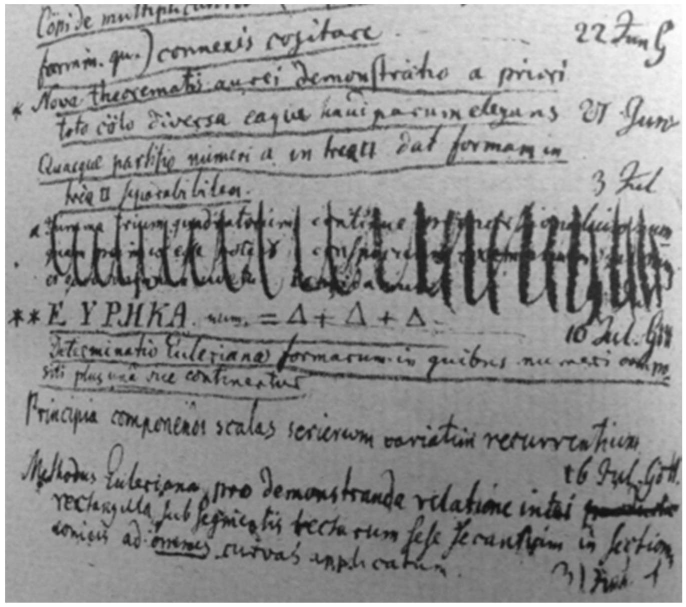
Gauss naplója

Naplót, vagyis dátumokkal ellátott rendszeres feljegyzéseket, úgy gondolom, hogy kevés matematikus vezet. Egy ritka kivétel a néhány évvel ezelőtt megjelent kiváló lengyel matematikusnak – akinek *Matematikai kaleidoszkóp* című kötete magyarul is olvasható – *Hugo Steinhaus*nak (1887–1972) a visszaemlékezései és naplójegyzetei (*Mathematician for All Seasons*, Vol.1 1887–1945, Vol.2 1945–1968). Magyar tudósok, művészek, politikusok és persze számos matematikus is szerepel benne: *Alexits György, Egerváry Jenő, Erdős Pál, Haar Alfréd, Hajós György, Halmos Pál, Kármán Tódor, Kőnig Dénes, Kőnig Gyula, Neumann János, Pólya György, Rényi Alfréd. Riesz Frigyes, Riesz Marcel, Szegő Gábor* és *Turán Pál*. Ritka forrásanyaga a 20 századi matematikatörténet iránt érdeklődőknek, hiszen ilyen matematikus-naplóról, csak alig néhányról tudunk.

Van azonban egy nevezetes, mondhatni klasszikus napló, amely matematikus-matematikatörténész berkekben régóta ismert: *Gauss matematikai naplója*. A híres német matematikus – *Bolyai Farkas* egykori barátja – *Carl Friedrich Gauss* (1777–1855) fiatalkorában feljegyzéseket vezetett az éppen aktuális matematikai találmányairól. A latin nyelvű jegyzeteket lefordították már német és angol nyelvre, a német kiadás ötször is megjelent fakszimile kiadásban. *Gauss* a naplóját természetesen saját magának írta, rövid, helyenként talányos mondatokat, képleteket találunk benne, de legtöbbször csak a matematikai eredményt, részletesebb magyarázat nélkül. 146 bejegyzést tartalmaz, az első dátuma 1796. március 30, az utolsóé 1814. július 9.

Gauss naplójának az egyik talán legismertebb bejegyzése (a 18.), az a híres sor, hogy minden természetes szám felírható legfeljebb három háromszögszám összegeként: *E Y P H K A! num = Δ + Δ + Δ*. *Gauss* Göttingenben jegyezte fel, 1796. július 10-én. Nagyon örülhetett a felfedezésnek, hiszen hasonlóképpen kiáltott fel, mint ókori tudóstársa *Arkhimédész*, aki a történet szerint fürdés közben jött rá a híres fizikai törvényére, aminek aztán úgy megörült, hogy még fel sem öltözött, meztelenül szaladgált az utcákon azt kiáltozva, hogy *Heuréka! Heuréka!* Megtaláltam! Megtaláltam! (*Gauss* egyébként *Arkhimédész*t minden idők három legnagyobb matematikusa között tartotta számon.)

A fenti tétel bizonyítására *Sándor József* erdélyi matematikustól egyszer a következő frappáns indoklást kaptam. A háromszögszámok, mint az ismeretes $\frac{a(a+1)}{2}$ alakúak, így tehát igazolandó, hogy minden *n* pozitív egész szám előáll $n=\frac{a(a+1)}{2}+\frac{b(b+1)}{2}+\frac{c(c+1)}{2}$ alakban (ahol a, b, c természetes számok). Az előbbi egyenlőséget, ha 8-cal megszorozzuk és 3-at hozzáadunk, azzal lesz ekvivalens, hogy minden $8n+3$ alakú szám felírható $8n+3=(2a+1)^2+(2b+1)^2+(2c+1)^2$ alakban, vagyis három páratlan szám négyzetösszegeként. De azzal nem is kell külön foglalkoznunk, hogy páratlan számok négyzetösszegéről beszélünk, hiszen könnyű meggondolni, hogy három négyzetszám összege, csak úgy lehet $8n+3$ alakú, ha mind a három páratlan, mivel egy négyzetszám 4-gyel osztva mindig 0 vagy 1 maradékot ad. *Legendre* híres három négyzetszám tétele alapján azonban, csak azok a számok nem írhatók fel három négyzetszám összegeként, amelyek $4^s(8r+7)$ alakúak (ahol s és r természetes számok). De ha a $8n+3$ ilyen alakú lenne, akkor s csak is 0 lehet, viszont ekkor $8n+3=8r+7$, ami $8(n-r)=4$-hez vezetne, ami persze tarthatatlan.


ΕΥΡΗΚΑ num. = Δ + Δ + Δ

Részlet *Gauss* naplójából

Kíváncsi lennék rá, hogy vajon *Gauss* megmutatta-e akkoriban, akár csak egy pillanatra is *Bolyai Farkas*nak a naplóját. A göttingeni évek alatt *Gauss* még az édesanyjához is elvitte *Bolyai*t Braunschweigbe, beszélgettek is egymással. De hogy a naplóját látta-e? Nem tudjuk. Mindenesetre van egy érdekesség, amit a naplót lapozgatva nemrég vettem észre. Van egy közös nap, amely mind *Gauss* naplójában, mind *Bolyai Farkas* peregrinációs emlékkönyvében (Oláh Anna: „*Tanár Bolyai Farkas emlékkönyvi levélkéi*", Cumánia, 1996) azonos dátummal szerepel: 1796. július 9, vagyis az előbbi nevezetes tételről szóló bejegyzés előtti nap, amit igaz *Gauss*, amint a mellékelt képen is látható, később áthúzott. *Bolyai Farkas* és *Gauss* ekkor még nem ismerték egymást, *Bolyai* Bécsben tartózkodott, onnan ment aztán Jénába és csak azután Göttingába.

Gauss aznapi (a 17a.) naplóbejegyzése így kezdődött: „*Summa trium quadratorum continue proportionalium numquam primus esse*". Magyarul ezt talán úgy fordíthatnánk, hogy *három egymás utáni arányban álló szám négyzetösszege sosem lesz prímszám.* Vagyis, ha $\frac{x}{y}=\frac{y}{z}$, akkor $x^2+y^2+z^2$ nem lehet prímszám. Persze, nyilván kizárva az $x=y=z=1$ esetet, amikor a négyzetösszeg 3. Nem nehéz meggondolni, hogy miért van ez így, hiszen az arányból adódik, hogy $xz=y^2$, vagyis $x^2+y^2+z^2=x^2+xz+z^2=(x+z)^2-xz=(x+z)^2-y^2=(x+y+z)(x-y+z)$. Ha x,y,z pozitív egész számok, ez csak úgy lehet prímszám, ha $x=y=z=1$.

Ugyanezen a napon, 1796. július 9-én *Bolyai Farkas* Bécsben *Sipos Pál*tól (1759–1816), a szintén kiváló erdélyi matematikustól kapott egy emléklapot (innen tudjuk a pontos dátumot), aki akkor *Teleki Sámuel* (1739–1822) erdélyi kancellár és *Bethlen Zsuzsanna* (1754–1797) egyik fia *Teleki Ferenc* (1787–1861) mellett volt házitanító. *Sipos* latinul ezt a megszívlelendő jótanácsot adta az ifjú *Bolyai*nak: „*Emlékezz arra, amit Cicero művében Scipio mond magáról: A bölcs soha kevésbé nem nyugodt, mint amikor nyugodt, és soha kevésbé nem magányos, mint amikor egyedül van.*"

Szabó Péter Gábor
pszabo@inf.u-szeged.hu