A 4272943 „edi szám”

Egy keltezés nélküli levél hátára jegyezte fel Bolyai János, hogy 4272943 *edi szám,* azaz prímszám. (Bolyai János a prímszámokra a *főszám*, *előszám* vagy az *edi szám* kifejezést használta.) *Kiss Elemér* a *Matematikai kincsek Bolyai János kéziratos hagyatékából* (Akadémiai Kiadó, 1999) című könyvében említi levéltári kutatásainak ezt az érdekességét (a 104. oldalon, jelzet: BJ. 1015/1v). *„Honnan tudhatta Bolyai, hogy ez a szám prímszám?”*— kérdezi munkájában a szerző. Erre próbálunk meg válaszolni.

A két Bolyai számelméleti ismereteiket elsősorban *Carl Friedrich Gauss* híres monográfiájából az 1801-ben megjelent *Disquisitiones Arithmeticae*-ből szerezték. Bizonyára itt olvasott Bolyai János a 4272943-as számról, hiszen az a könyv 328. szakaszának II. részében fordul elő az

$$x^2 \equiv -286 \pmod{4272943}$$

kongruencia vizsgálatánál. A szakmai jelölés valójában azt az „egyszerű” kérdést takarja, hogy van-e olyan négyzetszám, ami 286-tal kisebb 4272943 valamilyen többszörösénél? A válasz: igen, egy megoldás az x=1493445.

Számunkra inkább csak az a fontos, hogy eredeti kérdésünk így már olyanképpen módosul, hogy *Gauss honnan tudhatta, hogy a 4272943 az prímszám?*

Gauss gyakran forgatott matematikai táblázatokat. Ismerte a hollandiai *Deventerben* működő magyar származású *Csernák László* (1740–1816) 1811-ben megjelent több mint 1000 oldalas munkáját is, amelyben a szerző 1020000-ig közölte a 2-vel, 3-mal és 5-tel nem osztható pozitív egész számok prímtényezős felbontását. Egy írásában hosszasan dicséri is Csernák kitartó és rendkívül fáradságos munkáját. Elvileg tehát láthatta – például egy táblázatban – az említett számot, csakhogy nem tudunk olyan korabeli táblázatról, amelyben a 4272943 is benne lenne. Akkor talán maga találta? De hát, hogy választhatta példájában pont ezt a számot?

Sejtésünk a következő: a 4272943 számnak van egy érdekes tulajdonsága, amely korábban felkelthette Gauss érdeklődését.

Ha a π számot egyszerű lánctörtbe fejtjük, akkor a 10. közelítő törtet, a tízlépcsős lánctörtet egyszerű törtté alakítva, annak számlálója éppen 4272943.

A 4272943/1360120 első 12 tizedes jegye pontosan megegyezik a π tizedes jegyeivel:

$$\pi \approx 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}}}}}}} = \frac{4272943}{1360120} = 3.\underline{141592653589}3890...$$

Elképzelhető így, hogy Gauss a közelítő törtek egyszerűsítési lehetőségeit vizsgálva maga határozta meg a 4272943 prím voltát, majd azt feljegyezte, hogy későbbi vizsgálatainál felhasználhassa.

Hogy miként kerültek elő ilyen nagy számok, és miért pont azok, arra egy másik példa a következő hipotetikus gondolatsor is. Ha tekintjük az előbb említett könyvében a 328. szakasz I. részét, ott Gauss példának egy olyan kongruenciát említ, amelynek modulusa 5428681. Ennek a számnak is van olyan tulajdonsága, amely arra késztette esetleg Gausst, hogy megjegyezze? Úgy véljük, hogy igen.

Gauss tizenéves volt, amikor már megsejtette a *prímszámtételt* vagyis, hogy az x-nél nem nagyobb prímszámok száma aszimptotikusan $x/\ln(x)$-szel egyenlő. Ezt a sejtését numerikus számolások útján, logaritmus táblázat segítségével tette meg. Hogy ellenőrizze a formula közelítésének pontosságát, minden bizonnyal vizsgálhatta az $x/\ln(x)$ értéket olyan esetekben is, amikor x 10-nek valamilyen pozitív egész kitevős hatványa. Nos, ha $x=10^8$, akkor az előbbi kifejezés értékének egész része éppen 5428681. Feltételezésünk az, hogy Gauss így jutott el ehhez számhoz, ami viszont nem prím: $5428681=307\times17683$. Ezt az elképzelést esetleg a hagyatékában található mellékszámításokkal igazolni is lehetne.

Befejezésül az első olvasatra merésznek tűnő következtetéseket *Srinivasa Ramanujan* (1887-1920), a híres indiai matematikus példájával tudnánk megerősíteni, aki szintén nagyon sok érdekes számelméleti összefüggést, formulát talált azáltal, hogy a számok *személyes ismerősei* voltak.

Szabó Péter Gábor