A RENESZÁNSZ MATEMATIKA EGYIK LEGSZEBB EREDMÉNYE

Szabó Péter Gábor

PhD, egyetemi adjunktus,
SZTE Alkalmazott Informatika Tanszék
pszabo@inf.u-szeged.hu

Görög előzmények

A matematika az ókori görögök révén vált bizonyító, deduktív tudománnyá. Egyiptom és Mezopotámia matematikai tárgyú emlékei arról tanúskodnak, hogy az egyiptomi és babiloni matematikusoknak a felmerülő aritmetikai és geometriai feladatok megoldására csak afféle receptszerű, empirikus eljárásaik voltak. Egy számolási probléma kapcsán vagy például valamilyen terület, esetleg térfogat meghatározására vonatkozó kérdés során a talált megoldást feljegyezték, és gyakran táblázatokba foglalták az azonos típusú eredményeket. Sok érdekes matematikai feladattal meg tudtak birkózni, viszont nem végeztek olyan jellegű meggondolásokat, amelyek matematikai értelemben megmutatták, *bebizonyították* volna egy gondolatmenet helyességét, vagy általánosították volna a talált speciális megoldásokat. Számukra elég volt, ha a lejegyzett példák más hasonló feladatoknál eligazításként segítették őket. Egyiptom „kötélfeszítői" tudták, hogy a 3, 4 és 5 egységnyi oldalú háromszöggel derékszöget lehet kijelölni. Mezopotámiából előkerült olyan agyagtábla, amelyen számos további pitagoraszi számhármast is találtak. A Pitagorasz-tétel általános érvényességét azonban az ókori görögök bizonyították be elsőként.

A Kr. e. VI. században született görög matematika kezdeteiről keveset tudunk. Az első görög matematikusok munkásságáról csak későbbi forrásokból tájékozódhatunk, *Thalész* és *Pitagorasz* élete legendákkal átszőtt. Ki ne hallott volna a híres történetről, miszerint Thalész ámulatba ejtette az egyiptomi papokat azáltal, hogy egy földbe szúrt bot segítségével megmérte egy piramis magasságát, vagy arról, hogy Pitagorasz úgy megörült azóta róla elnevezett tételének megtalálásakor, hogy utána ököráldozatot mutatott be az isteneknek. Semmi bizonyosat nem lehet azonban e történetek hitelességéről tudni, még azt sem, hogy Pitagorasz adott-e egyáltalán bizonyítást a szóban forgó tételre. A derékszögű háromszögekre vonatkozó nevezetes összefüggés ránk maradt első igazolása *Euklidész* könyvéből való.

Euklidész *Sztoikheia* (Elemek) című klasszikus mesterműve Kr. e. 300 körül íródhatott. Az Alexandriában dolgozó Euklidész alakja szintén homályos, bár a sok évszázaddal később élt *Papposztól* és a még későbbi *Proklosztól* van néhány híradás róla. Nevét azonban ma mindenki ismeri, akit valaha is megérintett a matematika. Euklidész rendszerező munkája, az *Elemek* óriási hatással volt a tudományos gondolkodásra. Szerzője összegyűjtve és felhasználva elődei eredményeit, az akkor már régóta létező indirekt bizonyításnak és az axiomatikus módszernek alapján évszázadokig példaértékű felépítését adta a geometriának. Hasonlóképpen, a nagy geométer, *Apolloniosz* kúpszeletekről írott *Koniká*-ja az alexandriai rendszerező tudománynak szintén nagyon értékes alkotása volt. A görög matematika aranykorában azonban mindenek felett állt *Arkhimédész,* akit joggal az ókor legnagyobb tudósának is tartanak.

Az első matematikusoknál a tiszta elmélet és az alkalmazások még nem váltak külön. *Platón* azonban már csak kifejezetten a tiszta matematika mellett állt ki, azt tartotta egyedül művelésre érdemesnek, elutasítva a szabad emberhez nem méltó bajlódást a sok számolást igénylő alkalmazásokkal. Arkhimédész viszont gyönyörű példája a tudósnak, aki egyszerre kiválósága az elméleti matematikának, a fizikának és mellette a technikai alkalmazásoknak is. Ő az, aki még abba a problémába is úgy belefeledkezik, hogy a király koronája tényleg színaranyból van-e vagy esetleg csak valamiféle ötvözet, hogy amikor fürdés közben rájön a megoldásra, örömében rögvest azon csupaszon szalad Siracusa utcáin a királyhoz. Arkhimédész matematikai munkásságának legértékesebb része azonban másfél évezreden keresztül mégsem fejtett ki közvetlen hatást, mivel nem volt, aki azt szellemileg befogadja. Például *A módszerről* című páratlan értékű írását a későbbi korok embere ahelyett, hogy tanulmányozta volna, inkább levakarta a pergamenről, hogy más, vallásos szöveget írjon rá.

Tudománytörténeti szempontból sem gyakori, hogy egy tudósnál nemcsak a kész eredményt, hanem a hozzá vezető utat is tanulmányozhatjuk. Arkhimédész *A módszerről* című munkájában betekintést engedett a műhelytitkaiba, igaz, alig egy évszázada ismerjük csak ezt az írását, amelyet egy palimpszeszten fedeztek fel. Nehéz más szót találni rá, mint, hogy gyönyörű a módszer, ahogyan egy mechanikai modellen keresztül jut el a felismeréstől a bizonyításig, és általa képes kiszámítani egy parabolaszelet területét vagy a gömb térfogatát. Az *Eudoxosz* által felfedezett kimerítési módszert, mely az ókori matematika csúcsteljesítménye volt, Arkhimédész tökéletesítette, és alkalmazta legeredményesebben. Kr. e. 212-ben Siracusa ostromakor az öreg tudóst leszúró római katona, ha nem is végső döfést adott az antik matematikának, mindenesetre lezárta annak egy olyan periódusát, amely majd csak évszázadokkal később a reneszánsz idején tör ismét felszínre a matematika történetében.

A matematika a középkori Európában és Keleten

A görög matematika alapvetően geometriai jellegű volt, még az algebrai és számelméleti gondolatok is geometriai köntösben jelentkeztek. Bár a görög geometriától az általános szabályok és képletek világa idegen volt, az *Aritmetika* című művében a III. században élt alexandriai *Diophantosz* már behatóan foglalkozott az egyenletek megoldásával, a számelméletben ma is nevét őrzik a diophantikus egyenletek. Az alexandriai matematikai életnek az államvallássá vált kereszténység vetett véget. *Hipátiát,* a kiváló matematikusnőt az alexandriai püspök által uszított tömeg 415-ben megölte, majd egy évszázad múlva, 529-ben *Justinianus* császár bezáratta az újjáalapított athéni akadémiát. A keresztény világból elűzött tudósok a Perzsa Birodalomban találtak új hazát.

A Római Birodalom bukása után a matematika fejlődése Perzsián át Indiába vezetett, onnan pedig arab közvetítéssel vissza Európába. A középkori Európa matematikáját inkább a tanulás jellemezte, mintsem az újat alkotás, eredményei nem haladták meg sem az ókori görögök, sem a Kelet matematikáját. A középkorban a görög matematikai irodalom jelentős részét arabra fordították, és az arab tudósok sokban tovább is fejlesztették az azokban foglaltakat. Az indiai matematika tízes helyi értékű írásmódja és trigonometriája arab közvetítéssel jutott el Európába, ahogyan a kereskedők révén az arab tudósok munkái mellett a görögök eredményeit is így ismerhették meg az európaiak. Mindez azonban a XII–XIII. században kezdődött el, a korai középkorban az európai matematika még alacsony színvonalon állt. A számolás szabályait sok helyen a középkor uralkodó filozófiai irányzata, a skolasztika megalapozójának, *Boethiusnak* az aritmetikakönyvéből tanulták. Mindenkor fontos volt, hogy az írástudók bizonyos egyházi ünnepnapok dátumát helyesen számítsák ki. A VIII. században élt angol szerzetes, *Alcuin* feladatgyűjteményét, a *Feladatok az ifjak elméjének élesítésére* című munkát szintén hosszú időn keresztül használták.

Az arabok hatására az algebra kezdett fokozatosan elválni a geometriától. Az arab matematika legnagyobb hatású munkája a VIII. és IX. század fordulóján élt *Al-Hvárizmi Al-kitáb al-muktaszár fi-hiszáb al-dzsabr valmukabala* (Rövid könyv a helyrerakásról és az összevonásról) című klasszikus könyve volt, amelynek címéből az *al-dzsabr*-ból származik az *algebra* szavunk. Al-Hvárizmi a negatív számokat még nem ismerte, így az első és másodfokú egyenleteknek hat különböző alaptípusát választotta szét, és megmutatta, hogy a különböző egyenletek hogyan vezethetők vissza a helyrerakás (al-dzsabr) és az összevonás (mukabala) segítségével ezekre az alapfeladatokra. Görög hatást mutat, hogy Al-Hvárizmi a megoldás geometriai igazolását is szükségesnek tartotta. A XI. és XII. század fordulóján élt perzsa *Omar Khajjam* még tovább fejlesztette az egyenletek megoldásának tudományát, ő már bizonyos harmadfokú algebrai egyenleteket is meg tudott oldani kúpszeletek segítségével. Az arabok a párhuzamossági problémát kivéve más elméleti jellegű geometriai problémával nemigen foglalkoztak, a síkbeli és gömbi trigonometriában azonban sok szép eredményt értek el, és pontos táblázatokat készítettek a különböző szögfüggvényekre.

Európában a XII. sz-ban indult meg az egyházi iskolák egyetemekké fejlődésének folyamata, Bologna után Párizs és Oxford egyetemei is megnyíltak. Az egyetemi oktatás igényelte a latin nyelvű tudományos fordításokat, így elkezdték a legfontosabb görög és arab nyelvű szövegeket átültetni latinra. Ekkor fordították először Euklidész geometriáját és Al-Hvárizmi algebráját is latinra.

A középkor legkiválóbb európai matematikusa a XII. és XIII. század fordulóján élt pisai *Leonardo* (ismertebb nevén *Fibonacci*) volt. Az arab világban kereskedőként tett utazásai során ismerkedett meg az algebrával és az indiai–arab számírás előnyeivel. Hazatérte után 1202-ben írta meg *Liber abaci* (Könyv az abakuszról) című korszakalkotó munkáját. Ilyen színvonalú könyvet az aritmetikáról és az algebráról több mint kétszáz évig nem írtak. Ebben a művében szerepel nevezetes feladata a nyulakról, melynek megoldása a

Fibonacci-sorozatra vezet. A Fibonacci-sorozat képzése egyszerű: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,… és így tovább, minden szám az előtte lévő két szám összege. A sorozat ma is olyan népszerű, hogy külön folyóirat, a *Fibonacci Quarterly* közli a vele kapcsolatos új eredményeket. A továbbiak szempontjából fontosnak tartjuk megjegyezni, hogy egy alkalommal, amikor a palermói tudós, *Magister Johannes* nehezet akart kérdezni Fibonaccitól, egy harmadfokú egyenlet megoldását adta fel neki problémaként. Ennek a feladatnak általános megoldásával azonban akkor még senki sem boldogult, bár éppen Fibonacci volt az, aki megmutatta, hogy az

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

egyenlet megoldásai nem fejezhetők ki euklideszi irracionálisokként (vagyis

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}$$

formában). Ez abban a korban rendkívül szokatlan kérdésfelvetés és eredmény volt.

A XIV. század két matematikusa, *Thomas Bradwardine* és *Nicholas Oresme* már egy új korszak előhírnökei voltak. Bradwardinenak önálló matematikai eredménye nem volt ugyan, de a *continuumról* és az *infinitumról* vallott nézetei olyan skolasztikus vitákat indítottak el, amelynek hullámai továbbgyűrűztek a későbbi évszázadokba is. A francia Oresme továbbvitte Bradwardine munkáit, eljutott a törtkitevőjű hatványokkal végzett műveletek szabályaihoz, és közel jutott a derékszögű koordináta-rendszer fogalmához is.

A matematika a reneszánsz korában

A XV–XVI. században az európai matematikában is újjászületés történt. A könyvnyomtatás feltalálásával megjelentek az első matematikai tárgyú nyomtatott könyvek: 1482-ben Velencében az euklidészi *Elemek* latin fordítása, majd Appoloniosz *Konikája* és Diophantosz *Aritmetikája.* Számos ún. aritmetika (számtankönyv) is napvilágot látott, amely a számolás új szabályait igyekezett elmagyarázni olvasóinak. Érdekességként megjegyezzük, hogy a magyar szerzőtől származó első nyomtatott matematikakönyv is egy aritmetika volt: *Magister Georgius de Hungaria* (Magyarországi György mester) *Arithmetice summa tripartita* (Az aritmetika három részből álló foglalata) című latin nyelvű munkája 1499-ből, amely Hollandiában jelent meg. Nemcsak a kereskedők igényelték az ilyen jellegű munkákat, hanem, ahogyan György mester is írja könyvének elején, munkáját papok figyelmébe is ajánlja, mivel olyan feladatot is tárgyal, amelyből kiderül, hogy a kanonokok és a káplánok miként osztozzanak az eklézsia jövedelmén. Az észak-itáliai, a dél-német és a francia kereskedelmi városok céheiben dolgozó ún. számolómesterek számára szintén fontos volt, hogy az indiai–arab számjegyekkel való számolásban otthonosan mozogjanak. A matematika a reneszánsz idején kezdett egyre inkább eltávolodni a filozófiától, és közeledett a természettudományok és az alkalmazások felé.

A XV. század közepén *Regiomontanus* (1436–1476) munkásságával új fejezet kezdődött a matematika történetében. Regiomontanus neve eredetileg *Johannes Müller* volt, latinos neve Königsbergre utal, mivel a mellette fekvő Unfindenben született. „Magyar nevén” úgy is szoktunk rá emlékezni, mint *Királyhegyi Jánosra,* hiszen Budán is járt Mátyás király meghívására, hogy rendezze az idekerült görög kéziratokat. Itt tartózkodása alatt egy ideig a pozsonyi egyetemen tanított, és egy csillagászati könyvet is írt.

Regiomontanus fő műve a *De triangulis omnimodis libri quinque* (Öt könyv mindenféle háromszögekről) címet viselte. Ebben a munkájában Regiomontanus először függetlenítette a trigonometriát a csillagászattól. Európában ez volt az első ilyen munka, innen szokás a trigonometriát a matematika külön ágaként tekinteni. (Megjegyezzük, hogy az arab matematikában *Naszíraddin at-Túszi* már a XIII. században megtette ezt, de eredményei nem jutottak el Európába.)

Több matematikatörténész is úgy gondolja, hogy a görögök után Regiomontanusnál jelent meg elsőként optimalizálási, vagyis szélsőérték-számításra vezető feladat a matematikai irodalomban. Regiomontanus kiterjedt levelezést folytatott. Egyik levelében az alábbi maximalizálási problémát írta meg *Christian Roder* erfurti professzornak 1471-ben: *A talaj mely pontjáról látszik egy függőlegesen felfüggesztett rúd a leghosszabbnak, vagyis melyik pontból lesz a legnagyobb a látószöge?* Regiomontanus megoldása nem ismeretes, a feladat azonban ma is kellemes probléma lehet középiskolások számára. Levelezésében az algebrát geometriai feladatra alkalmazó problémái közül akadt, amelyik harmadfokú egyenletre vezetett, azonban ennek megoldásával nem tudott megbirkózni.

Regiomontanus[1] találta meg az ötödik *tökéletes számot.* Egy pozitív egész számot tökéletesnek nevezünk, ha az megegyezik a nálánál kisebb osztóinak összegével (pl. a 6 tökéletes szám, mert 6=1+2+3). Euklidész az *Elemekben* megmutatta, hogy ha p olyan prímegész szám, amelyre $2^p - 1$ is prím, akkor a $2^{p-1}(2^p-1)$ tökéletes szám. Az ókori görögök négy tökéletes számot ismertek, ezek a 6, 28, 496 és a 8128. Az ötödiket Regiomontanus találta, ez a 33 550 336. Jelenleg negyvennégy tökéletes számot ismerünk, számítógépek segítségével ma is folyik a kutatás újabbak után. Több mint kétezer éve azonban senki nem tudja, hogy vajon véges vagy végtelen sok tökéletes szám van-e, illetve, hogy van-e páratlan tökéletes szám. Euklidész előbbi „formulája", amint könnyen belátható, csak párosat tud előállítani.

A XV–XVI. század fordulójának nagy matematikai enciklopédiája *Luca Pacioli* (1445–1514) *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni e Proportionalità* (Az aritmetikának, geometriának, mértékeknek és aránylataiknak foglalata) című, olasz nyelvű összefoglalása volt. A könyvben a már említett tökéletes számokról az szerepel, hogy azok csak 6-ra vagy 8-ra végződhetnek, mert míg a szánalomra méltók rendetlenül élnek, a jók és tökéletesek megtartják az előírt rendet.

Pacioli summázatában már egy szórövidítésekből álló algebrai jelrendszerrel is találkozhatunk, ahol az ismeretlennek külön jele van. A könyv sok érdekes feladatot tárgyal a félbemaradt kockajáték során való igazságos pénzelosztástól a különböző geometriai, például körpakolási feladatokig. Pacioli nagy figyelmet szentel a kettős könyvelés ismerte-

1. kép • Jacopo De Barbari: Luca Pacioli

[1] Regiomontanus életéről és munkásságáról lásd még Barlai Katalin tanulmányát – *a szerkesztő megjegyzése*

tésére is. Munkájának egy része magyarul is napvilágot látott *Könyves Tóth Kálmán* fordításában. Az eredeti könyv 1494-es kiadásának fakszimile változatát a megjelenés 500. évfordulóján Magyarországon újból kiadták.

Pacioli az algebrára az *ars magna,* a „nagy művészet” megnevezést használja, elkülönítve az algebrát az aritmetikától. A könyv végén azt írja, hogy a harmadfokú egyenletek megoldásához „még nem létezik az algebra művészetében módszer, mint ahogy nem létezik a kör négyszögesítésének módszere sem”.

Luca Pacioli írta, barátja *Leonardo da Vinci* kérésére a *De divina proportione* (Az isteni arányosságról) című munkáját, amely az *aranymetszés* nyomán kapta a címét. Az aranymetszés arányának meghatározása a következő probléma megoldását jelenti: osszunk fel egy szakaszt két részre úgy, hogy a rövidebb szakasznak a hosszabbhoz vett aránya megegyezzen a hosszabb szakasznak a teljes szakaszhoz viszonyított arányával. Ezzel a kérdéssel és ennek az „isteni aránynak” az alkalmazásával a művészetben az ókori görögök kezdtek el foglalkozni. Luca Pacioli is Euklidész *Elemei* nyomán tárgyalta a kérdést, amely a reneszánsz művészetben nagy szerephez jutott. A könyv számára Leonardo da Vinci rajzolta meg annak poliéder-ábráit, cserében a matematikus szerzetes kiszámolta Leonardónak, hogy mennyi fémre van szüksége egy lovas szobor elkészítéséhez. Leonardo maga is szerette a matematikát, egy helyen így írt: „Aki nem matematikus, az ne olvasson engem, mert én az vagyok mindenkor az elveimben”.

A festészetben az aranymetszésen kívül persze sokkal fontosabb dolog is megjelent a reneszánsz idején. A festők ekkor találtak rá egy a valóság látszatát keltő ábrázolási módra: a *perspektívára.* A módszer lényege az volt, hogy a képen a párhuzamosoknak egy pontban, az ún. *eltűnési pontban* kellett metszeniük egymást, és a különböző irányú párhuzamosok metszéspontjainak a horizontális vonalba kellett esniük. Ennek eredményeként olyan képeket tudtak festeni, hogy a festményről megállapíthatóvá váltak a tárgyak tényleges térbeli elhelyezkedési viszonyai. A képszerkesztés festő-geométer mesterei között *Pierro della Francesca* műve lett a legismertebb összefoglalója a perspektívatannak.

A harmadfokú egyenlet megoldása

A reneszánsz matematika egyik legszebb eredménye annak megmutatása volt, hogy van általános megoldó eljárás a harmadfokú egyenletek gyökeinek algebrai meghatározására. Ez meghaladta mind az antik, mind a keleti tudósok ismereteit.

Elsőfokú egyenleten az $ax + b = 0$ alakú egyenletet értjük, ahol $a \neq 0$. A megoldása egyszerű: $x = - b / a$. A másodfokú egyenlet alakja $ax^2 + bx + c = 0$ ahol $a \neq 0$. Megoldásai az

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

megoldóképlet alapján határozhatók meg. Ezt minden középiskolás diák tudja (vagy legalábbis tudnia kellene). Ma azonban természetesnek veszünk sok olyan matematikai ismeretet is, amelyek kikristályosodásához és természetessé válásához valójában hosszú időnek kellett eltennie.

Kezdjük azzal, hogy a negatív számokat Európa matematikája sokáig nem is ismerte, ahogyan az arabok sem használták őket. Meg kellett barátkozni ezekkel a korai hivatkozásokban, hol „fiktív”, hol „abszurd” számoknak nevezett, hiányt jelölő értékekkel, amiket még *Descartes* is „hamis” számoknak nevezett, bár azért már számolt velük. Tehát a reneszánsz idején az $ax + b = 0$ egyenlet inkább így jelent volna meg: $ax = b$, ahol a és b pozitív számok. Így jelent volna meg, ha lett volna „betűszámtan". Persze kezdetben még az sem volt, fel kellett előbb találni. Nagyon fontos ezért a francia *François Viéte* (1540–1603) munkássága, aki bevezette a betűegyütthatókat és kidolgozta az algebrai mennyiségekkel való számolás szabályait. Ő az ismeretleneket magánhangzókkal, az ismert mennyiségeket mássalhangzókkal jelölte. Érdemes megjegyezni azt is, hogy a megoldó eljárások nagyon sokáig geometriai és nem algebrai megfogalmazásban jelentek meg. Ez vezethetett oda, hogy a negyedfokú algebrai egyenlettel voltak, akik nem is foglalkoztak, hiszen a másodfokú egyenletek a területszámítással, a harmadfokú a térfogatszámítással hozhatók kapcsolatba, de mit jelentsen egy negyedfokú egyenlet?

A másodfokú egyenlet általános megoldóképlete tulajdonképpen egy eljárás, algoritmus, amelynek segítségével a gyökök kiszámolhatók az egyenlet együtthatói *(a, b, c),* a négy alapművelet és a gyökvonás véges számú alkalmazásával. A harmadfokú, vagyis az $ax^3 + bx^2 + cx = 0$ alakú egyenletre $(a \neq 0)$ hasonló általános megoldó eljárás azonban még a XV. század végén sem volt ismeretes. Bizonyos speciális eseteit meg tudták oldani, de olyan módszert, amelyet minden esetben sikerrel lehetett volna alkalmazni, nem ismert senki. A keleti matematika is csak speciális eseteivel tudott megbirkózni, pedig sok matematikus találkozott valamilyen feladat kapcsán azzal, hogy végül meg kellett volna oldania egy harmadfokú egyenletet. Persze kérdés az is, hogy mit jelent *megoldani* egy egyenletet. Sokáig ez azt jelentette, hogy meg kellett *szerkeszteni* a megoldást. Az ókori görögöknél egy matematikai mennyiség létezése annak megszerkeszthetőségét jelentette. Már náluk is felmerült olyan probléma, amelynek megoldása harmadfokú egyenlet gyökének megszerkeszthetőségét igényelte volna. Ilyen volt például a kockakettőzés problémája, vagyis adott kocka térfogatának duplájával megegyező kocka oldalhosszának megszerkesztése. Az csak a XIX. században derült ki, hogy ez körző és vonalzó segítségével megoldhatatlan feladat.

A reneszánsz idején többször előfordult, hogy a matematikában és a számolás terén járatosak matematikai párviadalokat vívtak. Ezek afféle matematikai lovagi tornák voltak, ahol az ellenfelek harmadfokú egyenleteket kaptak, és az volt a nyertes, aki meg tudta oldani az ellenfelei problémáit. Mivel általános megoldó eljárást nem ismert senki, így ezek a „matematikus lovagok" gyakran valamilyen egyedi ötlettel próbálkoztak.

A harmadfokú egyenletekre vonatkozó általános megoldást talán *Scipione del Ferro* (1465–1526), a bolognai egyetem professzora találta meg először. Ferro az $x^3 + ax = b$ alakú egyenletek megoldására vonatkozó eredményét azonban titokban tartotta, csak élete vége felé vejének és egyik tanítványának *Antonio Maria Fiorénak* árulta el. Fiore a titok birtokában 1535-ben matematikai párbajra hívta ki *Tartagliát* (1499/1500–1557). Tartaglia eredeti neve *Niccolò Fontana* volt, aki egy gyerekkori gégesérülése miatt kapta a Tartaglia (dadogós) csúfnevet.[2] Tartaglia tapasztalt volt a matematikai párbajokban. Kezdetben nagy önbizalommal fogott hozzá Fiore feladataihoz, mivel azok az előbb említett típusú nehéz egyenletekhez tartoztak, amelyek-

[2] A fizika terén végzett tevékenységével *Kovács László* tanulmánya foglalkozik cikkgyűjteményünkben – *a szerkesztő megjegyzése.*

ről úgy gondolta, hogy maga Fiore sem tudja megoldani őket. Ahogyan azonban közeledett az ötvennapos határidő lejárta (ekkor kellett leadni a megoldásokat), Tartaglia arról értesült, hogy Fiore állítólag birtokában van egy általános módszernek, amelylyel tetszőleges harmadfokú egyenletet meg tud oldani. Tartaglia e hír hallatán nagy ambícióval vetette bele magát a munkába, hogy ő is rájöjjön a titok nyitjára. Tartagliának nyolc nappal a határidő lejárta előtt sikerült megtalálnia az általános megoldó eljárást, és le is győzte ellenfelét a viadalon, aki egyébként Tartaglia egyetlen feladatát sem tudta megoldani.

Tartaglia ezután természetesen maga is titokban tartotta az új eredményt mindaddig, amíg *Girolamo Cardano* (1501–1576) ki nem csalta tőle. Cardano kora egyik leghíresebb orvosa volt, szabad idejében azonban sok minden mással, így matematikával is foglalkozott. Nagyon sok könyvet írt, melyek egy része nyomtatásban megjelent, más részük

2. ábra • Niccolò Fontana (Tartaglia)

kéziratban maradt meg, megint más részük megsemmisült.

Cardano 1539-ben fejezte be első matematikai témájú könyvét a *Practica arithmetica generalis* (Az általános aritmetika gyakorlata) című munkáját, és amikor megtudta, hogy Tartaglia birtokában van a „nagy titoknak", szerette volna módszerét a könyvében megírni. *Gingyikin* magyarul is megjelent matematikatörténeti munkájában szó szerint is olvashatjuk Cardanónak ekkor Tartagliához intézett szavait (igaz, a szerző megjegyzi, hogy ezek Tartaglia feljegyzéseiből kerültek elő, amelyek tartalmát Cardano kiváló tanítványa, *Lodovico Ferrari* nem mindenben erősítette meg): *„Esküszöm Önnek az Úr Szent Evangéliumára, és nem csak egy igaz ember szavát adom Önnek, hogy soha nem publikálom az Ön felfedezését, ha rám bízza, de ígérem azt is, és legyen igaz keresztény lelkiismeretem az Ön biztosítéka, hogy oly módon titkosítom, hogy halálom után senki sem tudja majd elolvasni a feljegyzetteket. Ha Ön úgy gondolja, hogy megérdemlem a bizalmat, akkor tegye meg nekem ezt a szívességet, ha pedig nem, akkor fejezzük be ezt a beszélgetést."*

Tartaglia erre állítólag így reagált: *„Ha nem fogadnám el az Ön esküjét, akkor természetesen rászolgálnék arra, hogy istentagadónak tartsanak."*

Tartaglia elárulta módszerét, sőt megoldását egy latin vers formájában adta át Cardanónak. Megnyugtató volt a számára, hogy Cardanónak az újonnan megjelent következő könyvében tényleg nem szerepelt a harmadfokú egyenlet megoldása. Tudni kell azonban még azt is, hogy Tartaglia a megoldóképletet mindennemű bizonyítás nélkül adta át Cardanónak, aki aztán sok energiát fektetett annak ellenőrzésébe. Ez az akkori matematikai írásmód mellett korántsem volt triviális feladat. Cardano rengeteget dolgozott azon, hogy teljes egészében tisztázza a harmadfokú egyenletek megoldásának módszerét, és – lássanak csodát! – néhány év múlva egyik új könyvében mégis publikálta azt.

1545-ben jelent meg Cardano *Artis magnae, sive de regulis algebraicis, liber unus* (A nagy művészet, vagyis az algebra szabályairól) című nagy, matematikatörténeti jelentőségű munkája, amelyet röviden csak úgy szoktunk emlegetni, hogy az „Ars magna". A könyv az *általános* harmadfokú egyenletek megoldása mellett a negyedfokúakkal is foglalkozott, amelyek megoldására Ferrari eredményeit is megtaláljuk a könyvben.

Vázlatosan nézzük meg, hogyan is oldotta meg Cardano az $x^3 + ax = b$ egyenletet. Rögtön az elején megjegyezzük, hogy nem így, ahogyan most fogjuk tárgyalni, ez csak ötletében egyezik meg Cardano módszerével, nála a geometria nyelvén volt megfogalmazva az a megoldás, amelyet mi a mai algebrai szimbolikával ismertetünk.

Keressük a megoldást $x = \beta - \alpha$ alakban. Ekkor $x + \alpha = \beta$, amit harmadik hatványra emelve $x^3 + 3x^2\alpha + 3x\alpha^2 + \alpha^3 = \beta^3$ adódik. Ám az előbbi egyenlet $x^3 + 3\alpha\beta x = \beta^3 - \alpha^3$ alakra hozható, felhasználva, hogy $3x^2\alpha + 3x\alpha^2 = 3x\alpha\beta$. Összehasonlítva a kapott egyenletet a kiindulásival, most az mondjuk, hogy az adott (a,b) számpárhoz találjunk olyan (α,β) számpárt, hogy teljesüljenek a $3\alpha\beta = a$ és $\beta^3 - \alpha^3 = b$ egyenlőségek, vagy ami ezzel egyenértékű, a

$$\beta^3 (-\alpha^3) = \frac{a^3}{27} \quad \text{és a} \quad \beta^3 + (-\alpha^3) = b$$

egyenletek. A másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói közti összefüggés alapján, viszont ez azt jelenti, hogy a β^3 és $-\alpha^3$ és a számok az

$$y^2 - by - \frac{a^3}{27} = 0$$

az egyenlet megoldásai kell hogy legyenek. Vagyis a feladatot visszavezettük egy másodfokú egyenlet megoldására, tehát

$$\beta^3 = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}} \quad \text{és} \quad -\alpha^3 = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}$$

feltéve, hogy $\beta > \alpha$. Az eredeti egyenlet egy megoldása így

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$$

A fentiekben csak a gondolat széléből érzékeltettünk valamicskét. Az általános harmadfokú egyenlet megoldásakor számos fontos részletkérdés merült itt még fel, amelyek során Cardano nemcsak negatív, hanem komplex számokkal is számolt.


HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cosa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam septuaginta euaserint. Neque solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aūt librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarentur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

3. ábra • Cardano *Ars Magna* című könyvének címlapja

A harmadfokú egyenletek megoldásának fenti története a valóságnak egy gyakorta mesélt lehetséges változata. Egyes matematikatörténészek szerint a dolog azonban egészen másképpen történt. Annak kiderítése, hogy mi az igazság, még további kutatásokat igényel, feltéve, ha egyáltalán valaha is kiderül. Ma mindenesetre az egyetemeken a harmadfokú egyenlet megoldóképletét Cardano formulájaként szokás emlegetni.

A harmad- és negyedfokú egyenletek megoldhatósága azonban újabb kérdést vetett fel a matematikusoknak: mi a helyzet az ötödfokú egyenlettel? Ott is van megoldóképlet? Ennek tárgyalása azonban már messzire vezetne bennünket, egészen a XIX. századig, amikor is *Niels Henrik Abel* és *Paolo Ruffini* megmutatták, hogy ott már reménytelen általános gyökképletet találnunk, mert biztosan nem létezik olyan. Sőt, semmilyen 4-nél magasabb fokú esetben sincs. Bizonyos speciális egyenletekre persze van algebrai megoldás, csak minden esetben használható gyökképlet nincs. Azt, hogy melyekre van és melyekre nincs, azt a Galois-elméletből tudhatjuk meg. De az már egy másik történet.

Kulcsszavak: *algebra, geometria, harmadfokú egyenlet, matematikatörténet, Cardano, Luca Pacioli, Regiomontanus, Tartaglia*

IRODALOM

Filep László (1997): *A tudományok királynője* (A matematika fejlődése).Typotex–Bessenyei, Budapest–Nyíregyháza

Gingyikin, Szemjon Grigorjevics (2004): *Történetek fizikusokról és matematikusokról.* (2. javított kiadás) Typotex, Budapest

Juskevics, A. P. (1982): *A középkori matematika története*, Gondolat, Budapest

Luca Pacioli (1494): *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni e Proportionalità* (Az aritmetikának, geometriának, mértékeknek és aránylataiknak foglalata). Velence. A könyv fakszimile változatban 1994-ben jelent meg a Balassi Kiadónál.

Szénássy Barna (2008): *A magyarországi matematika története.* (3. átdolgozott kiadás), Polygon Könyvtár, Szeged

T. Tóth Sándor – Szabó Árpád (1988): *Matematikai műveltségünk keretei. Középkor és reneszánsz.* Gondolat, Budapest

Vekerdi László (1972): *A matematikai absztrakció történetéből*, Kriterion, Bukarest