közvetlenül felírható a duális, így elkerülhető, hogy a standardizálás során esetleg duplázódjon a feltételek, illetve a változók száma. Másrészt a probléma szerkezetét jobban megőrzi az általános duális; ennek jelentőségét a mátrix játékok vizsgálatában látjuk majd. Szép szimmetria figyelhető meg a primál és duál probléma elemei között:

Primál-Duál megfeleltetés	
a duálisban	a primálban
kötött változó	egyenlőtlenség
szabad változó	egyenlőség
egyenlőtlenség	kötött változó
egyenlőség	szabad változó

A korábbiakhoz hasonlóan be kell látnunk a "duális" elnevezés jogosságát.

A duális duálisa az eredeti, hisz a duális átírható mint:

$$\max \quad \sum_{i=1}^{m}(-b_i)y_i$$

$$\begin{array}{rcll} \sum_{i=1}^{m}(-a_{ij})y_i & \leq & -c_j & (j \in R) \\ \sum_{i=1}^{m}(-a_{ij})y_i & = & -c_j & (j \in F) \\ y_i & \geq & 0 & (i \in I) \end{array}$$

Ennek duálisa:

$$\min \quad \sum_{j=1}^{n}(-c_j)x_j$$

$$\begin{array}{rcll} \sum_{j=1}^{n}(-a_{ij})x_j & \geq & -b_i & (i \in I) \\ \sum_{j=1}^{n}(-a_{ij})x_j & = & -b_i & (i \in E) \\ x_j & \geq & 0 & (j \in R) \end{array}$$

ami nyilvánvalóan az eredeti LP.

Példa (dualizálás):

$$\max \quad 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & -8 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & 8x_3 & \leq & 23 \\ 6x_1 & + & 7x_2 & + & 3x_3 & \geq & 1 \\ x_1 & & & & & \leq & 4 \\ & & & & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Először át kell írni:

$$\max \quad 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & -8 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & 8x_3 & \leq & 23 \\ -6x_1 & - & 7x_2 & - & 3x_3 & \leq & -1 \\ x_1 & & & & & \leq & 4 \\ & & & & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Ebből:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcl}
min & -8y_1 & + & 23y_2 & - & y_3 & + & 4y_4 & & \\
 & & & & & & & & & \\
 & 5y_1 & + & 4y_2 & - & 6y_3 & + & y_4 & = & 3 \\
 & 3y_1 & + & 2y_2 & - & 7y_3 & & & = & 2 \\
 & y_1 & + & 8y_2 & - & 3y_3 & & & \geq & 5 \\
 & & & & & & & y_2, y_3, x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

Lineáris egyenlőtlenségek és egyenlőségek megoldhatatlan rendszere

Az előzőhöz hasonló felbontásban vesszük a feltételeket, most azonban nincs célfüggvény; a puszta megoldhatóság a kérdés.

$$\begin{array}{rcll}
\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \leq & b_i & (i \in I) \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & = & b_i & (i \in E)
\end{array}$$

Kezdjük egy példával, amely megmutatja milyen okai lehetnek annak, hogy nincs lehetséges megoldása a rendszernek.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & \leq & 5 \\
3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & \leq & 4 \\
5x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & = & 9 \\
 & & & - & x_3 & & & \leq & 0 \\
 & & & & & - & x_4 & \leq & 0
\end{array}$$

Legyenek $y_1 = 1$, $y_2 = 3$, $y_3 = -2$, $y_4 = 2$, $y_5 = 1$ és adjuk össze a feltételeket ezen számokkal beszorozva. A következőt kapjuk:

$$0 = 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 \leq -1$$

Ezzel az ellentmondással nyilvánvalóvá vált, hogy a rendszerünk megoldhatatlan, hisz egy megoldhatatlan egyenlőtlenségre vezet.

Általában a rendszerünket *inkonzisztensnek* nevezzük, ha léteznek olyan $y_1, y_2, \ldots, y_m$ számok, melyekkel

$$\begin{aligned} y_i &\geq 0 \quad \text{mikor } (i \in I) \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i &= 0 \quad j = 1, 2, \ldots, n \\ \sum_{i=1}^{m} b_i y_i &< 0 \end{aligned}$$

Egy inkonzisztens rendszer megoldhatatlan, ahogy a példánk illusztrálta. Sokkal meglepőbb, hogy az inkonzisztencia a megoldhatatlanság *egyetlen* oka: ha egy rendszer megoldhatatlan, akkor bizonyosan inkonzisztens is.

Tétel 11 *(Tucker) Lineáris egyenlőtlenségek és egyenletek egy rendszere megoldhatatlan akkor és csak akkor, ha inkonzisztens.*

Bizonyítás. Az "akkor" irányt igazából már beláttuk, nézzük a "csak akkor" irányt! Vizsgáljuk meg az alábbi rendszert:

$$(*) \quad \begin{array}{llll} \max & \sum_{i=1}^{m} (-x_{n+i}) & & \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + w_i x_{n+i} \leq & b_i & (i \in I) \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + w_i x_{n+i} = & b_i & (i \in E) \\ & x_{n+i} \geq & 0 & (i = 1, 2, \ldots, m) \end{array}$$

Legyen itt $w_i = 1$, ha $b_i \geq 0$ és $w_i = -1$, ha $b_i < 0$. Ennek a rendszernek mindig van lehetséges megoldása, sőt optimális megoldása is. (Az utóbbi állítást nem bizonyítjuk, ez lényegében a lineáris programozás alaptételének az általános LP problémára vonatkozó alakjából következik. Ennek bizonyítása szintén alapulhat egy általánosított szimplex módszeren, mellyel itt nem foglalkozunk.) Az eredeti rendszerünknek pontosan akkor van megoldása, ha $(*)$-gal jelölt feladat optimuma nulla. Speciálisan, ha nincs megoldás, akkor az említett optimum negatív. Képezve a $(*)$ feladat duálisát:

$$\begin{array}{lrcll}
\min & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & & & \\
& & & & \\
& \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i & = & 0 & (j = 1, 2, \ldots, n) \\
& w_i y_i & \geq & -1 & (i = 1, 2, \ldots, m) \\
& y_i & \geq & 0 & (i \in E)
\end{array}$$

Az általánosított dualitás tétel szerint ennek is van optimális megoldása, és az optimum értéke negatív. Az $y_1, y_2, \ldots, y_m$ számok viszont épp megfelelnek az eredeti rendszer inkonzisztenciájának bizonyítására. □

Megjegyzés: A 11. Tételben egy egyenlőtlenség rendszert egy, a rendszerhez rendelt LP feladat segítségével vizsgáltunk. lényegében ugyanezt tettük a kétfázisú szimplex módszer első fázisában is. Másrészt, ha lineáris egyenlőtlenség rendszereket tudunk könnyen megoldani, akkor LP feladatokat is, ahogy ezt megmutatjuk. tegyük fel, hogy, hogy a $\max cx$, $Ax \leq b$, $x \geq 0$ LP feladat egy x^* optimális megoldását keressük. Az erős dualitás miatt, ha létezik ilyen x^*, akkor az megkapható az

$$\begin{array}{rcl}
Ax & \leq & b \\
A^T y & \geq & c \\
cx & = & by \\
x & \geq & 0 \\
y & \geq & 0
\end{array}$$

lineáris egyenlőtlenség rendszer egy (x, y) *lehetséges* megoldásának első komponenseként.

6. előadás
Mátrix játékok

A matematika és a játékok elmélete gyakran összekapcsolódik. Emlékezhetünk de Mèrè lovag problémájára, melyet Fermat és Pascal egyidőben oldott meg, és a feltételes valószínűség fogalmát helyesen ragadva meg, hozzájárult a valószínűségszámítás megalapozásához. A játékok fogalma azóta is számtalan alkalommal felbukkan a matematika különböző területein, a halmazelméletben, kombinatorikában, bonyolultságelméletben.

Az anyagiasabb XX. században a közgazdaságtudomány igénye szintén életre hívott néhány modellt. Ezek egyikét, az ún. *teljes információs, véges, kétszemélyes, zérusössszegű* játékokat vizsgáljuk részletesen. Ebben az esetben a játékosok *stratégiái* felsorolhatók és egy (i, j) párhoz hozzárendelhető az a_{ij} szám, amit a sorjátékos nyer, az oszlopjátékos pedig veszít, ha rendre az i-edik, illetve a j-edik stratégiájukat játszák. Így a tömörség kedvéért hívhatjuk ezeket a játékokat *mátrix játéknak.*

A mátrix játékok leírásának első lépéseit Emil Borel tette meg 1921 és 1927 között. Jelentős haladást ért el Neumann János: 1928-ban bebizonyította az azóta híressé vált *minimax* tételét és ezzel megmutatta *hol* kell keresni a megoldásokat. Körülbelül 20 évvel később ő adott választ a *hogyan* kérdésre is, rámutatva a mátrix játékok és a lineáris programozás kapcsolatára. Később Dantzig, Gale, Kuhn és Tucker munkája nyomán a mátrix játékok elmélete teljesen beleépült a lineáris programozás elméletébe. Ezt a felépítést követjük mi is.

Kezdjük egy példával, az ún. *Morra* játékkal. János és Emil a következők szerint játszik: egy fordulóban elrejtenek egy vagy két forintot, majd tippelnek, mennyit dugott az ellenfél. Ha pontosan egy játékos tippel jól, akkor annyit nyer, amennyit *közösen* elrejtettek. Az összes többi esetben döntetlen lesz, pénzüknél maradnak. Nyilvánvaló, hogy egy-egy játékban mindketten a következő négy stratégia közül választhatnak: Rejts k-t és tippelj l-et (röviden $[k,l]$), ahol $k = 1, 2$ és $l = 1, 2$. Ezek János és Emil *tiszta stratégiái*, a hozzájuk tartozó A mátrix pedig:

		Emil tiszta stratégiái			
		[1,1]	[1,2]	[2,1]	[2,2]
	[1,1]	0	2	-3	0
János tiszta stratégiái	[1,2]	-2	0	0	3
	[2,1]	3	0	0	-4
	[2,2]	0	-3	4	0

Minden A valós mátrix definiál egy játékot, ahol a sorjátékos az egyik sort, az oszlopjátékos az egyik oszlopot választja minden fordulóban, és a sorjátékos nyereménye a választott sor és oszlop találkozásában levő a_{ij} elem. Az A mátrixot *kifizetési mátrixnak*, sorait/oszlopait pedig a sor/oszlop játékos *tiszta stratégiáinak* nevezzük.

Visszatérve a példára azt tapasztaljuk, hogy nem tudunk egyértelműen jó sort tanácsolni János számára bármelyikhez ragaszkodik is, veszíteni fog. Az az ötlete támadhat (és ez bekövetkezett), hogy keverje tiszta stratégiáit, véletlenszerűen hol ezt játsza, hol azt. Játszon pl. [1,2]-t és [2,1]-et 1/2 - 1/2 valószínűséggel! Tegyük fel továbbá, hogy egy játék sorozatban Emil c_1-szer választotta az [1,1], c_2-ször az [1,2], c_3-szor a [2,1] és c_4-szer a [2,2] tiszta stratégiát ($c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = N$). Ha János véletlen választásai *függetlenek* voltak, akkor várhatóan fele-fele esetben találkozott az [1,2] és [2,1] stratégiája Emil bármely tiszta stratégiájával. Azaz $c_1/2$-ször az [1,1]-t, $c_2/2$-ször az [1,2]-t és így tovább. Összevetve ezeket az A mátrixszal, János várható nyeresége $(c_1 - c_4)/2$ forint. Így a legrosszabb esetben (ha c_1=0 és c_4=N), akkor játszmánként átlagosan 50 fillért veszít János, de nem többet.

Általában tegyük fel, hogy a sorjátékos egy $x = (x_1, \ldots, x_m)$ vektor segítségével, míg az oszlopjátékos egy $y = (y_1, \ldots, y_n)$ vektorral választja meg a játékát, azaz a sorjátékos x_i valószínűséggel választja meg az i-edik sort, míg az oszlopjátékos y_j-vel a j-edik oszlopot. Ekkor a sorjátékos várható nyereménye:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j = xAy.$$

Természetesen $x_i \geq 0$ és $y_j \geq 0$, ha $i = 1, \ldots, m$ és $j = 1, \ldots, n$, valamint $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$ és $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$.

Definíció. A nemnegatív komponensekből álló vektort *sztochasztikusnak* nevezzük, ha a komponenseinek összege egy. Egy sztochasztikus vektor által definiált stratégiát (azaz fordulóról fordulóra független választást a komponensek, mint valószínűségek szerint) hívunk *kevert stratégiának*.

János előbbi kevert stratégiája nem más, mint x=(0, 1/2, 1/2, 0).

Az előbbiekből nyilvánvaló, hogy egy x kevert stratégiát választva a sorjátékos várható nyereménye legalább $\min_y xAy$, ahol y sztochasztikus vektor. A sorjátékos természetesen egy olyan x^* sztochasztikus vektort igyekszik találni, melyre az előző érték a lehető legnagyobb. Hasonlóan egy y kevert stratégia mellett az oszlopjátékos garantáltan nem veszít többet átlagosan, mint $\max_x xAy$, ahol x sztochasztikus vektor, célja pedig ezen érték minimalizálása. A két érték jelentéséből nyilvánvaló, hogy

$$\min_y xAy \leq \max_x xAy$$

Sokkal meglepőbb, hogy az egyenlőség is elérhető, azaz vannak olyan x^*, y^* sztochasztikus vektorok, melyekre

$$\min_y x^*Ay = \max_x xAy^*.$$

Ez az egyenlőség az ún. *minimax tétel.* x^* és y^* rendre a sor és az oszlopjátékos optimális stratégiája, hisz az általuk garantáltnál jobb eredmény nem érhető el. Az állítás formája emlékeztethet bennünket a dualitásra, és valóban, igazából ekvivalensek, bár ez távolról sem nyilvánvaló.

Tétel 12 *(Minimax tétel)*
Minden $m\times n$-es A mátrixra van olyan x^* m-dimenziós sztochasztikus sorvektor és olyan y^* n-dimenziós sztochasztikus oszlopvektor, melyekre

$$\min_y xAy = \max_x xAy,$$

ahol a minimumot az összes n-dimenziós sztochasztikus oszlopvektoron, míg a maximumot az összes m-dimenziós sztochasztikus sorvektoron vesszük.

Bizonyítás. Az első észrevétel, hogy $\min_y xAy = \min_j \sum_{i=1}^m a_{ij}x_i$. Szavakban ez azt jelenti, hogy a sorjátékos egy x kevert stratégiájára van az oszlopjátékosnak olyan *tiszta* stratégiája, amely optimális számára. Ezt a következőképp láthatjuk be: Legyen $t = \min_j \sum_{i=1}^m a_{ij}x_i$. Ha y tetszőleges m-dimenziós sztochasztikus oszlopvektor, akkor

$$xAy = \sum_{j=1}^n y\left(\sum_{i=1}^m a_{ij}x_i\right) \geq \sum_{j=1}^n y_j t = t\sum_{j=1}^n y_j = t,$$

így persze a $\min_y xAy \geq t$ is igaz. Másrészt mivel azok az y vektorok, amelyeknek egy komponense egy, a többi nulla, sztochasztikus vektorok is egyben, így

$$\min_y xAy \leq \sum_{i=1}^m a_{ij}x_i$$

minden $j = 1, 2, \ldots, n$ esetén és ez adja az állítás másik irányát. (Hasonlóképp belátható, hogy $\max_x xAy = \max_i \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j$.)

A fenti észrevétel nagyban egyszerűsíti a dolgunkat, mert a sorjátékos optimális stratégiájának meghatározásánál csak az oszlopjátékos tiszta stratégiáit kell figyelembe vennünk. Azaz

$$\begin{aligned}
\max \min_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i & \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \\
\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 & \qquad (*) \\
x_i \geq 0 & \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)
\end{aligned}$$

A döntő észrevétel, hogy bár ez a probléma nem LP, de ekvivalens egy LP-vel.

$$\max \quad z$$

$$\begin{array}{rcll}
z - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i & \leq & 0 & (j = 1, 2, \ldots, n) \\
\sum_{i=1}^{m} x_i & = & 1 & (**) \\
x_i & \geq & 0 & (i = 1, 2, \ldots, m)
\end{array}$$

Valóban, a $(**)$ probléma bármely $z^*, x_1^*, \ldots, x_m^*$ optimális megoldása legalább egy $z - \sum a_{ij} x_i \leq 0$ egyenlőtlenségnek egyenlőséggel tesz eleget, így az LP optimuma $z^* = \min \sum a_{ij} x_j$.

Analóg módon, az oszlopjátékos optimális stratégiáját leíró

$$\begin{aligned}
\min \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j & \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \\
\sum_{j=1}^{n} y_j = 1 & \\
y_j \geq 0 & \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)
\end{aligned}$$

ekvivalens a

$$\min \quad w$$

$$\begin{array}{rcll}
w - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j & \geq & 0 & (i = 1, 2, \ldots, m) \\
\sum_{i=1}^{m} y_j & = & 1 & (***) \\
y_j & \geq & 0 & (j = 1, 2, \ldots, n)
\end{array}$$

LP feladattal. Vegyük észre, hogy a $(**)$ és $(***)$ egymás duálisai, és mindkettőnek van lehetséges megoldása. Így a dualitási tétel szerint a $(**)$-nak van egy z^*, $x_1^*, \ldots, x_m^*$ optimális megoldása, a $(***)$-nak van egy w^*, $y_1^*, \ldots, y_n^*$ optimális megoldása úgy, hogy $z^* = w^*$. Mivel $z^* = \min_y x^* Ay$, $w^* = \max_x xAy^*$, a tételt beláttuk. $\square$

Definíció. A közös $z^* = w^*$ értéke az A mátrix játék **értéke**. Az A mátrix játék **igazságos**, ha $z^* = w^* = 0$, **szimmetrikus**, ha $a_{ij} = -a_{ij}$.

Nyilván egy szimmetrikus játék (a szerepek felcserélhetősége miatt) igazságos. Így joggal várhatjuk, hogy a Morrában János (és persze Emil is) elkerülheti a vesztést. Valóban, a Morrához tartozó LP

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
\max & z & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & \\
 & z & & & + & 2x_2 & - & 3x_3 & & & \le & 0 \\
 & z & - & 2x_1 & & & & & + & 3x_4 & \le & 0 \\
 & z & + & 3x_1 & & & & & - & 4x_4 & \le & 0 \\
 & z & & & - & 3x_2 & + & 4x_3 & + & & \le & 0 \\
 & & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\
 & & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \ge & 0
\end{array}
$$

János egy optimális megoldása $x^* = (0, 3/5, 2/5, 0)$, a játék értéke pedig természetesen $z^*{=}0$.

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy a minimax tétel bizonyítása egyben algoritmust is ad az optimális stratégiák kiszámolására. (Neumann eredeti bizonyítása egy mély topológiai eredményt, az ún. Brouwer fixpont tételt használta, ami nem konstruktív.) Borel 3×3-as és 5×5-ös mátrixokra belátta a minimax tételt, de nem tudta túltenni magát azon a paradox jelenségen, hogy a játékosnak *nem* származik előnye abból, ha a kevert stratégiáját titokban tartja. (És persze hátránya sem abból, ha ezt közli.) Valószínűleg ez a tényleg meglepő eredmény gátolta meg abban, hogy bizonyítsa a tételt általánosan is.

Módosított Morra

A játékok elmélete (és a matematika) tele van meglepetéssel, és látszólagos ellentmondásokkal. Tegyük fel, hogy János és Emil változtattak egy kicsit a Morra szabályain, mert például nem tudják *egyszerre* deklarálni a tippjeiket, előre leírni pedig nincs kedvük. A józan ész azt súgja, erre nincs is szükség, hisz Emil azzal, hogy a saját tippjét bejelenti, semmit sem mond el arról, ami a kezében van. Természetes hát azt gondolni, hogy a módosított Morra is igazságos.

Alkalmazzuk rá az elméletünket. János az eddigieken kívül négy új tiszta stratégiával rendelkezik: $[k, S]$ és $[k, D]$ k=1, 2, ahol az első koordináta azt mondja meg, hányat rejtsen, a második, hogy ugyanazt (S) vagy ellenkező (D) tippet mondja be, mint Emil. Az új mátrix a következő:

		Emil tiszta stratégiái			
		[1,1]	[1,2]	[2,1]	[2,2]
	[1,1]	0	2	-3	0
	[1,2]	-2	0	0	3
	[2,1]	3	0	0	-4
János tiszta	[2,2]	0	-3	4	0
stratégiái	[1,S]	0	0	-3	3
	[1,D]	-2	2	0	0
	[2,S]	3	-3	0	0
	[2,D]	0	0	4	-4

Megoldva a hozzátartozó LP-t egy optimális stratégia János számára például az x^*=(0, 56/99, 40/99, 0, 0, 2/99, 0, 1/99). Emil optimális stratégiája y^*=(28/99, 30/99, 21/99, 20/99). A játék értéke pedig $z^* = w^* = 4/99$. Azaz a játék határozottan előnyösebb János számára, ami első pillantásra nehezen érthető. Feloldódik a paradoxon, ha arra gondolunk, hogy bár Emil nem ad információt a kezében lévő pénzről, de ad információt az éppen megjátszott stratégiájáról. Így az már nem teljesen ismeretlen János számára, következésképp ő ki is használhatja ezt.

Blöff és alullicitálás

Kártyajátékban gyakran előfordul, hogy a játékosok blöffölnek, holott a lap bemutatása esetén veszítenének. (Hozzátehetjük, nemcsak kártyajátékban van ez így.) Másrészt nem mindig kezdeményeznek licitet (azaz konfrontációt), habár azt biztosan nyernék. Ezt a viselkedést az emberi intuicióra hivatkozással szokták kezelni, mely úgymond felülemelkedik a hétköznapi logikán. Egy, Kuhn által 1950-ben vizsgált egyszerű játékkal illusztráljuk, hogy ez nem így van, s a pókerjátékos viselkedése tökéletesen racionális.

A játékot 3 lappal (1, 2, 3) játszák, mindkét játékos egységnyi pénzt tesz be és kap egy lapot. Ezután felváltva licitálnak/fogadnak, emelnek egységnyivel vagy passzolnak. A játék akkor fejeződik be, ha egy emelésre emelés, passzra passz, vagy emelésre passz hangzik el. Az első két esetben megnézik a lapokat, és a nagyobb lapot tartó viszi az összes tétet, amit az ellenfél fogadott. A harmadik esetben a passzoló játékos elveszti a játék elején betett alapját.

Az alábbi öt kimenetel lehetséges ezek alapján (A és B a játékosok, a fogad, illetve passzol pedig értelemszerűen értendő)

A passzol,	B passzol		1 a magasabb lapot birtoklónak
A passzol,	B fogad,	A passzol	1 B-nek
A passzol,	B fogad,	A fogad	2 a magasabb lapot birtoklónak
A fogad,	B passzol		1 A-nak
A fogad,	B fogad		2 a magasabb lapot birtoklónak

A lapok leosztása után A-nak három *lehetősége* van. (Ezek még nem A tiszta stratégiái, azokba be kell foglalni azt is, hogy A ismeri saját lapját.)

1. Passz, és ha B fogad, újra passz
2. Passz, és ha B fogad, fogad
3. Fogad

Egy teljes utasítás készletet, amely A számára egyértelműen megmondja mit tegyen egy $x_1x_2x_3$ hármassal írhatunk le úgy, hogy az x_j lehetőséget játsza, ha a j lapot kapta. Például a 312 szerint A fogad, ha 1 van a kezében, mindig passzol, ha a 2-öt kapta, míg passzol az első fordulóban a 3-ra, a másodikban pedig fogad rá. Ezek a hármasok tehát A tiszta stratégiái. Hasonlóan B-nek négy lehetősége van.

1. Passz, bármit csinál A
2. Ha A passzol, passz; ha A fogad, fogad
3. Ha A passzol, fogad; ha A fogad, passz
4. Fogad, bármit csinál A.

B tiszta stratégiái az $y_1y_2y_3$ hármasokkal írhatók le úgy, hogy az y_j a j lap birtoklásakor játszandó lehetőség. A tiszta stratégia párok kimenetelét annak figyelembe vételével számítjuk ki, hogy a lehetséges hat leosztás egyforma valószínűségű. Például ha A a 312, B pedig az 124 tiszta stratégiát használja, akkor a hat lehetséges kimenetel:

A kezében	B kezében	játék menete	A nyereménye
1	2	A fogad, B fogad	-2
1	3	A fogad, B fogad	-2
2	1	A passzol, B passzol	+1
2	3	A passzol, B fogad, A passzol	-1
3	1	A passzol, B passzol	+1
3	2	A passzol, B passzol	+1

Így A várható nyereménye = 1/6 (-2-2+1-2+1+1) = -1/3. Hasonló módon kiszámíthatjuk a többi lehetőséget is. A $3 \times 3 \times 3 = 27$, míg B $4 \times 4 \times 4 = 64$ tiszta stratégiával rendelkezik, ami egy 27×64-es mátrix vizsgálatát írja elő. Ennek közvetlen vizsgálata, bár lehetséges, meglehetősen komplikált lenne. Megpróbálkozunk hát redukcióval, amely jelentősen csökkenti a probléma mértékét, de szolgáltat egy-egy optimális kevert stratégiát, illetve ezeken keresztül a játék értékét is.

Kezdjük azzal, hogy az 1 lapot birtokolva bármely játékos fölöslegesen veszítene egy egységet, ha egy fogadásra fogadással válaszolna, nem pedig passzal. Ugyanígy, ha a 3-as lap van a kezében, értelmetlen lenne egy fogadásra passzal válaszolni, továbbá egy paszt követően nyugodtan fogadhat. Kijelenthetjük tehát, hogy A-nak van legalább egy optimális kevert stratégiája, amelyben:

(i) Ha 1 van a kezében, nem játsza a 2. lehetőséget.

(ii) Ha 3 van a kezében, nem játsza az 1. lehetőséget.

Ugyanígy B-nek van olyan optimális kevert stratégiája, amelyben:

(i) Ha 1 van a kezében, nem játsza a 2. és 4. lehetőséget.

(ii) Ha 3 van a kezében, nem játsza az 1., 2. és 3. lehetőségét.

Úgy képzeljük ezt, hogy a $2x_2x_3$ és az x_1x_21 tiszta stratégiák egyszerűen elérhetetlenek A számára, csak úgy, mint B számára a $2y_2y_3$, $4y_2y_3$, y_1y_21, y_1y_22 és az y_1y_23 tiszta stratégiák. Elképzelhető, hogy ezzel elveszítjük az optimális stratégiák *egy részét*, de bizonnyal marad legalább egy optimális kevert stratégiája mind A-nak, mind B-nek. Ebből következően a redukált játék értéke megegyezik az eredetivel.

A fenti tiszta stratégiák kiküszöbölése után A-nak 12, B-nek 8 tiszta stratégiája marad. Mi több, további egyszerűtésre adódik alkalom. Ha A-nak 2 van a kezében, akár passzolhat is az első fordulóban, hisz B tartózkodik a 2. lehetőségtől, ha 1-et birtokol, illetve az 1. és 3. lehetőségtől, ha 3. tart a kezében. Így viszont A második lehetősége pont olyan jó, mint a 3. Eldobhatjuk hát A tiszta stratégiái közül az $x_1 3 x_3$-at. Hasonlóan, ha B a 2 lapot kapta, akkor az 1. lehetősége ugyan olyan jó, mint a 3., és 2. se rosszabb, mint a 4. Ezek alapján B tiszta stratégiái közül elhagyható az $y_1 3 y_3$ és az $y_1 4 y_3$.
Ezek után A-nak már csak 8, B-nek pedig 4 tiszta stratégiája marad, a redukált játék mátrix pedig áttekinthetőbb (s céljainknak megfelel).

	114	124	314	324
112	0	0	$-1/6$	$-1/6$
113	0	$1/6$	$-1/3$	$-1/6$
122	$-1/6$	$-1/6$	$1/6$	$1/6$
123	$-1/6$	0	0	$1/6$
312	$1/6$	$-1/3$	0	$-1/2$
313	$1/6$	$-1/6$	$-1/6$	$-1/2$
322	0	$-1/2$	$1/3$	$-1/6$
323	0	$-1/3$	$1/6$	$-1/6$

Az ebből keletkező LP feladatokat megoldva A számára egy optimális kevert stratégia az (1/3, 0, 0, 1/2, 1/6, 0, 0, 0), B számára a (2/3, 0, 0, 1/3), a játék értéke pedig -1/18. A játék, ahogy sejtettük, nem igazságos. A optimális stratégiáját célszerű egyszerűbb utasításokká konvertálni:

(i) Ha 1 van a kezében, akkor keverje az 1. és 3. lehetőséget $5:1$ arányban.

(ii) Ha 2 van a kezében, akkor keverje az 1. és 2. lehetőséget $1:1$ arányban.

(iii) Ha 3 van a kezében, akkor keverje a 2. és 3. lehetőséget $1:1$ arányban.

Vegyük észre, hogy az istrukció blöffre buzdít (azaz fogadásra az első menetben, mikor a legkisebb lapot - 1-et - kapta A) hat esetből egyszer, és tartózkodásra a tét emelésétől (azaz passzra az első menetben a legnagyobb lap birtoklásakor) az esetek felében. Hasonlóképp fogalmazható B optimális stratégiája:

(i) Ha 1 van a kezében, akkor keverje az 1. és 3. lehetőséget 2 : 1 arányban.

(ii) Ha 2 van a kezében, akkor keverje az 1. és 2. lehetőséget 2 : 1 arányban.

(iii) Ha 3 van a kezében, akkor válassza mindig a 4. lehetőséget.

Ezzel B kis lapot (1, 2) tartva az esetek egyharmadában blöfföl, a licittől viszont nem tartózkodik sohasem.

Egyszerűsítési lehetőségek

Dominancia:
Az előző játék elemzésében használt gondolatmenetet könnyen általánosíthatjuk. Így számos játékban jól követhető módon csökkenthetjük a játékosok tiszta stratégiáinak számát, míg a játék "lényege" nem változik.
Definíció. Az A kifizetési mátrix egy r sora **dominálja** az s sort, ha $a_{rj} \geq a_{sj}$ minden j=1, 2, ..., n esetén. Hasonlóan egy r oszlop **dominálja** az s oszlopot, ha $a_{ir} \geq a_{is}$ minden i=1, 2, ..., m-re.

Tétel 13 *Egy mátrix játékra az alábbiak igazak:*

(i) Ha egy r sort dominál egy másik sor, akkor a sorjátékosnak van olyan x^* optimális stratégiája, ahol $x_r^* = 0$. Speciálisan, ha az r sort töröljük a mátrixból, akkor nem változik a játék értéke.

(ii) Ha egy s oszlop dominál egy másik oszlopot, akkor az oszlopjátékosnak van olyan y^* optimális stratégiája, amelyben $y_s^* = 0$. Speciálisan, ha az s oszlopot töröljük a mátrixból, akkor nem változik a játék értéke.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az r sort dominálja az s sor. (Hasonlóan járhatunk el akkor, ha az s oszlop dominálja az r oszlopot.) A minimax tétel miatt létezik egy x^*, y^* optimális stratégia pár a játékra. Módosítsuk az x^* stratégiát ($\bar{x}$) úgy, hogy $\bar{x}_i := x_i^*$, ha $i{\neq}$r, s, $\bar{x}_r := 0$ és $\bar{x}_s := x_s^* + x_r^*$. (Szavakban: mikor a stratégia az r-edik sort játszaná, akkor játszuk helyette az s-ediket.) A dominancia miatt nyilvánvaló, hogy a sorjátékos várható nyereménye nem csökken. □

Példa:

$$A = A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & -4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 7 & 4 & 5 \\ 7 & -3 & 8 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

A_1-ben a 3. oszlop dominálja a 4. oszlopot.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 4 & 5 \\ 7 & -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

A_2-ben a 3. sor dominálja a 2. sort:

$$A_3 = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -6 & -3 \\ 6 & -2 & 4 & 5 \\ 7 & -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

A_3-ban az 1. oszlop dominálja a 3. oszlopot:

$$A_4 = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -3 \\ -2 & 4 & 5 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

A_4-ben a 2. sor dominálja a 3. sort:

$$A_5 = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -3 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

A_5-ben a 3. oszlop dominálja a 2. oszlopot:

$$A_6 = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

További egyszerűsítés már nem lehetséges, marad tehát az eredeti A mátrix 1. és 3. sora, illetve 2. és 4. oszlopa, mint tiszta stratégia. A probléma innen könnyen megoldható.

Nyeregpont:
Jelentse m_i az i-edik sor minimumát, M_j pedig a j-edik oszlop maximumát, azaz $m_i := \min_j a_{ij}$, $M_j := \max_i a_{ij}$. Legyen továbbá $m = \max_i \min_j a_{ij}$, $M := \min_j \max_i a_{ij}$. Könnyen beláthatók az alábbiak:

(i) $n \leq M$

(ii) Ha $m = M$, akkor van olyan r és s, hogy $a_{rs} = m = M$.

Definíció. Ha m = M, akkor az a_{rs} = m elemet az A mátrix **nyeregpontjának** nevezzük.

Tétel 14 *Ha az A mátrixnak van egy a_{rs} nyeregpontja, akkor az r-edik sor választása a sorjátékos számára, illetve az s-edik oszlop választása az oszlopjátékos számára egy optimális stratégia párt alkot. Továbbá a játék értéke $v = a_{rs}$.*

Bizonyítás. A sorjátékos nyereménye az i-edik sort választva legalább m_i, az oszlopjátékos vesztesége a j-edik oszlopot választva legalább M_j. Az r-edik sort, illetve az s-edik oszlopot választva a sorjátékos $m = a_{rs}$ nyereményt garantálhat magának, míg az oszlopjátékos legfeljebb $M = a_{rs}$ egységnyit veszít. □

Példa:

(i)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

	M_1=3	M_2=2	M_3=1	M_4=3
m_1=-1	0	-1	0	3
m_2=1	3	2	1	2
m_3=0	1	2	0	1

$m = 1 = M$, a nyeregpont a_{23}.

A játék értéke $v = 1$, az optimális stratégiák $x^* =$ (0,1,0), $y^* =$ (0,0,1,0).

(ii) A nyeregpont és a dominancia segítségével végrehajtott egyszerűsítések függetlenek egymástól, elképzelhető, hogy az egyik működik, a másik nem.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Az a_{33}=2 nyilvánvalóan nyeregpont, de nincs a mátrixban sor vagy oszlop dominancia.

Megjegyzés: Az optimális kevert stratégiák a nyeregpont általánosításainak foghatók fel. Ugyanis ha nem létezik nyeregpont, akkor "ki kell lépni" egy magasabb dimenziós térbe (az eloszlások terébe) és ott keresni nyeregpontot. Neumann eredeti bizonyítása ezen a gondolaton alapult, és az ún. Brouwer fixpont tételt alkalmazva megmutatta az általánosított nyeregpont létezését.

A módosított szimplex módszer

A matematika egy-egy területét sokféle szempontból kell vizsgálnunk és kifejlesztenünk. Az egyik legfontosabb a világos, tiszta elmélet és elegáns formalizmus. Fölöttébb szerencsés, ha ehhez szemléletes és lehetőleg pontos geometriai kép társítható. (Ezzel egy későbbi alkalommal foglalkozunk majd.)

Lényeges, hogy az alkalmazásokban egyértelmű és jól követhető megfeleltetés legyen a való élet fogalmai és a matematikai definíciók, tételek között. Az alkalmazások megbízhatóbbá, követhetőbbé válnak, míg az elmélet motivációkat kap újabb kérdések feltételéhez. (A másik döntő tényező az elméletek alakításában a belső koherencia és algebrai zártság.)

Végezetül nagyon fontos, ám sokszor figyelmen kívül hagyott szempont az elmélet által adott modellek *kiszámíthatósága*, illetve a kiszámítás konkrét megvalósítása. Az operációkutatás nem nélkülözheti ezt a szemléletmódot, és a kutatók erőfeszítései sokszor erre koncentrálódnak. Itt és most meg kell elégednünk a problémakör érintésével, egyetlen implementációt, az ún. *módosított szimplex módszert* tárgyaljuk. (Az eddigi, szótárokon alapuló módszert, *standard szimplex módszernek* nevezzük majd ezután.) A szimplex módszer ezen implementációjának megvalósítása Danzigtól és Orchard-Haystől, 1954-ből ered. A fő gondolata, hogy a bázismegoldásokat ne a szótárak módosításával, hanem közvetlenül az eredeti adatokból állítsuk elő. Ez egy kissé komplikálja az algoritmust, de az alábbi előnyökkel jár:

(i) Két, a lineáris algebrából jól ismert Gauss eliminációra vezet vissza egy iterációt.

(ii) Mivel mindig az eredeti adatokat használja, csökkenti a kerekítési hibák hatását.

(iii) Hasznos az elméleti problémák (degeneráció, késleltetett oszlopgenerálás, stb) tanulmányozására.

(iv) A gyakorlat szerint, főképp a kevés nemzéró elemet tartalmazó ún. *ritka* mátrixokra gyorsabb, mint a standard szimplex módszer. (Ez a kisebb számításigény miatt van így.)

A szótárak leírása mátrixokkal

Hangsúlyoznunk kell, hogy a standard és a módosított szimplex módszer ekvivalensek. Az első feladatunk, hogy a standard módszert mátrixok segítségével átfogalmazzuk, majd ezt a nyelvet használjuk a módosított leírására.

Kezdjük egy példával:

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcr}
 & x_1 & = & 54 & - & 0,5x_2 & - & 0,5x_4 & - & 0,5x_5 & - & 0,5x_6 \\
(*) & x_3 & = & 63 & - & 0,5x_2 & - & 0,5x_4 & - & 0,5x_5 & - & 1,5x_6 \\
 & x_7 & = & 15 & + & 0,5x_2 & - & 0,5x_4 & + & 0,5x_5 & + & 2,5x_6 \\
\hline
 & z & = & 1782 & - & 2,5x_2 & + & 1,5x_4 & - & 3,5x_5 & - & 8,5x_6
\end{array}
$$

A szótár az alábbi LP-ből származik két iteráció után:

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrl}
\max & 19x_1 & + & 13x_2 & + & 12x_3 & + & 17x_4 & & \\
 & & & & & & & & & \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & \leq & 225 \\
 & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \leq & 117 \\
 & 4x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq & 420 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

A fenti szótár három sora ekvivalens az alábbi három egyenlettel:

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcrcrcl}
 & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & & & & & = & 225 \\
(**) & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & + & x_6 & & & = & 117 \\
 & 4x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & & & & & + & x_7 & = & 420
\end{array}
$$

Ha $(\star\star)$ rendszert megoldjuk az x_1, x_3, x_7 változókra mint ismeretlenekre, miközben a többi változót nullának vesszük, éppen a $(\star)$ által adott megoldáshoz jutunk.

Mátrix formában a következőképp írhatjuk ezeket. Legyen a $(\star\star)$ rendszer $Ax = b$, ahol

$$
A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 225 \\ 117 \\ 420 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}
$$

Kihangsúlyozzuk, hogy csak az x_1, x_2 és x_7 változókat kezeljük ismeretlenként. Írjuk Ax-et $A_Bx_B + A_Nx_N$ formában, ahol

$$A_B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_N = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_7 \end{pmatrix}, \quad x_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix},$$

és az $Ax = b$ rendszert pedig így:

$$A_B x_B = b - A_N x_N$$

Mivel az A_B négyzetes mátrix nem szinguláris, mindkét oldal megszorozható A_B^{-1}-gyel balról:

$$x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N,$$

ami a $(*)$ rendszer első három egyenletének tömör leírása. A negyedikhez írjuk a z célfüggvényt, mint cx, vagy méginkább a $c_B x_B + c_N x_N$ formában, ahol $c_B = (\,19, \quad 12, \quad 0\,)$ és $c_N = (\,13, \quad 17, \quad 0, \quad 0\,)$.

Most x_B fenti érékét beírva a célfüggvénybe a

$$z = c_B(A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N) + c_N x_N = c_B A_B^{-1} b + (c_N - c_B A_B^{-1} A_N) x_N$$

adódik. Azaz a $(*)$ szótár leírható, mint

$$\begin{array}{llll} & x_B & = & A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N \\ \hline (***) & z & = & c_B A_B^{-1} b - (c_N - c_B A_B^{-1} A_N) x_N \end{array}$$

Általában is, legyen adott egy standard LP

$$\begin{array}{llll} \max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq & b_i (i = 1, \ldots, m) \\ & x_j & \geq & 0 (j = 1, \ldots, n) \end{array}$$

Az $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$ mesterséges változók bevezetése után az LP felírható, mint

$$\begin{aligned} \max\ cx & \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Az A mátrixnak m sora és $n+m$ oszlopa van, melyből az utolsó m az egységmátrix. Az x vektor $n+m$, a b vektor pedig m hosszú. A c vektor $n+m$ hosszú és az utolsó m koordinátája nulla. Egy x^* lehetséges bázis megoldás az $x_1, x_2, \ldots, x_{n+m}$ változókat m bázis és n nem bázis változóra bontja. A példánkban ez a felosztás indukálja az A mátrix felosztását A_B-re és A_N-re, az x vektort x_B-re és x_N-re, míg a c vektort c_B-re és c_N-re. Megmutatjuk, hogy A_B nem szinguláris az által, hogy az $A_B x_B = b$ egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van. Az egzisztencia nyilvánvaló, hisz az x^* lehetséges bázis megoldás kielégíti az $Ax^* = b$-t és $x_N^* = 0$, így $A_B x_B^*$ $= Ax^* - A_N x_N^* = b$. Az egyértelműség bizonyításához vegyünk egy $\check{x}_B$ vektort úgy, hogy $A_B\ \check{x}_B = b$ és írjunk $\check{x}_B = 0$-t. A kapott $\check{x}$ vektor kielégíti az $Ax^* = A_B\ \check{x}_B + A_N\ \check{x}_N = b$-t, így ki kell elégítenie az x^*-ot reprezentáló szótár első m egyenletét is. De az $\check{x}_N = 0$-ból következik, hogy $\check{x}_B = x_B^*$. Az A_B^{-1} létezéséből az is következik, hogy az x^*-ot reprezentáló szótár felírható $(***)$ alakban. Az A_B mátrix a *bázis mátrix*, vagy egyszerűen *bázis*. Szokás az A_B mátrixot B-vel jelölni, és a szótárt így írni:

$$\begin{aligned} x_B &= B^{-1}b - B^{-1}A_N x_N \\ z &= c_B B^{-1} b + (c_N - c_B B^{-1} A_N) x_N \end{aligned}$$

A $B^{-1}b$ persze nem más, mint az x_B^* vektor, amely a bázisváltozók pillanatnyi értékeit tartalmazza.

Az algoritmus egy példán keresztül

A szimplex módszer egy iterációjában először kiválasztjuk a bázisba belépő változót, majd a kilépőt, végül kiszámoljuk az új bázismegoldást. Ezt az eddigiektől eltérően is megtehetjük, ez lesz a módosított szimplex módszer. Az előző paragrafusban használt példán mutatjuk be ezt. Az iteráció a következőkkel kezdődik:

$$x_B^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_3^* \\ x_7^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 \\ 63 \\ 15 \end{pmatrix} \text{és} B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Belépő vátozó lehet bármely nembázis változó, amelynek pozitív együtthatója van a szótár utolsó sorában. A módosított szimplex módszerben a $c_N - c_B B^{-1} A_N$ vektort két lépésben számítjuk ki: először keresünk egy $y = c_B B^{-1}$ vektort az $yB = c_B$ rendszer megoldásával y-ra, majd kiszámítjuk a $c_N - yA_N$ vektort.[9] A példánkban először megoldjuk az

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszert, amely $\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,5 & 8,5 & 0 \end{pmatrix}$-t ad, majd kiszámítjuk a

$$(13 \;\; 17 \;\; 0 \;\; 0) - (3,5 \;\; 8,5 \;\; 0) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-2,5 \;\; 1,5 \;\; -3,5 \;\; -8,5)$$

vektort. Mivel a vektor egyetlen pozitív komponense a második, az $x_N = (x_2, x_4, x_5, x_6)^T$ második komponense, x_4 lép be a bázisba. Jegyezzük meg, hogy $c_N - yA_N$ vektor komponensei egyenként, egymástól függetlenül számolhatók ki. Ha az x_j nembázisváltozó tartozik c_N vektor c_j komponenséhez, és az A_N mátrix a oszlopához, akkor a $c_N - yA_N$ megfelelő komponense $c_j - ya$ lesz. Így bármelyik x_j nembázis változó beléphet a bázisba, ha $ya < c_j$. Az A mátrix x_j-hez tartozó a oszlopa a *belépő oszlop*. A kilépő változó meghatározásához növeljük a belépő változó t értékét nulláról egy pozitív értékre, miközben a többi nembázis változó értékér nullán tartjuk, a bázis vátozókat pedig úgy módosítjuk, hogy maradjon az $Ax = b$. Ahogy t nő, a bázis változók értéke változik, és amelyiké először nulla lesz, elhagyja a bázist. A kilépő változót és a t lehetséges legnagyobb értékét akkor találjuk meg, ha tudjuk hogyan változnak a bázis változók t változásával. A standard szimplex módszernél ez közvetlenül elérhető a szótárból, a példánkban:

$$\begin{array}{rcrcl@{\qquad}rcrcl@{\qquad}r} x_1 &=& 54 &-& 0,5x_4 & x_1 &=& 54 &-& 0,5t & 108 \geq t \\ x_3 &=& 63 &-& 0,5x_4 & x_3 &=& 63 &-& 0,5t & 126 \geq t \\ x_7 &=& 17 &-& 0,5x_4 & x_7 &=& 17 &-& 0,5t & 30 \geq t \end{array}$$

[9] Az inverz mátrix kiszámítását a költsége és instabilitása miatt kerüljük. A gondolat lényegében ugyanaz, mint az ún. Gauss-Dwyer eljárásban.

és így

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & = & 54 & - & 0,5t \\ x_3 & = & 63 & - & 0,5t \\ x_7 & = & 17 & - & 0,5t. \end{array}$$

Általában a szótár első m egyenlete $x_B = x_B^* - B^{-1}A_N x_N$, és így az x_B az x_B^*-ról változik $x_B^* - td$-re, ahol d a $B^{-1}A_N$ mátrixnak a belépő változóhoz tartozó oszlopa. Jegyezzük meg, hogy $d = B^{-1}a$, ahol a a belépő oszlop. A módosított szimplex módszernél csak az x_B^* vektor áll rendelkezésünkre, a d vektort a $Bd = a$ megoldásából szerezzük meg. Példánkban ez

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} d = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{melyből} \quad d = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

adódik. Ebből látható, hogy a t egészen 30-ig növelhető. Ekkor

$$54 - 0,5t = 39,\ 63 = -0,5t = 48,\ 15 - 0,5t = 0,$$

és az x_7 lép ki a bázisból. Eleddig a módosított szimplex módszer igényelt olyan számításokat, melyeket a standard módszert használva nem kellett elvégeznünk. Az iteráció végén viszont sokan nyerünk. Míg a standard módszerben hosszadalmas felírni az új szótárt, erre a módosított módszerben nincs is szükség. A példánkban a módosított szimplex módszer a következő iterációba minden további nélkül belép az

$$x_B^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_3^* \\ x_7^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 48 \\ 30 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

inputtal.

Jegyezzük meg, hogy a B oszlopainak sorrendje nem lényeges, csak az, hogy x_B^* komponenseinek sorrendjével megegyezzen. Azaz a következő iteráció kezdődhetne így is:

$$x_B^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_3^* \\ x_7^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 30 \\ 39 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Másképpen fogalmazva az, hogy az $x_1, x_2, \ldots, x_{n+m}$ változók az indexük szerint vannak rendezve csak véletlen egybeesés, B oszlopai tetszőlegesen felsorolhatók.

A bázisváltozóknak egy rendezett listáját, amely B oszlopainak egy aktuális sorrendjét rögzíti *bázis fejlécnek* nevezzük. Az iteráció végén így egyszerűen kitöröljük a kilépő és beírjuk a belépő változót a fejlécbe. (Ezzel elkerülhető a mátrix elemeinek cseréje.) Összefoglalásképpen:

A módosított szimplex módszer iterációja:

1. Oldjuk meg az $yB = c_B$ egyenletrendszert!

2. Válasszunk belépő oszlopot! Ez lehet bármely a oszlopa A_N mátrixnak, amelyre $ya < c_N$. Ha nincs ilyen, akkor a pillanatnyi megoldás optimális.

3. Oldjuk meg a $Bd = a$ egyenletrendszert!

4. Találjuk meg a legnagyobb t értéket, amelyre $x^*_B - td \geq 0$. Ha nincs ilyen t, akkor az LP nem korlátos; különben az $x^*_B - td$ vektor legalább egy komponense nulla és a hozzátartozó változó hagyja el a bázist.

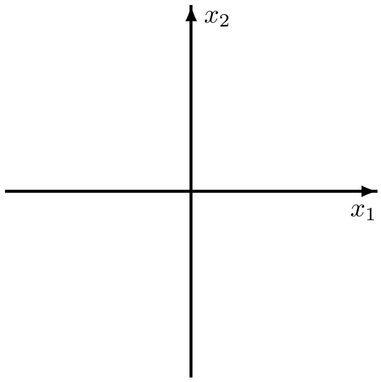
5. Állítsuk a belépő változó értéke t-re és cseréljük az x^*_B vektort $x^*_B - td$ vektorra. Cseréljük B kilépő oszlopát a belépő oszlopra, és a bázis fejlécben a kilépő változót a belépő változóra.

A konvex geometria és a lineáris programozás kapcsolata

Az alábbiakban egy geometriai képet adunk a lineáris programozásról, illetve ezen belül az R^n lineáris egyenlőtenségekkel definiált halmazairól. Ez a bepillantás az ún. *konvex geometria* világába nem lehet sem teljes, sem túl szigorú az idő és helykorlátaink miatt. Mindazonáltal nagyon fontos az intuitív kép a matematikai objektumokról: ez az új gondolatok forrása és ez véd meg a súlyos hibáktól a formális számolások során.

Az ókori görögök matematikája a geometriára alapozott és nem véletlenül. Részben a számfogalom problémái (pl a $\sqrt{2}$ irracionalitása), részben a világos jelölésmód hiánya miatt célszerűbbnek tűnt a geometria nyelvét használni. Viète jelölésrendszere forradalmasította az algebrát, és lehetővé tette, hogy Fermat és Descartes a geometria fogalmait algebrizálja, a tételeit pedig algebrai úton bizonyítsa. Az általuk meghonosított szemlélet azóta is hat a tudományban, talán jobban, mint valaha.

Vegyünk egy koordináta rendszert a síkban, azaz két, egymásra merőleges egyenest:



A sík pontjainak (x_1, x_2) számpárokat feleltethetünk meg, és viszont: minden számpárhoz egyértelműen hozzárendelhetünk egy pontot. Hasonlóan, az egyenesek a számpárok olyan halmazainak felelnek meg, amelyekre $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ valamely $a_1, a_2, b \in R$ esetén. Azaz egy egyenest egy (a_1, a_2, b) számhármas ír le, ahol a_1 és a_2 nem lehet egyszerre nulla.

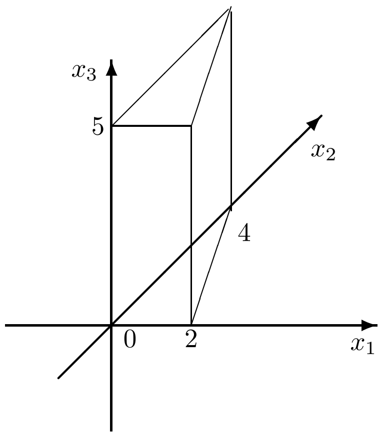
Természetesen az $(a_1, a_2)/\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ vektor nem más, mint az egyenes *normál vektora.* Az $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$ megoldásai egy *zárt félsíkot* alkotnak. A térben analóg módon történhet az azonosítás, egy pontot egy (x_1, x_2, x_3) számhármassal írunk le, míg az $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$, $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0$ megoldásai egy $(a_1, a_2, a_3)/\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ normál vektorú síkot adnak. Az $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \leq b$ egyenlőtlenséget kielégítő számhármasok a síkot az egyik oldalával együtt, azaz egy *zárt félteret* alkotják.

A formalizálást továbbvive mondhatjuk, hogy az $(x_1, ..., x_n)$ szám n-esek R^n, az n-dimenziós valós tér pontjai, a $\sum_{j=1}^n a_jx_j = b$, $\sum_{j=1}^n a_j^2 \neq 0$ megoldásai az $\frac{(a_1,...,a_n)}{\sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2}}$ normál vektorú *hipersíkok*, míg a $\sum_{j=1}^n a_jx_j \leq b$ megoldásai pedig a *félterek*. Így a lineáris programozási feladatok értelmezési tartománya véges sok féltér metszete, amit *konvex poliédernek*, vagy röviden *poliédernek* hívunk. Ha egy poliéder *korlátos*, akkor szokásos a *politóp* elnevezés.

Példa:

$$\begin{array}{lccccccc}
\max & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & & \\
 & 2x_1 & + & x_2 & & & \leq & 4 \\
 & & & & & x_3 & \leq & 5 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

A lehetséges megoldások halmaza az ábrázolt poliéder (tkp. egy ék).



A poliéder *lapjai* azon halmazok, ahol valamely feltétel egyenlőséggel teljesül. Az alsó háromszög például az $x_3 \geq 0$-nak, míg a jobboldali téglalap a $2x_1 + x_2 \leq 4$-nek felel meg. Az egységes kezelés kedvéért bevezetjük az $x_4 = 4 - 2x_1 - x - 2$ és az $x_5 = 5 - x_3$ mesterséges változókat. Így a poliéder minden lapja megfelel az $x_1, ..., x_5$ változók valamelyikének abban az értelemben, hogy egy (x_1, x_2, x_3) lehetséges megoldás pontosan akkor van rajta az x_j-hez tartozó lapon, ha kibővített $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ vektorban $x_j = 0$. Könnyen ellenőrizhető, hogy esetünkben az x_3 az alsó, x_5 a felső, x_2 az elülső, x_1 a bal, x_4 pedig a jobboldali lapnak felel meg.

Nyilvánvaló, hogy a lineáris célfüggvény a poliéder egy csúcsában veszi majd fel a maximumát. (Valóban, ha egy pont nem csúcs, akkor "mindkét" irányban mozoghatunk, és az egyikben biztos nem csökken a célfüggvény értéke.) Nem meglepő hát, hogy a korábban definiált szótárunk által adott bázismegoldások éppen a poliéder csúcsainak algebrai leírásai. Egy bázismegoldásban három változó értéket (a nembázis változókét) nullának vesszük, s ez meghatározza a maradék kettő értékét. Geometriailag ez azt jelenti, hogy minden bázismegoldást három sík metszeteként kapunk meg. Az n-dimenziós térben n hipersík metszete ad majd egy pontot.

A szimplex algoritmus geometriai szemléltetése

A szimplex algoritmus bázismegoldások sorozatán keresztül jut el az optimumhoz. Esetünkben, a legnagyobb együttható módszert használva, a következők ezek:

Kezdet:	(0, 0, 0, 4, 5)	x_4, x_5 bázis
1. iteráció után:	(0, 0, 5, 4, 0)	x_4, x_3 bázis
2. iteráció után:	(2, 0, 5, 0, 0)	x_1, x_3 bázis
3. iteráció után:	(0, 4, 5, 0, 0)	x_2, x_3 bázis

A négy bázismegoldás rendre a poliéderünk $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 5)$, $(2, 0, 5)$ és $(0, 4, 5)$ csúcsainak felel meg. Egy iteráció felfogható úgy, hogy a két csúcs közti élen mozgatjuk a megoldást amíg el nem jutunk a következő csúcspontba. Például a 2. iterációban az x_1 lép a bázisba, így elkezdjünk növelni az értékét, közben a többi bázison kívüli változó (azaz x_2 és x_5) értékét megtartjuk nullának. Geometriai értelemben persze az $x_2 = x_5 = 0$ nem más, mint az elülső és a felső lap közös része. A közös rész pedig éppen a $(0, 0, 5)$ és $(2, 0, 5)$ csúcsokat összekötő él. Az x_1 növelése tehát a jobboldali lap felé való mozgást jelent; elérve azt az x_4 értéke válik nullává és kerül ki a bázisból.

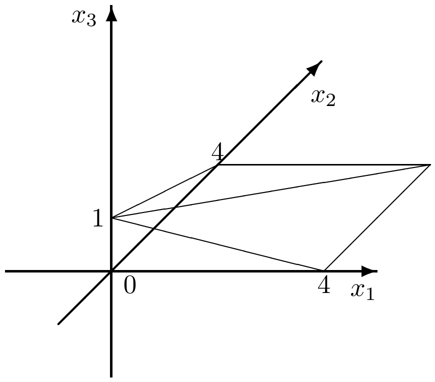
Szabad változót nem tartalmazó nem degenerált problémák esetén mindig így foghatjuk fel a szimplex algoritmus iterációit. Meg kell jegyeznünk, hogy a hibaszámítás kapcsán mind Boscovič (1756-57), mind Fourier (1820 körül) eljutott a lineáris programozási feladatokhoz. Mi több, Fourier megoldást is adott: a szimplex algoritmus geometriai leírását. Nem kétséges, hogy erősebb motivációk hatására (pl. megfelelő számítógépes háttér, igény az LP gyors megoldására) már ő is képes lett volna a módszer algebrai leírására. Így a történet azon példák hosszú sorát gyarapítja, amelyek azt mutatják, mekkora befolyása van a tudományos felfedezésekre a környezetnek és a szerencsének.

A perturbációs módszer geometriai interpretációja

Korábban láttuk, hogy degenerációk léphetnek fel a szimplex módszer végrehajtása során. Most a degeneráció geometriai jelentésének megértése a célunk. Tekintsük például az alábbi LP-t:

$$
\begin{array}{lccccccc}
\max & x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & & \\
 & x_1 & & & + & 4x_3 & \leq & 4 \\
 & & & x_2 & + & 4x_3 & \leq & 4 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Az LP lehetséges megoldásainak poliédere a következő:



Itt a $(0, 0, 1)$ csúcsban nem három, hanem *négy* sík találkozik. Azaz ha a csúcsot három sík metszeteként szeretnénk leírjuk, akkor az többféleképpen is megtehető.

Algebrailag ez azt jelenti, ha bármely három változó értéke nulla az x_1, x_2, x_4 és x_5 változók közül, akkor a negyedik szintén nulla értéket vesz fel. Így ha közülük valamely három nincs a bázisban, akkor a negyedik értéke, bár bázis változó, nulla és éppen ezt hívtuk degenerációnak. A szimplex algoritmust végrehajtva az alábbiakat kapjuk.

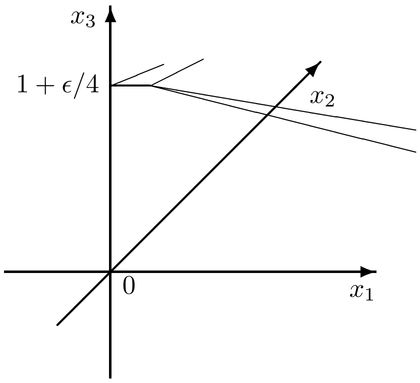
A kezdeti megoldás:	(0, 0, 0, 4, 4)	x_4, x_5 bázis
1. iteráció után:	(0, 0, 1, 0, 0)	x_3, x_5 bázis
2. iteráció után:	(0, 0, 1, 0, 0)	x_3, x_2 bázis
3. iteráció után:	(4, 4, 0, 0, 0)	x_1, x_2 bázis,

Geometriai kifejezésekkel azt mondhatjuk, hogy az első iteráció után maradunk a $(0, 0, 1)$ csúcsban, csak annak *leírása* változik meg. Ez történik a degenerált lépésekben általában is; "maradunk" a csúcsban, csak éppen a csúcsot meghatározó hipersíkok változnak. Ezek után világossá válik a ciklizáció geometriai jelentése: "beleragadunk" egy csúcsba miközben ciklikusan váltogatjuk a csúcspont leírását.

Perturbáljuk a poliédert, azaz változtassuk meg egy kissé a poliédert definiáló egyenlőtlenségek jobboldalát. Geometriailag ez a síkok párhuzamos eltolásának felel meg, így reménykedhetünk a degeneráció megszünésében. (A gyakorlatban a változtatás oly kicsiny, hogy az LP feladat lényegében nem változik.)

$$\begin{array}{lccccccc}
\max & x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & & \\
 & x_1 & & & + & 4x_3 & \leq & 4+\epsilon \\
 & & & x_2 & + & 4x_3 & \leq & 4+\epsilon^2 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Nagyítsuk fel a $(0, 0, 1)$ pont környékét és nézzük meg mi történt a poliéderrel. Azt találjuk, hogy a perturbáció hatására "széthasadt" a $(0, 0, 1)$ csúcs két csúcsra, a $(0, 0, 1 + \epsilon/4)$ és a $(\epsilon - \epsilon^2, 0, 1 + \epsilon/4)$ csúcsokra. Tehát a degeneráció *megszűnt*.



Természetesen degeneráció híján nem lehet ciklizáció sem. Megjegyezzük, hogy a perturbáció általában is nagyon hatékony eszköz a degeneráció ellen. Hasonlóképpen szüntethetők meg a polinomok többszörös gyökei és ezzel némely differenciálegyenlet degeneráltsága.[10] További példa degenerációra az alábbi LP feladat.

$$
\begin{array}{llllllll}
\max & x_1 & & & & & & \\
 & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 0 \\
 & & & x_2 & & & \leq & 1 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Itt nem nyilvánvaló a degeneráció a $(0,0,0)$ pontban, hisz látszólag három sík találkozik. Ez azért van így, mert az $x_2 = 0$ feltételhez nem tartozik a poliédernek lapja, léven az $x_2 \geq 0$ redundáns. (Azaz az $x_2 \geq 0$ következik az $x_1 - x_2 + x_3 \leq 0$, az $x_1 \geq 0$ és az $x_3 \geq 0$ egyenlőtlenségekből.) Ha elhagyjuk az $x_2 \geq 0$ feltételt, az nem változtat a lehetséges megoldások halmazán, így a poliéderben sem; ezért nem jelenik hát meg lapként.

Grafikus módszer

A kétdimenziós esetben könnyen szemléltethetjük a és oldhatjuk meg az LP feladatokat az úgynevezett *grafikus módszer* segítségével. Egy példán

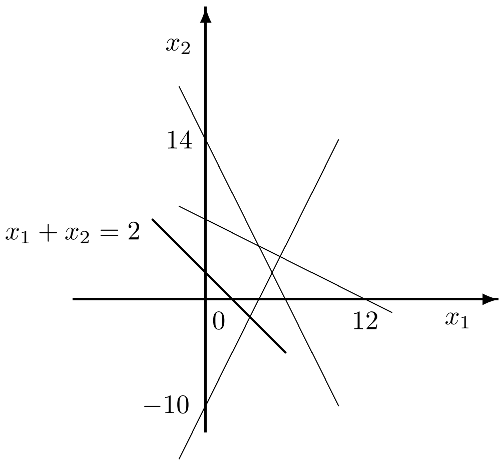
[10]Különösen szép példa a perturbációra a kvantummechanikai *Zeeman effektus*; ebben a mágneses tér hatására szétválik (felhasad) a nátrium atom többszörös spektruma.

illusztráljuk a eljárást.

Példa:

$$\begin{array}{lrcrcr}
\max & x_1 & + & x_2 & & \\
 & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 14 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 12 \\
 & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 10 \\
 & x_1, & & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Az ábra a lehetséges megoldások poliéderét és az $x_1 + x_2 = 2$ egyenest mutatja. Minden $x_1 + x_2 = d$ egyenes párhuzamos ezzel; $d < 2$ *balra le*, $d > 2$ esetén *jobbra fel* eltolással kapható meg belőle.



Ennek alapján egy tetszőleges kétdimenziós LP feladat esetén a következő az eljárás:

Vegyük fel a lehetséges megoldások poliéderét és egy $c_1x_1 + c_2x_2 = d$ egyenest, amely metszi ezt. Toljuk el az egyenest abba a $c_1x_1 + c_2x_2 = d^*$ egyenesbe, amelyre a $d^* \geq d$ és minden $d^{**} > d^*$ esetén a $c_1x_1 + c_2x_2 = d^{**}$ már elkerüli a poliéderünket. Nyilvánvalóan a $c_1x_1 + c_2x_2 = d^*$ egyenes és a poliéder metszete szolgáltatja az összes optimális megoldást, míg $d^* = z^*$, az optimum érték. (Ha a $c_1x_1 + c_2x_2 = d^*$ éppen a poliéder egy lapja, akkor több megoldása van az LP-nek.)

Egy esettanulmány: a Cutting Stock probléma

Ebben a fejezetben egy, a való életből vett problémát kívánunk nagyobb mélységben végigkövetni, utalva az alkalmazások közben fellépő nehézségekre. Ezek az ún. *esettanulmányok (case studies)* alkotják az operációkutatás egyik legfontosabb részét, és tesztelik mind az elméletek, mind a művelőik erejét, találékonyságát.

0.1 A Cutting Stock probléma

Az iparban jónéhány anyagot (papír, textília, celofán vagy fémfólia) nagy szélességű tekercsekben állítanak elő. Ezeket a *félkész* tekercseket kisebb szélességű *végtermékekre* szokás vágni. A gyártók néhány standard szélességű félkész tekercset készítenek, míg a felhasználók által igényelt végtermékek szélessége nagyon változhat. A vágás olyan gépi késekkel történik, amelyek hosszában vágják keresztül a félkész tekercseket. (A szakirodalomban általában *guillotine cut* néven említik az ilyen vágásokat.) Például egy 100 inch széles tekercsből készíthető két 31, egy 36 inches végtermék, míg (esetlegesen) két inch megy a selejtbe. Mikor egy összetett rendelést kíván a gyártó kielégíteni, a meglévő félkész tekercseknek a a végtermékekbe való leggazdaságosabb vágása ritkán nyilvánvaló. Az optimális vágás meghatározását nevezzük “cutting-stock” problémának.

Lineáris Programozási Modell

Az alábbi példában a félkész tekercsek szélessége 100 inch, és a következő végtermékekre van szükség:

97 tekercs 45 inches
610 tekercs 36 inches
395 tekercs 31 inches
211 tekercs 14 inches

Először felsoroljuk a lehetőségeket egy félkész tekercs felvágásának a_1 45 inch, a_2 36 inch, a_3 31 inch és a_4 14 inch szélességű végtermékre. Kiderül, hogy 37 módja van ennek, ahol a táblázat j-edik vágásmintája az a_{1j}, a_{2j}, a_{3j} és a_{4j} értékével van meghatározva.

Tegyük fel, hogy a j-edik mintát x_j alkalommal használjuk, ekkor

$$\sum_{j=1}^{37} a_{ij}x_j = b \quad i = 1, 2, 3, 4$$

ahol $b_1 = 97$, $b_2 = 610$, $b_3 = 395$ és $b_4 = 211$. Ezen feltételek mellett kívánjuk minimalizálni a $\sum_{j=1}^{37} x_j$ összeget, ahol $x_j \geq 0$ $(j = 1, 2, ..., 37)$.

Az LP feladat megoldásánál felléphetnek *törtmegoldások*, azaz számunkra fontos lenne az $x_j \geq 0$ mellett az x_j *egész szám* feltétel teljesülése. Igazából azonban a törtmegoldásoknak is van realitása. Az értékesebb anyagok, mint például a selyem, vágásánál nem az egész tekercset vágják fel, hanem akár egy tekercsen belül átállíthatók a kések. Ez nyilvánvalóan épp egy törtmegoldásnak felel meg. Kevésbé költséges anyagoknál (papír) viszont nem számolnak a gépek menet közbeni átállításával, azaz a megoldásnak egész értékűnek kell lennie. Ezekben az esetekben is nagyon hasznos az LP megoldás, esetünkben a következőt adja:

$$x_1^* = 48,5 \;\; x_{10}^* = 105,5 \;\; x_{12}^* = 100.75 \;\; x_{13}^* = 197,5.$$

Lekerekítve minden x_j-t egy olyan tervet kapunk, amely 450 félkész tekercset használva 96 db 45 inches, 607 db 36 inches, 394 db 31 inches és 210 db 14 inches végterméket állít elő. A maradék szükséglet könnyen láthatóan előállítható 3 plusz tekercs felvágásával. Így találtunk egy egész megoldást, amely 453 tekercset igényel. Mivel a törtmegoldás (LP) optimum értéke $452,25$, az egész értékű megoldásunk nyilvánvalóan optimális.

Hasonlóan járhatunk el általában, de a gyakorlatban két, egymástól gyökeresen eltérő természetű problémával szembesülünk:

(i) A papíriparban előforduló problémák esetén csillagászati számú változó lép be. Például 200 inches félkész tekercseknél és 40 különböző, 20 és 80 inch közötti végtermék esetén a különböző vágásminták (és így az LP változóinak a száma) akár a 100 milliót is meghaladhatja. Ekkor már a probléma felírása, nemhogy a megoldása, meghaladja a lehetőségeket.

(ii) A törtmegoldásokról optimális egészértékű megoldásra való áttérés egyáltalán nem könnyű. Az alkalmazott kerekítés illetve a maradék igény ésszerű kielégítése nem szükségképp optimális. Ha a végtermékek csak kis mennyiségben rendeltek, akkor az optimális egészértékű megoldás és az optimális törtmegoldás által használt vágási minták nagyon eltérhetnek egymástól. Mi több, a tapasztalat szerint el is térnek.

Az első nehézséget P. C. Gilmore és R. E. Gomory által kidolgozott zseniális ötlet kiküszöböli. Módszerüket, az ún. *késleltetett oszlopgenerálást* részletesen ismertetjük a következőkben. A lényege tömören annyi, hogy csak néhány vágási mintát használunk egyszerre, és csak akkor generálunk újakat, mikor ténylegesen szükség van rájuk.

A második nehézségre nem ismeretes igazán jó megoldás. Szerencsére a gyakorlatban a kerekítés, majd a maradék igények lehetőleg kevés új tekercset felhasználó kielégítése lefogadható megoldásokat eredményez. Ha m különböző szélességű végtermékre van szükség, a szimplex módszer által szolgáltatott törtmegoldás legfeljebb m nem nulla változót tartalmaz. Így a kerekítéssel kapott megoldás és az egész értékű optimum közti különbség a legrosszabb esetben is csak m tekercsnyi (bár többnyire még ennyi sem). Mivel m tipikus értéke nem több, mint 50, míg a végterméket százával vagy ezrével rendelik meg, s így a *relatív hiba* elhanyagolható. Azokat a problémákat, ahol az m nagy, általában *ládapakolásnak* nevezzük. A "cutting-stock" probléma név akkor használatos, ha a végtermékek kevés fajtában, de nagy számban igényeltek.

Megjegyzés: Számos optimalizálási problémánál megjelenik az egészértékűség feltétel. Néha a kerekítés, néha a probléma speciális szerkezete segít, de általában rendkívűl nehéz az optimum meghatározása már viszonylag kis problémák esetén is. Az *egész értékű programozás* és a *kombinatorikus optimalizálás* ezeket, illetve a jó közelítő megoldások lehetőségeit kutatja. A cutting-stock probléma egy nagyon tipikus példa, amelynek kezelésében a már említett késleltetett oszlopgenieráláson kívül szerepet kap a ládapakolás közelítő, és s későbbiekben említendő *hátizsák probléma* pontos megoldása.

Késleltetett oszlopgenerálás

Vegyünk egy cutting-stock problémát, ahol a tekercs szélessége r inch és b_i db w_i inch szélességű végtermékre van szükség. Ez, mint láttuk a következő LP-hez vezet:

$$
\begin{array}{rrcl}
min & cx & & \\
 & Ax & = & b \\
 & x & \geq & 0
\end{array}
$$

A feladatban a b vektor komponensei $b_1, b_2, \ldots, b_m$, míg a c vektor csupa !-esből áll. Az A mátrix minden $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m)^T$ oszlopa vágási mintát kódol, amely a_i db w_i inch szélességű végterméket állít elő. Azaz a oszlopa A mátrixnak, akkor és csak akkor, ha $a_1, a_2, \ldots, a_m$ nem negatív egészek és $\sum w_i a_i \leq r$. A módosított szimplex módszer minden iteráció során csak egyszer utal az A mátrix nembázis oszlopaira, a 2. lépésben. Az y vektor kiszámítása után meg kell találni a belépő oszlopot, azaz olyan $a_1, a_2, \ldots, a_m$ nemnegatív vágásokat keresünk, hogy

$$\sum_{i=1}^{m} w_i a_i \quad \text{és} \quad \sum_{1}^{m} y_i a_i > 1$$

(Emlékezzünk vissza, a 2. egyenlőtlenség fordított irányú volt. A különbség oka, hogy itt most *minimalizálunk*.) Ezek szerint, ha tudunk találni megfelelő $a_1, a_2, \dots, a_m$ számokat, vagy tudjuk bizonyítani, hogy nem léteznek ilyenek, akkor nincs szükség arra, hogy előre felírjuk az A mátrixot. Ehelyett a belépő oszlopok egyenként generálhatók, iterációnként egy. Lássuk ezt egy példán, ahol r=91 és a rendelés

78 db	25 1/2 inch
40 db	22 1/2 inch
30 db	20 inch
30 db	15 inch

Kezdjük egy nagyon kézenfekvő bázis megoldással:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & & & \\ & 4 & & \\ & & 4 & \\ & & & 6 \end{pmatrix} \qquad x^* = \begin{pmatrix} 26 \\ 10 \\ 7,5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Általában is kezdhetjük a megoldást m olyan vágási mintát használva, ahol az i-edik minta csak w_i szélességű végterméket ad. Az első iteráció ezek után:

1. lépés Megoldva az $yB = [1, 1, 1, 1]$-et: $y = [1/3, 1/4, 1/4, 1/6]$.

2. lépés Most olyan a_1, a_2, a_3, a_4 nemnegatív egészeket keresünk, melyekre

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 25,5a_1 & + & 22,5a_2 & + & 20a_3 & + & 15a_4 & \leq & 91 \\ \frac{1}{3}a_1 & + & \frac{1}{4}a_2 & + & \frac{1}{4}a_3 & + & \frac{1}{6}a_4 & > & 1 \end{array}$$

Egy, a továbbiakban ismertetett eljárás az a_1=2, a_2=0, a_3=2, a_4=0 megoldást szolgáltatja. A belépő oszlop tehát $a = [2, 0, 2, 0]^T$.

3. lépés Megoldva az $Bd = a$-t: $d = [2/3, 0, 1/2, 0]$.

4. lépés Összehasonlítva a 26 / 1/3 és 7,5 / 1/2 -et azt találjuk, hogy t=15 és a harmadikoszlop hagyja el B-t.

4. lépés A következőhöz jutottunk:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & & 2 & \\ & 4 & & \\ & & 2 & \\ & & & 6 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad x_B^* = \begin{pmatrix} 26 - 2t/3 \\ 10 \\ t \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 10 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Kezdődhet a második iteráció.

1. lépés Megoldva az $yB = [1, 1, 1, 1]$-et: $y = [1/3, 1/4, 1/6, 1/6]$.

2. lépés Most olyan a_1, a_2, a_3, a_4 nemnegatív egészeket keresünk, melyekre

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 25,5a_1 & + & 22,5a_2 & + & 20a_3 & + & 15a_4 & \leq & 91 \\ 1/3a_1 & + & 1/4a_2 & + & 1/6a_3 & + & 1/6a_4 & > & 1 \end{array}$$

A még ismeretlen eljárásunk az a_1=2, a_2=1, a_3=0, a_4=1 megoldást találja meg. Ezzel a belépő oszlop $a = [2, 1, 0, 1]^T$.

3. lépés Megoldva az $Bd = a$-t: $d = [2/3, 1/4, 0, 1/6]$ adódik.

4. lépés Összehasonlítva a 16 / 2/3, 10 / 1/4 és 5 / 1/6 -ot azt találjuk, hogy t=24 és az első oszlop lép ki B-ből.

Az új bázis megoldás:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & & 2 & \\ 1 & 4 & & \\ & & 2 & \\ 1 & & & 6 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad x_B^* = \begin{pmatrix} t \\ 10 - t/4 \\ 15 \\ 5 - t/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 4 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A harmadik iteráció:

1. lépés Megoldva az $yB = [1, 1, 1, 1]$-et, $y = [7/24, 1/4, 5/24, 1/6]$-t kapunk.

2. lépés Most olyan a_1, a_2, a_3, a_4 nemnegatív egészeket keresünk, melyekre

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 25,5a_1 & + & 22,5a_2 & + & 20a_3 & + & 15a_4 & \leq & 91 \\ 7/24a_1 & + & 1/4a_2 & + & 5/24a_3 & + & 1/6a_4 & > & 1 \end{array}$$

Az eljárásunk azt mutatja, hogy *nem léteznek* ilyen egészek. Ebből következik, hogy az optimumnál vagyunk.

Hátra van még a $a_1, a_2, \ldots, a_m$ egészekkel jellemzett vágásminták megtalálásának problémája. Egy kicsivel többre vállalkozunk, olyan algoritmust keresünk, amely megoldja az alábbi feladatot:

$$\begin{array}{lrcl}
\max & \sum_{i=1}^{m} y_i a_i & & \\
& & & \\
& \sum_{i=1}^{m} w_i a_i & \leq & r \\
& a_i & \geq & 0 \quad \text{és egész} \quad (i = 1, 2, \ldots, m)
\end{array}$$

Ezt a problémát *hátizsák problémának* hívjuk. Ennek hatékony megoldásán áll vagy bukik a késleltetett oszlopgenerálás használata a cutting-stock problémában.

12. előadás

A hátizsákprobléma megoldása

Először néhány jelölést megváltoztatunk, és kezelhetőbb alakra hozzuk a problémát. Használjuk az a_i-k helyett x_i változókat, y_i helyett c_i-t, a w_i helyett a_i-t és r helyett b-t. Az eddigieknek megfelelően így a hátizsák probléma

$$\max \quad \sum_{i=1}^{m} c_i x_i$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} a_i x_i &\leq r \\ x_i &\geq 0 \quad \text{és egész} \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \end{aligned}$$

További egyszerűsítés, hogy x_i csak 0 és 1 értékeket vehet fel. Ezt új változók bevezetésével is elérhetjük, bár ez elég gazdaságtalan lenne. Az adott módszer viszont könnyen átfogalmazható az általánosabb alakra, amivel most nem foglalkozunk.

$$\max \quad \sum_{i=1}^{m} c_i x_i$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} a_i x_i &\leq r \\ x_i &\in \{0,1\} \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \end{aligned}$$

A probléma egy LP-re emlékeztet, az $x_i \in \{0,1\}$ feltételek azonban gyökeresen megváltoztatják a helyzetet. Míg egy LP feladat megoldása több ezer változó esetén sem reménytelen egy néhány száz változós hátizsák probléma (tkp egész értékű programozási feladat) megoldása viszont igen. A cutting-stock problémánál fellépő változók száma viszont még kezelhető feladathoz vezet. Néhány további észrevétel:

Feltehetjük, hogy $c_i > 0, a_i > 0$ minden i-re, és

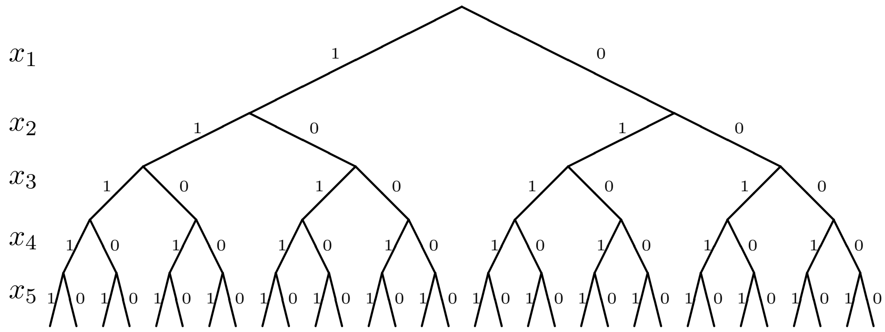
$$\frac{c_1}{a_1} \geq \frac{c_2}{a_2} \geq \ldots \geq \frac{c_m}{a_m}.$$

Valóban, ha $c_i < 0$, akkor $x_i = 0$, illetve $a_i \leq 0$ esetén $x_i = 1$ szerepel az optimális megoldásban, míg az utolsó feltétel az indexek cseréjével elérhető.

Az elnevezés is sugallja, gondolhatunk erre a problémára, mint egy hátizsák optimális kihasználására. Ekkor b a zsák kapacitása, az i-edik tárgy értéke c_i, súlya a_i, az x_i pedig azt kódolja, bekerül-e a zsákba. Szemléletesen a c_i/a_i hányados az i-edik tárgy egységnyi súlyának értéke. Az LP dualitás elmélete megmutatta, hogy nagyon hasznos lehet egy feladat értékére korlátokat keresni. Az egészértékű programozásban sajnos nincs olyan szép és hatékony dualitás, mint az LP-ben, de korlátokat keresni itt is megéri. A problémánk folytonos relaxációján az alábbi LP-t értjük:

$$
\begin{array}{ll}
\max & \sum\limits_{i=1}^{m} c_i x_i \\
 & \sum\limits_{i=1}^{m} a_i x_i \le r \\
 & 0 \le x_i \le 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)
\end{array}
$$

Jelöljük az eredeti probléma optimum értékét z^*-gal, a folytonos relaxációjáét pedig z^*_{LP}-gal. Ekkor nyilvánvalóan $z^* \le z^*_{LP}$. Tekintsük át ezek után a hátizsák probléma lehetséges megoldásainak szerkezetét és azt, hogyan használhatók ki az optimumra adott korlátok. Mivel az $x_1, x_2, \ldots, x_m$ változók 0 és 1 értékeket vehetnek fel, legfeljebb 2^m különböző megoldás van, azaz a probléma véges jellegű.



Ábrázolhatjuk a megoldásokat egy ún. *bináris fa* segítségével, ahol az egyes szinteken dől el egy-egy változó értéke, míg a levelekben a 2^m darab m-dimenziós $0-1$ vektort soroljuk fel. Az algoritmus fő gondolata az, hogy a "nyilvánvalóan" irreleváns megoldásokat hagyjuk el minél hamarabb. Egy-egy csomóponthoz érve kiszámítjuk, hogy tovább haladva legfeljebb mekkora lehet a célfüggvény értéke. Ha ez nem nagyobb, mint az addig kapott legjobb megoldásunk, akkor levágjuk ezt az ágat, hiszen úgysem várható a bejárásával a pillanatnyi megoldás javítása.

Az eseteknek ezt a szétválasztáson és korlátozáson alapuló módszerét *Branch and Bound* röviden *B & B* algoritmusnak nevezzük. Magyarul kissé következetlenül a *korlátozás és szétválasztás* név is használatos. Látni való, hogy itt igazában egy egész algoritmus családról van szó, hisz a különböző korlátok esetén más és más algoritmus adódik. Nem meglepő hát, hogy a korlát milyenségén áll vagy bukik az algoritmus. Két ellentétes szempont ütközik: a "jó" azaz a tényleges értékhez közeli korláttal hamarabb kiszűrhetők az érdektelen megoldások, viszont, mivel a megoldás során rengetegszer van szükség a korlátokra, egyáltalán nem mindegy, mennyire nehéz kiszámítani őket.

A tapasztalatok szerint nem érdemes időt fecsérelni a kifinomult korlátokra, de még az "arany középútra" sem; a kevésbé pontos, ám gyorsan megkapható korlátokat használó algoritmusok általában gyorsabbak. Az általunk választott z^*_{LP}, a folytonos relaxáció, jó és könnyen kiszámítható korlát.

Főképpen, mert a probléma szerkezete miatt *nincs szükség szimplex módszerre* a megoldáshoz. Valóban, a $c_1/a_1 \geq c_2/a_2 \geq \ldots \geq c_m/a_m$ feltételből teljes indukcióval azonnal következik, hogy az alábbi vektor a folytonos relaxáció optimális megoldása:[11]

$x_1 = x_2 = \ldots = x_i = 1$, ha $i \leq m$ a legnagyobb egész, amelyre teljesül a $\sum_{j=1}^{i} a_j \leq b$, $x_{i+1} = (b - \sum_{j=1}^{i} a_j)/a_{i+1}$ és $x_j = 0$, ha $i+2 \leq j \leq m$.

Példa:

$$\begin{array}{lrrrrrl} \max & 10x_1 & +6x_2 & +5x_3 & +3x_4 & +3x_5 & \\ & 3x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +2x_4 & +2x_5 & \leq 9 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \in \{0,1\} \end{array}$$

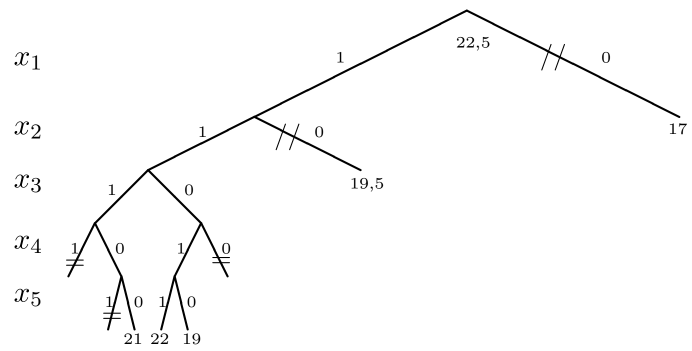
A $\frac{c_1}{a_1} \geq \frac{c_2}{a_2} \geq \ldots \geq \frac{c_5}{a_5}$ feltétel teljesül ($\frac{10}{3} \geq 3 \geq \frac{5}{3} \geq \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2}$), így a folytonos relaxáció optimális megoldása $x_1^* = 1, x_2^* = 1, x_3^* = 1, x_4^* = \frac{1}{2}, x_5^* = 0$, amivel $z^*_{LP} = 22,5$. (Könnyen belátható, hogy a hátizsák probléma optimális megoldása $x_1^* = 1, x_2^* = 1, x_3^* = 0, x_4^* = 1, x_5^* = 1$ a $z^* = 22$ értékkel.

Az ábrán a baloldali ág az adott változó értékének egynek, a jobb pedig a nullának választásához tartozik. Egy belső csúcs a megfelelő változó értékekkel kezdődő lehetséges megoldások halmazát szimbolizálja. Egy belső csúcs alá írt szám (pl az $x_1 = 1, x_2 = 0$ úton elért csúcsnál lévő 19,5) a csúcson át elérhető összes lehetséges megoldás célfüggvény értéknek *közös korlátja.* Egy *levél* (azaz olyan csúcs, amelyben az összes változó értéke kötött) alá írt szám pedig az adott megoldásban a célfüggvény értéke. A

[11]Ennek a mohó algoritmusnak a szemléletes jelentése az, hogy mindig azt a tárgyat próbáljuk berakni a hátizsákba amelynek az egységnyi súlyra eső értéke a legnagyobb.

kettős vonal jelöli egy ág levágását. A fát balról járjuk be. Mikor elérjük az első lehetséges megoldást ($x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0, z = 21$), az értékét megjegyezzük, és ha egy csomópont alatt ennél nem nagyobb korlát van, akkor arra nem megyünk tovább.

Szintén levágjuk azokat az ágakat, amelyeken továbbmenve már biztosan nincs lehetséges megoldás (például az $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1$ csomópont előtt.) Amikor a már meglevőnél jobb megoldásra bukkanunk, ($x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 1, z = 22$) ezt jegyezzük meg és ennek az értékével hasonlítjuk össze a korlátokat a továbbiakban. Bejárva a fát nem találtunk jobb megoldást, így beláttuk, hogy az optimális megoldás valóban $x_1^* = 1, x_2^* = 1, x_3^* = 0, x_4^* = 1, x_5^* = 1$, az optimum érték pedig $z^* = 22$, ahogy azt vártuk. Ezek után visszatérhetünk az eredeti feladatunkhoz, a cutting-stock problémához.



Egy mohó algoritmus

Korábban utaltunk rá, hogy könnyű kezdeti bázis megoldást találni, amiből aztán elkezdhetjük az iterációt. Nem mindegy azonban, mennyire jó a kezdeti megoldásunk: minél közelebb vagyunk az optimumhoz, remélhetően annál hamarabb elérhetjük majd azt. Érdemes lehet tehát előkészíteni az iterációt, ha viszonylag gyorsan közel optimális megoldást tudunk produkálni.

Tegyük fel, hogy r a tekercs szélessége és b_i darab w_i szélességű végtermékre van szükség ($i = 1, ..., m$), ahol $w_1 > w_2 > \ldots > w_m$. A B kezdeti bázist és az x bázismegoldást m iterációval építjük fel. Minden iterációban teljesen kielégítünk legalább egy b_i igényt, az éppen konstruált vágásmintát a megfelelő számban véve. A maradék b_k mennyiségekből levonjuk az előzővágással előállított w_k késztermékek számát (jelöljük őket

b'_k-vel), illetve a w_i és b_i eltűnik a hátralevő megoldásból. Továbbá a soron lévő iterációban úgy igyekszünk egy vágásmintát találni, hogy a még le nem vágott késztermékek közül minél szélesebbeket illesztünk be. Nézzük meg, hogyan működik ez az elsőnek említett példánkban, $r = 100$, $w_1 = 45$, $w_2 = 36$, $w_3 = 31$, $w_4 = 14$, $b_1 = 97$, $b_2 = 610$, $b_3 = 395$, $b_4 = 211$.

1. iteráció

A w_1-et vágjuk le kétszer; persze ezek mellé nem fér semmi több, így $a_1 = \lfloor 100/45 \rfloor = 2$, $a_2 = \lfloor 10/36 \rfloor = 0$, $a_3 = \lfloor 10/31 \rfloor = 0$, $a_4 = \lfloor 10/14 \rfloor = 0$. A mintából $x_1 = 97/2 = 48,5$ "darabot" veszünk, $b'_2 = 610$, $b'_3 = 395$, $b'_4 = 211$, és a w_1 szélességű végterméket ezzel letudtuk.

2. iteráció

Mivel w_1 szélességű végtermék már kész, $a_1 = 0$, $a_2 = \lfloor 100/36 \rfloor = 2$, $a_3 = \lfloor 28/31 \rfloor = 0$, $a_4 = \lfloor 28/14 \rfloor = 2$. Ezzel $x_2 = \min\{\frac{610}{2}; \frac{211}{2}\} = 105\frac{1}{2}$. A w_4 szélességű végtermék iránti igényt kielégítettük, $b'_2 = 399$, $b'_3 = 395$.

3. iteráció

Mint az előbb, $a_1 = 0$, $a_2 = \lfloor 100/36 \rfloor = 2$, $a_3 = \lfloor 28/31 \rfloor = 0$, $a_4 = 0$. Most $x_3 = 399/2 = 199,5$, kész vagyunk a 2. végtermékkel és $b'_3 = 395$.

4.iteráció

Végül $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = \lfloor 100/31 \rfloor = 3$, $a_4 = 0$. Ezzel $x_4 = \frac{395}{3} = 131\frac{2}{3}$, és vége az előkészítő szakasznak. A kapott bázis és bázismegoldás

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad x^*_B = \begin{pmatrix} 48\frac{1}{2} \\ 105\frac{1}{2} \\ 199\frac{1}{2} \\ 131\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Vegyük észre, hogy a básis csak egyetlen (szimplex) iterációra, a célfüggvény érték pedig csak körülbelül 32 egységre van az optimálistól, ami kevesebb, mint 11% eltérés. Ez nem véletlen, az algoritmus kb 23%-osnál nagyobb eltérést *sohasem* eredményez. (Ez D. S. Johnsonnak egy 1973-as eredményéből következik, amely a ládapakolási probléma megoldását vizsgálta az ún. *first-fit decreasing* algoritmus által. Egy meglehetősen nehéz bizonyításból kiderül, ha az optimum z^*, akkor az FFD által adott megoldás értéke $z^*_{FFD} \leq 11z^*/9 + 4$.)

Az esettanulmány megállapításai

Mint láttuk, látszólag céltalan korlátok és közelítő algoritmusok ún. heurisztikák módfelett hasznosak az optimalizálásban. A leggyakrabban felbukkanó módszerek a különböző folytonos relaxációk és mohó algoritmusok.

Általában is javallható, hogy egy nehéz problémával szembesülve először ezeket próbálja ki az ember.

Lényeges, hogy ne csak *ad hoc* példákon, hanem az alkalmazásban ténylegesen fellépő problémákon teszteljük az algoritmusainkat. Munkájuk során Gilmore és Gomory 1963-ban részletesen megvizsgált 20 nehéz cutting-stock problémát, amelyek valós papíriparbeli alkalmazások voltak. A tekercsek szélessége mindig 200 inch volt, a késztermékek száma 20 és 80 között mozgott és 1/4 inches egységekben mértek. Korlátozások voltak a vágókések számára is; 5, 7 illetve 9 az egyes esetekben.

A szimplex iterációk átlagos száma kb 130-nak adódott, de mindez nagy varianciával: az egyes feladatok iteráció száma 20 és 300 között mozgott. Ez elég gyakori eset, hasonlónak kinéző LP feladatok nagyon eltérő viselkedést mutathatnak.

A kevesebb végterméket igénylő problémák általában hamarabb befejeződtek, de azért voltak kivételek. (Ebben a vizsgálatban nem használtak előkészítést jó kezdeti bázis megkeresésére. Úgy tűnik, a szimplex algoritmus néhány iteráció után úgyis elég jó megoldást ad már.)

Egy másik érdekes probléma az új vágásminták kiválasztása. Az új minta lehet az elsőnek megtalált vágásminta, amelyre a $\sum_i y_i a_i > 1$, vagy éppen maximalizálhatjuk is a $\sum_i y_i a_i$-t. Az első több iterációhoz vezet, de könnyebb kiszámítani. Kísérleti eredmények nélkül aligha dönthető el, melyik lesz a jobb. A jelentés szerint megéri kiszámítani a hátizsák problémák maximumát: 20 esetből 19-ben ez bizonyult gyorsabbnak. Átlagosan pedig fele annyi időt használt ez az algoritmus, mint a másik.

A korábbi szóhasználatunkkal a második módszer tulajdonképpen a legnagyobb együttható szabály, míg az első a legkisebb index szabállyal hozható kapcsolatba. Felmerül a kérdés, hogy a legnagyobb növekmény szabálynak van-e megfelelője a cutting-stock problémánál? Természetesen a szabály alkalmazható lenne, csak át kellene vizsgálni az eddig implicit formában létező oszlopokat, és pont ezt akarjuk elkerülni. Egy nagyon kézenfekvő gondolattal viszont imitálható az is: Azok a végtermékek, amelyekből kevésre van szükség, kihagyhatók a vágásmintákkal való javítás maximumának keresésénél, hiszen valószínűleg úgysem változtatnának sokat. A szerzők erre a következő, ún. *medián módszert* javasolják: a végtermékeket osszuk két csoportba aszerint, hogy sok vagy kevés kell belőlük. Ezek után minden második iterációban csak azokat vegyük be a vágásmintákba, amelyekből sok kell, és ezek közül vegyük azt, amely maximalizálja a javítást. Ennek a megoldására már van esély, hisz itt az eredeti változóknak csak a fele lép fel. A medián módszer az esetek többségében gyorsabb volt, mint a korábbiak, és csak az amúgy is kevés ideig futó problémáknál volt lassúbb. Átlagosan

40% javulást hozott a futási időben.

Minden problémánál a papír egy része veszendőbe megy. A veszteség mértéke nem látható előre; a vizsgált esetekben 0,2% és 10% között volt. Érdekes észrevétel, hogy a nagyobb veszteséggel járó problémákat *gyorsabban* lehetett megoldani, mint azokat, ahol kevés a selejt. A tapasztalat szerint a kevés veszteséggel járó problémákban a szimplex módszer gyorsan eljut egészen jó megoldásokhoz, majd kis lépésekkel jut el az optimumba: az újabb és újabb vágásminták alig javítanak a megoldáson. Ezért a szerzők azt javasolták, ha 10 iteráció alatt a javulás kevesebb, mint 0,1%, akkor célszerű megállni, és elfogadni a meglévő megoldást.Ez a felhasznált időt 90%-kal csökkentette, ugyanakkor az emiatt keletkező veszteség 0,5% alatt maradt.[12]

Végül megállapították, ha több méretben állnak rendelkezésre félkész tekercsek, az mindig segít. A 7% fölötti veszteségről is sikerült lemenni 1,4% alá három méret használatával, míg közben a felhasznált idő 144%-211%-kal emelkedett. (Szintén megjegyzik, hogy gép nélkül az ember számára sokkal áttekinthetetlenebb a többféle méret.) A másik lényeges észrevétel, hogy a vágókések számának korlátozása nem lényeges, a 20 esetből csak egyszer csökkent a veszteség a tetszőleges számú kés használata mellett.

[12]Nem szabad elfelejtenünk, hogy azóta a számítógépek sebessége és ezzel a futási idő költsége drámaian megváltozott. Emiatt szinte bizonyos, hogy érdemes az optimumig számolni a mai lehetőségek mellett.