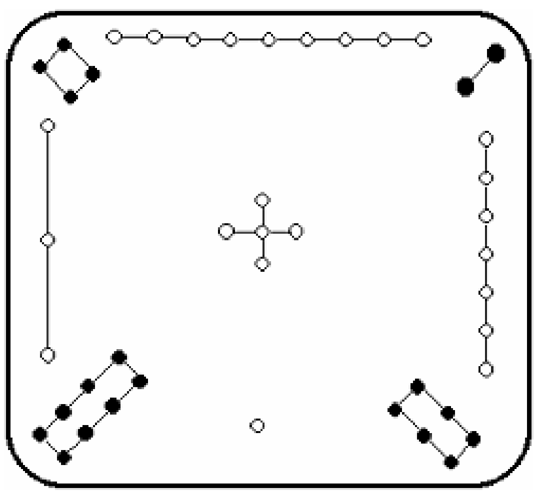
Bűvös négyzetek*

Szabó Péter Gábor

Ez a dolgozat a matematika egyik legrégebbi játékával a bűvös négyzetekkel foglalkozik. Bemutatunk néhány olyan módszert, amelyeknek segítségével magunk is könnyen készíthetünk bűvös négyzeteket. A megszokott típusú bűvös négyzeteken kívűl számos egyéb, különleges tulajdonságút is tárgyalunk.

1. Mi a bűvös négyzet?

A régi kínai irodalom beszámol egy furcsa eseményről, amely a hagyomány szerint több mint 4000 évvel ezelőtt történt. A Lo folyóból egy óriás teknősbéka mászott ki és a páncélján a következő ábra volt látható:



1. ábra. A legelső bűvös négyzet egy teknősbéka hátán.

Ha az egymással összekötött kis pontokat összeszámoljuk, egy olyan számtáblázatot kapunk, amelyben az egyes sorokban és oszlopokban, valamint a két átlóban álló elemek összege mindig 15 lesz (2. ábra).

*A dolgozat a domaszéki Zöldfás Katolikus Ifjúsági Központ általános iskolásoknak szervezett nyári táborában 2001. augusztus 22-én tartott előadás lejegyzett változata. A cikk megírását támogatta az OTKA T 034350 pályázat.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

2. ábra. A Lo-Shu bűvös négyzet számokkal.

A matematikában *bűvös négyzet*nek nevezik az ilyen $n \times n$-es táblázatot. Bármely oszlopban vagy sorban, illetve a négyzet átlóiban álló számokat összeadva az eredmény mindig azonos. Ezt a közös értéket *bűvös összeg*nek hívják. Az alapprobléma olyan bűvös négyzet készítése, amelyben az első n^2 darab pozitív egész szám szerepel. A dolgozatban mi is elsősorban ezt a problémát tárgyaljuk, és ahol ettől eltérünk azt ott külön jelezzük.

A teknősbéka hátán a matematikatörténet legrégebbről ismert bűvös négyzete volt látható, amit Lo-Shunak neveztek el.

2. Hány 3×3-as bűvös négyzet létezik?

Természetesen felmerül a kérdés, hogy az előbb említetten kívül vannak-e további 3×3-as bűvös négyzetek.

Könnyen észrevehetjük, hogy ha a Lo-Shu négyzetet elforgatjuk az óramutató járásával megegyező irányban 90, 180 vagy 270 fokkal, akkor is bűvös négyzeteket kapunk:

8	3	4
1	5	9
6	7	2

6	1	8
7	5	3
2	9	4

2	7	6
9	5	1
4	3	8

3. ábra. A Lo-Shuból forgatással keletkező bűvös négyzetek.

A négyzet függőleges, illetve vízszintes szimmetriatengelyére valamint a két átlójára való tükrözéssel, további négy újabb bűvös négyzet adódik:

2	9	4
7	5	3
6	1	8

8	1	6
3	5	7
4	9	2

4	3	8
9	5	1
2	7	6

6	7	2
1	5	9
8	3	4

4. ábra. A Lo-Shuból tükrözéssel keletkező bűvös négyzetek.

A kiindulási bűvös négyzetből további 7 bűvös négyzetet kaptunk. Vajon van-e olyan 3×3-as bűvös négyzet, amely nincs a fenti listában?

A kérdés megválaszolásához, állapítsuk meg azt, hogy a 3×3-as esetben, mi lehet a bűvös összeg. Az előbbi példákban 15 volt. Van-e amikor más értékkel egyenlő?

Könnyen látható, hogy nincs. Jelöljük a bűvös összeget x-szel. Mivel minden sorban a számok összege x, így a táblázat összes számának összege egyrészt $3x$, másrészt 1+2+3+4+5+6+7+8+9=45. Tehát felírhatjuk a

$$3x = 45$$

egyenletet, amit megoldva $x = 15$ adódik, vagyis 3×3-as bűvös négyzetben a bűvös összeg mindig 15 lesz. Ez az érték mindig három szám összegeként áll elő. Ha figyelembe vesszük a lehetőségeket, a

$$15 = 9 + 5 + 1 = 9 + 4 + 2 = 8 + 6 + 1 = 8 + 5 + 2$$

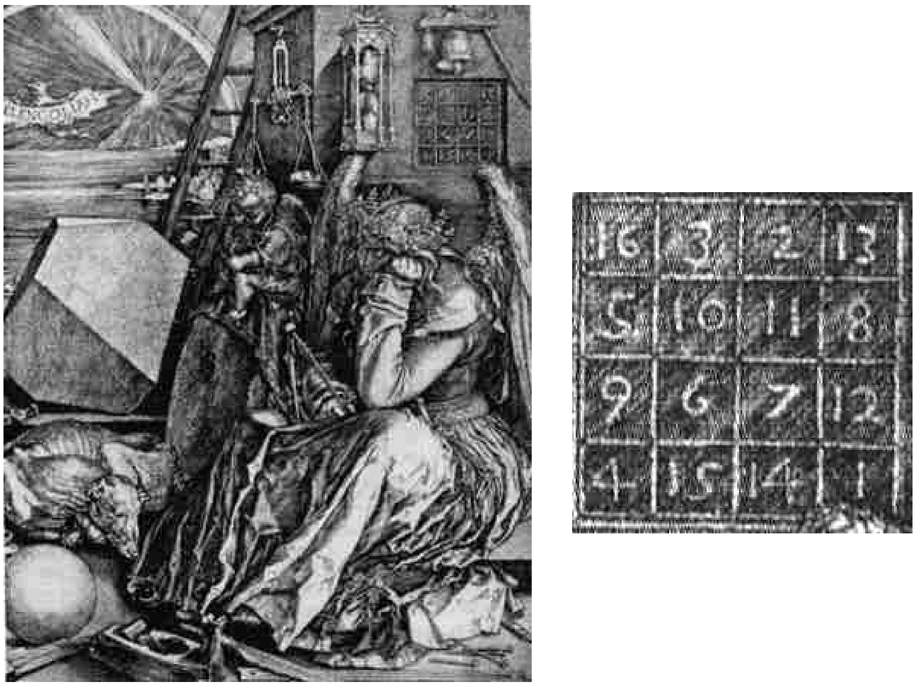
$$15 = 8 + 4 + 3 = 7 + 6 + 2 = 7 + 5 + 3 = 6 + 5 + 4$$

felbontások lehetségesek. A bűvös négyzet középső száma négy összegben szerepel, így az csak az 5 lehet, mivel csak az fordul elő négy különböző felbontásban. A sarkokban szereplő számok három összegben szerepelnek, így azok csak páros számok lehetnek, mivel csak a páros számok fordulnak elő pontosan három összegben. Ezeket az észrevételeket alkalmazva kiderül, hogy csak az előbb felsorolt 3×3-as bűvös négyzetek léteznek.

Ha azt mondjuk, hogy az egymásból forgatással, tükrözéssel megkapható bűvös négyzeteket nem tekintjük különbözőnek – és a matematikában ez szokásos –, akkor valójában csak egyetlen 3×3-as bűvös négyzet van, például az amelyiket a teknős páncélján találtak.

3. Egy 4×4-es bűvös négyzet Dürer *Melankólia* című metszetén

4×4-es, a szimmetrikus eseteket nem megkülönböztető bűvös négyzet 880 van, amelyekben a táblázat az $1, 2, 3, \ldots, 16$ számokkal van kitöltve. Egy francia kutató, Frénicle de Bessy (1605-1675) adta meg őket. A leghíresebb közülük az, amely Albrecht Dürer (1471-1528) magyar származású németalföldi festőnek *Melankólia* című képének jobb felső sarkában is látható (5. ábra):



5. ábra. A. Dürer *Melankólia* című metszetén egy 4×4-es bűvös négyzet látható, benne a mű 1514-es keletkezési dátumával.

Dürer négyzete *bűvös* volta mellett, más egyéb érdekes tulajdonsággal is rendelkezik. A 34-es bűvös összeget a megszokott módokon kívűl még további 76 egyéb formában is megkaphatjuk. Például a sarkokban lévő számok összegeként, a négy középső szám összegeként, vagy az egyes sarkokban lévő 2×2-es négyzetekben lévő számok összegeként. Külön érdekessége a képnek, hogy a metszet keletkezési dátuma, az 1514-es év is benne van a bűvös négyzetben, az alsó sorban középen. Megfigyelhetjük azt is, hogy ez a bűvös négyzet ún. *szimmetrikus bűvös négyzet*, mivel a négyzet középpontjára nézve szimmetrikusan elhelyezkedő számok összege állandó, méghozzá 17. Ilyen a Lo-Shu is, ott a szimmetrikusan elhelyezkedő számok összege 10.

4. Az $n \times n$-es bűvös négyzetek

Az előbbi fejezetekből kiderült, hogy egyetlen 3×3-as és 880 4×4-es bűvös négyzet van. De mi a helyzet a többi esettel?

1×1-es nyilván csak 1 van, amely úgy néz ki, hogy egyetlen négyzetben egy 1-es van. 2×2-es bűvös négyzet – amiről könnyen meggyőződhetünk – nem létezik. A többi esetekre a pontos szám nem ismert. Annyit azért lehet tudni, hogy például 5×5-ös bűvös négyzetből legalább félmillió van.

A bűvös összeg az általános $n \times n$-es esetre viszont könnyen kiszámolható.

Valóban, hiszen ha a bűvös összeget most is x-szel jelöljük, akkor az egyes sorokban lévő számok összege mindig x lesz. Mivel n sor van, így a táblázatban lévő számok összege egyrészt nx másrészt $1+2+3+4+\ldots+n^2$. Felírhatjuk tehát, hogy

$$nx = 1+2+3+4+\ldots+n^2.$$

A további feladat a jobb oldalon álló számokat összegezni. Jelöljük a jobb oldali összeget S_n-nel. Vegyük észre, hogy ha az S_n összeg alá a számokat fordított sorrendbe írjuk, akkor az egymás alá kerülő számok összege mindig n^2+1 lesz.

$$\begin{array}{lcccccccc}
S_n = & 1 & +\ 2 & +\ 3 & +\ldots+n^2-2 & +n^2-1 & + & n^2 \\
S_n = & n^2 & +n^2-1 & +n^2-2 & +\ldots+\ 3 & +\ 2 & + & 1 \\
\hline
\end{array}$$

$$2S_n = (n^2+1)+(n^2+1)+(n^2+1)+\ldots+(n^2+1)+(n^2+1)+(n^2+1).$$

Tehát

$$2S_n = n^2(n^2+1),$$

amiből

$$nx = \frac{n^2(n^2+1)}{2},$$

$$x = \frac{n(n^2+1)}{2}$$

adódik, vagyis az általános esetben a bűvös összeg $\frac{n(n^2+1)}{2}$.

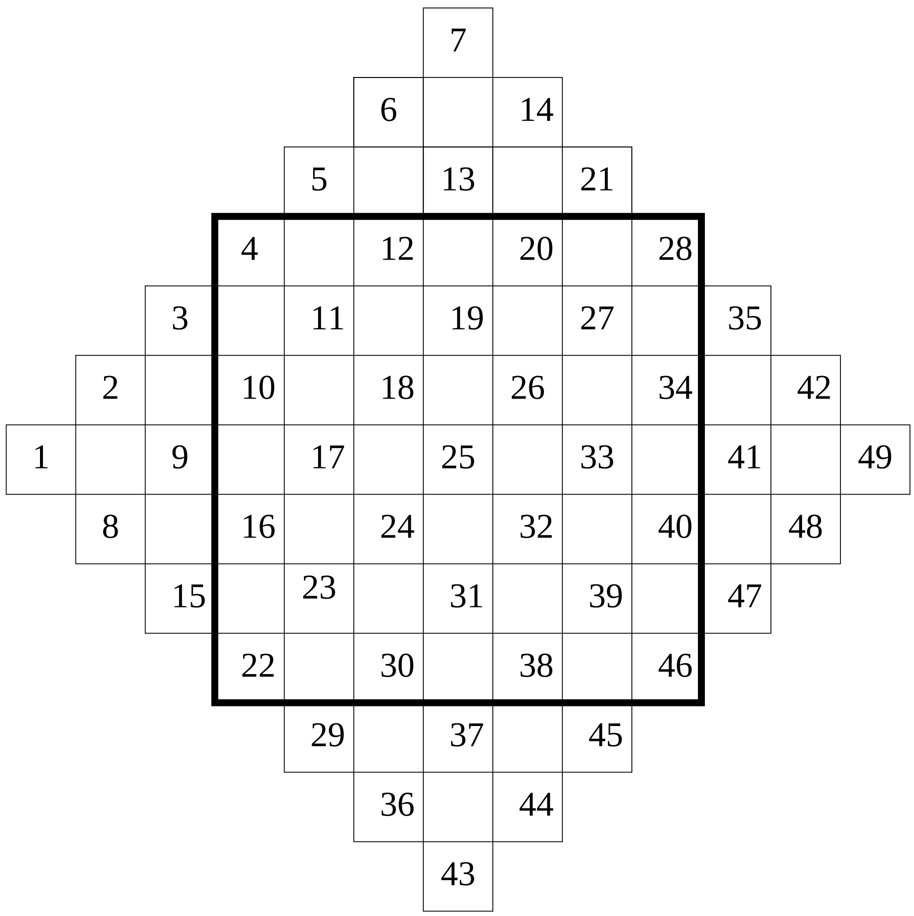
A következő részben látni fogjuk, hogy ha n páratlan szám, akkor vannak olyan eljárások, amelyekkel egyszerűen lehet bűvös négyzeteket előállítani. Több módszert is mutatunk majd ezekre az esetekre. Páros n-ekre ilyen könnyen végrehajtható, elegáns eljárásokat nem tudunk mondani. Akit mégis érdekel hogyan lehet páros n-re is bűvös négyzeteket készíteni, javaslom olvassa el Bakos Tibornak az irodalomjegyzékben megadott cikkét.

5. Páratlan számú mezőből álló bűvös négyzetek

Páratlan elemszámú bűvös négyzet készítésére sok módszer ismeretes. Ezek közül a három legismertebbet közöljük itt. Az eljárások elnevezése nem mondható egységesnek, különböző könyvek más néven említik őket.

1. *Bachet-féle módszer (mondják piramis- vagy terasz módszernek is)*

A Claude-Gaspar Bachet de Meziriac (1581-1638) által felfedezett eljárás két lépésből áll. Először a négyzetből kifelé piramisokat építünk minden oldalra a 6. ábrán látható módon. Ezután a legszélső baloldali négyzettől indulva kezdjük el átlósan írni a számokat 1-től n^2-ig, minden második átlót felhasználva. A kiindulási négyzetünk minden második mezőjét így kitöltöttük.



6. ábra. A Bachet-féle módszer első lépése a 7 × 7-es táblázatra.

A második lépésben a kívülre épített piramisokat "betoljuk" a nekik megfelelő helyekre. Például a jobboldali piramist eltoljuk a négyzet baloldaláig, aminek következtében a piramis számai éppen a négyzet üresen álló helyeire kerülnek. Hasonlóan megtesszük ezt a baloldali, a felső és alsó piramisokkal is. A végeredményként kapott számtáblázat egy szimmetrikus bűvös négyzet lesz (7. ábra). A szimmetrikusan álló elemek összege 50.

4	29	12	37	20	45	28
35	11	36	19	44	27	3
10	42	18	43	26	2	34
41	17	49	25	1	33	9
16	48	24	7	32	8	40
47	23	6	31	14	39	15
22	5	30	13	38	21	46

7. ábra. 7×7-es bűvös négyzet Bachet módszerével kitöltve. Bejelöltük a második lépésnek megfelelő első betolt piramist.

2. *Sziámi módszer (mondják kínai vagy indus, átlós nyíl és De la Loubere-féle vagy Agrippa-módszernek is)*

Az 1-es számot a legfelső sor közepébe írjuk. A következő számot mindig az utoljára leírt számtól egyet jobbra és egyet föl lépve írjuk le. Ha a szabály végrehajtásához ki kellene lépnünk a táblázatból, akkor a négyzet másik vele párhuzamos oldalán folytatjuk az eljárást. Ha olyan mezőre kellene lépnünk amelyen már van szám, akkor az utoljára leírt szám alá írjuk a következő számot és így folytatjuk tovább az eljárást, amíg minden mező kitöltésre nem kerül.

A végeredményként kapott négyzet egy szimmetrikus bűvös négyzet lesz. A 8. ábrán a 7×7-es esetben a sziámi módszerrel kitöltött bűvös négyzetet láthatjuk.

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

8. ábra. 7×7-es bűvös négyzet a sziámi módszerrel kitöltve.

3. *Lóugrásos módszer (mondják Moschopulos-féle módszernek is)*

Ha n osztható 3-mal akkor az 1 számot a legalsó sor középső négyzetébe írjuk, ha nem osztható 3-mal, akkor bárhová írhatjuk. A továbbiakban a lóugrás szabályai szerint haladunk, méghozzá úgy, hogy mindig kettő lépünk föl egyet jobbra. Ha a négyzetből a szabály szerint ki kellene lépnünk, akkor a táblázat vele párhuzamos másik oldalán folytatjuk a kitöltést. Ha a szabály szerint olyan mezőre kellene lépnünk ahol már van szám, akkor az új szám négy mezővel feljebb írandó mint az utoljára leírt szám. A 9. ábrán láthatunk egy példát a kitöltésre.

6. További érdekes bűvös négyzetek

6.1. Tükrös bűvös négyzet

Az első részben a 3×3-as bűvös négyzetet elforgattuk 180 fokkal. Ez olyan mintha az egészet fejreállítottuk volna. Ha valóban elvégezzük a fenti műveletet akkor a számok is fejjel lefelé lesznek. Természetesen ott mi azokat képzeletben helyreigazítottuk.

21	39	8	33	2	27	45
5	23	48	17	42	11	29
38	14	32	1	26	44	20
22	47	16	41	10	35	4
13	31	7	25	43	19	37
46	15	40	9	34	3	28
30	6	24	49	18	38	12

9. ábra. 7×7-es bűvös négyzet a lóugrásos módszerrel kitöltve.

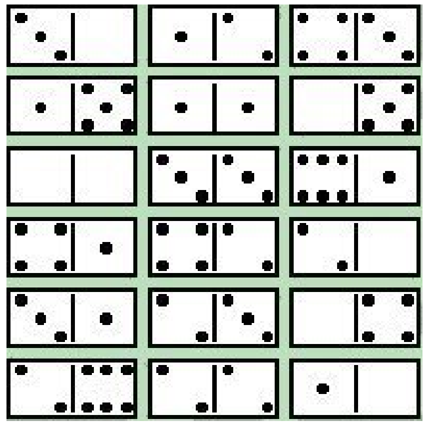
Van olyan bűvös négyzet (most eltekintünk attól, hogy az első n^2 számot használjuk fel), amely akkor is bűvös marad, ha 180 fokkal elforgatjuk a középpontja körül, de a fejjel lefelé álló számok továbbra is értelmesek maradnak (pl. 96-ból 69 lesz vagy 16-ból 91, stb.), sőt az így kapott négyzet is bűvös négyzet lesz. Egy ilyen bűvös négyzet látható a 10. ábrán.

96	11	89	68
88	69	91	16
61	86	18	99
19	98	66	81

10. ábra. Tükrös bűvös négyzet.

6.2. Dominókból álló bűvös négyzet

A 11. ábrán egy 6×6-os bűvös négyzet látható, amely dominókból van összeállítva. A négyzetnek 13 a bűvös összege.



11. ábra. 6×6-os bűvös négyzet dominókból.

6.3. Bűvös négyzet a barcelonai Sagrada Familia katedrálison

A. Gaudi, a neves spanyol építész leghíresebb alkotásán a barcelonai Sagrada Familia katedrálison is találhatunk egy bűvös négyzetet. Korábban már mondtuk, hogy ha az 1–16 számokkal töltünk ki egy 4×4-es bűvös négyzetet, akkor a bűvös összeg 34 lesz. A 12. ábrán látható bűvös négyzetben a bűvös összeg 33 (utalva a krisztusi életkorra), de itt a benne szereplő számok között van ismétlődés.

12. ábra. 4×4-es bűvös négyzet a barcelonai székesegyházon.

6.4. Bolyai János bűvös négyzete

Kiss Elemér fedezte fel Bolyai János kéziratos hagyatékában, hogy legnagyobb magyar matematikusunk is foglalkozott bűvös négyzetekkel. Az általa megadott 3×3-as példát a 13. ábrán láthatjuk. Az x, y és b helyére bármilyen számokat is írunk, egy olyan bűvös négyzetet fogunk kapni, amelyben a bűvös összeg $3b$ lesz.

x	y	3b-x-y
4b-2x-y	b	2x+y-2b
x+y-b	2b-y	2b-x

13. ábra. Bolyai János által megadott bűvös négyzet.

Dénes József vette észre, hogy Bolyai bűvös négyzete szoros rokonságban van J. Chernick 1938-ban bizonyított tételével: Minden harmadrendű bűvös négyzet három változóval megszerkeszthető. Chernick az alábbi példa megadásával bizonyította tételét:

m+u	m-u-v	m+v
m-u+v	m	m+u-v
m-v	m+u+v	m-u

14. ábra. J. Chernick bűvös négyzete.

Láthatjuk, hogy ha ez utóbbi bűvös négyzetben elvégezzük az $m = b$, $u = x - b$ és $v = 2b - x - y$ helyettesítést, éppen Bolyai János bűvös négyzetéhez jutunk.

Az előbbiek alapján könnyen megoldhatók az alábbi feladatok, amelyek a Középiskolai Matematikai Lapokban lettek kitűzve. A feladatokat a megoldásuk nélkül közöljük. Aki kedvet érez hozzá, próbálja megoldani őket.

1. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy egy 3×3-as bűvös négyzetben az első sorban/oszlopban álló elemek négyzetösszege megegyezik a harmadik sorban/oszlopban álló elemek négyzetösszegével.

2. Feladat. Adjuk meg az alábbi táblázat elemeit úgy, hogy egy bűvös négyzetet kapjunk.

	a	
b		c

Köszönetnyilvánítás

Ezúton köszönöm Dr. Csendes Tibornak a Szegedi Tudományegyetem docensének, hogy a dolgozatot elolvasta és megjegyzéseivel segítette.

Irodalomjegyzék

[1] Bakos Tibor, Néhány bűvös négyzet a XX. századból, *Középiskolai Matematikai Lapok*, **1**: 1–5, 1989.

[2] Csákány Béla, *Diszkrét matematikai játékok*, Polygon, 1998.

[3] Kiss Elemér, Újabb kincsek Bolyai János hagyatékából, *Élet és Tudomány* 19, 2001. Elérhető a `http://www.sulinet.hu/eletestudomany.archiv/` címen is.

[4] Kőnig Dénes, *Mathematikai mulatságok*, Typotex Kft., 1. füzet, 33–42, 1991.

Szabó Péter Gábor
`pszabo@inf.u-szeged.hu`
SZTE, Számítástudomány Alapjai Tanszék,
6720, Szeged, Árpád tér 2.