Operációkutatás I.

levelező tagozat

MINTADOLGOZAT

Elméleti rész

1. Definiálja az alábbi fogalmakat:
   a) lehetséges kanonikus alakú feladat bázismegoldása, (2 pont)
   b) kiterjesztett bázismegoldás, (2 pont)
   c) konvex poliéder, (2 pont)
   d) másodlagos célfüggvény, (2 pont)
   e) primál-duál feladatpár. (2 pont)

2. Írja le
   a) a bázisváltoztatás tételét, (5 pont)
   b) a Farkas-lemmát (5 pont).

3. Bizonyítsa be, hogy standard alakú feladat lehetséges megoldásainak halmaza konvex. (10 pont)

4. Válaszoljon az alábbi kérdésekre.
   a) Lehet-e egy LP feladatnak pontosan 2 optimális megoldása? (Indoklással) (5 pont)
   b) Mire mutat példát a Klee-Minty feladat? (5 pont)
   c) Mikor nemkorlátos egy lehetséges kanonikus alakú feladat célfüggvénye a lehetséges megoldások halmazán? (5 pont)
   d) Mi a legnagyobb csökkentés módszere? (5 pont)

Gyakorlati rész

5. A szimplex módszerrel az alábbi táblázatig jutottunk egy feladat megoldásakor. Folytassa tovább és fejezze be a feladat megoldását (10 pont).

	x_1	v_3	v_1	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_3	$3/5$	$-2/5$	1	1	$3/5$	0	0	$14/5$
v_2	0	1	-2	0	0	0	0	0
x_2	$1/5$	$1/5$	0	0	$1/5$	0	0	$3/5$
v_4	0	0	0	-1	0	1	-1	0
v_5	0	0	0	0	0	-1	1	0
(z)	$-6/5$	$4/5$	-1	-1	$-1/5$	4	6	$-8/5$
(w)	0	0	3	1	0	0	0	0

(Az *x*-es változók természetes változók, a *v*-sek mesterséges változók; *z* az elsődleges *w* a másodlagos célfüggvény.)

6. Egy cég íróasztalokat, asztalokat és székeket gyárt. Mindegyik bútortípus gyártásához faanyag és kétféle szakmunka szükséges: asztalosmunka és felületkezelés. Az egyes bútortípusok előállításához a különböző erőforrásokból szükséges mennyiséget az alábbi táblázat adja meg.

Erőforrás	Íróasztal	Asztal	Szék
Faanyag	8 egység	6 egység	1 egység
Asztalosmunka	2 óra	1.5 óra	0.5 óra
Felületkezelés	4 óra	2 óra	1.5 óra

Jelenleg 48 egység faanyag, 20 órányi felületkezelés és 8 órányi asztalosmunka kapacitás áll rendelkezésre. Egy íróasztal 60€, egy asztal 30€, egy szék pedig 20€-ért adható el. A cég azt gondolja, hogy íróasztalokra és székekre korlátlan kereset van, de legfeljebb 5 asztal adható el. Mivel az erőforrásokat már megvásárolták, a cég az összjövedelmét kívánja maximalizálni. Fogalmazza meg a problémát, mint lineáris programozási feladatot és oldja is azt meg. Válaszoljon szöveges formában is, hogy ez egyes bútortípusokból mennyit kell gyártani és mennyi lesz ezzel a maximális bevétel. (10 pont)

7. Oldja meg az alábbi paraméteres LP-feladatot, ahol $a<b<c$ 1-nél nagyobb valós paraméterek (10 pont).

$$
\begin{aligned}
ax_1 + bx_2 + cx_3 &\leq 1 \\
a^2x_1 + b^2x_2 + c^2x_3 &\leq 1 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \\
\hline
x_1 + x_2 + x_3 = z(x_1, x_2, x_3) &\to \max
\end{aligned}
$$

8. Hozza standard alakra az alábbi LP-feladatot. (10 pont)

$$
\begin{aligned}
2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 6 \\
3x_1 - 5x_2 + 2x_3 &\leq 15 \\
x_1 + x_2 - x_3 &\geq 3 \\
-x_1 + 3x_2 - x_3 &\leq -1 \\
x_i \geq 0 \ (i&=1,2,3) \\
\hline
-x_1 + 2x_2 - x_3 = z(\underline{x}) &\to \max
\end{aligned}
$$

9. Konstruáljon az alábbi feladathoz lehetséges megoldásoknak egy olyan $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ sorozatát, amelyre $z\left(x^{(k)}\right) \to -\infty$, amennyiben $k \to \infty$. (10 pont)

$$
\begin{aligned}
x_1 - 2x_3 + x_4 - 2x_5 &= 3 \\
x_2 - x_3 + 2x_4 + 7x_5 &= 4 \\
x_i \geq 0 \ (1 \leq i &\leq 5) \\
\hline
-2x_3 - x_4 - 2x_5 = z(\underline{x}) &\to \min
\end{aligned}
$$