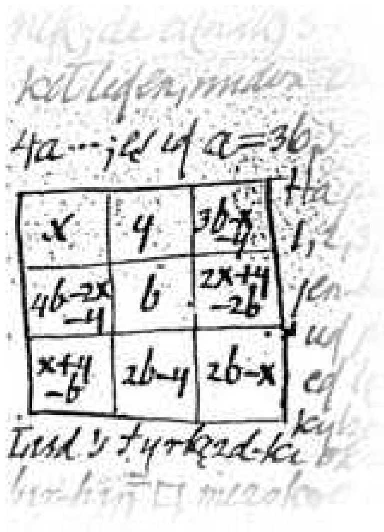
Bolyai János bűvös négyzetének egy általánosításáról

Szabó Péter Gábor

Bűvös négyzetnek nevezzük az olyan négyzetes számtáblázatot, amelyben minden sorban és oszlopban, valamint a két átlóban álló elemek összege azonos. Ezt a konstans értéket szokás ,,bűvös összegnek" is mondani. Bolyai János Marosvásárhelyen őrzött kéziratos hagyatékában Kiss Elemér Bolyai-kutató egy 3×3-as nem szokványos bűvös négyzetet talált [2]. Bolyai bűvös négyzetének érdekessége, hogy benne három szabadon választható érték x, y és b segítségével határozhatjuk meg a többi elemet (1. ábra). A kéziratlapjának végén Bolyai felveti, hogy általánosítsuk az előbbi 3×3-as bűvös négyzetet tetszőleges $n \times n$-es négyzetre. Ennek egy lehetséges módját itt mutatjuk.



1. ábra. Bolyai János bűvös négyzete.

Tekintsük az alábbi olyan $n \times n$-es számtáblázatot ($n \geq 3$), amelynek $n(n-2)$ elemét szabadon választhatjuk és ezen elemeket a b betűjellel, valamint a helyüknek megfelelő index-párral jelöljük. A többi $2n$ darab elemet a-val és a hozzá tartozó indexekkel jelöljük. Legyen továbbá B a táblázathoz tartozó bűvös összeg.

b_{11}	b_{12}	$\dots$	$b_{1,n-1}$	a_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$b_{n-2,1}$	$b_{n-2,2}$	$\dots$	$b_{n-2,n-1}$	$a_{n-2,n}$
$a_{n-1,1}$	$b_{n-1,2}$	$\dots$	$b_{n-1,n-1}$	$a_{n-1,n}$
a_{n1}	a_{n2}	$\dots$	$a_{n,n-1}$	a_{nn}

Számítsuk ki az a-val jelölt értékeket a b-vel jelölt szabadon választható elemek segítségével a következő módon:
1. lépés. Határozzuk meg az utolsó oszlop első $n-2$ elemét:

$$a_{in} = B - \sum_{j=1}^{n-1} b_{ij}, \text{ahol } (1 \leq i \leq n-2).$$

2. lépés. Határozzuk meg az utolsó sornak a 2.-tól az $(n-1)$-dik eleméig tartó értékeit:

$$a_{nj} = B - \sum_{i=1}^{n-1} b_{ij}, \text{ahol } (2 \leq j \leq n-1).$$

3. lépés. Határozzuk meg a bal alsó sarokban lévő elemet az a_{1n} segítségével, valamint az alapján, hogy az átlóban álló elemek összege B kell, hogy legyen:

$$a_{n1} = B - a_{1n} - \sum_{i=2}^{n-1} b_{i,n-i+1} = B - \left(B - \sum_{j=1}^{n-1} b_{1j} \right) - \sum_{i=2}^{n-1} b_{i,n-i+1} = \sum_{j=1}^{n-1} b_{1j} - \sum_{i=2}^{n-1} b_{i,n-i+1}.$$

4. lépés. Határozzuk meg az $a_{n-1,1}$ elemet az előbb kiszámolt a_{n1} felhasználásával:

$$a_{n-1,1} = B - a_{n1} - \sum_{i=1}^{n-2} b_{i1} = B - \sum_{j=1}^{n-1} b_{1j} + \sum_{i=2}^{n-1} b_{i,n-i+1} - \sum_{i=1}^{n-2} b_{i1}.$$

5. lépés. Határozzuk meg az $a_{n-1,n}$ elemet az előbbi $a_{n-1,1}$ segítségével:

$$a_{n-1,n} = B - a_{n-1,1} - \sum_{j=2}^{n-1} b_{n-1,j} = B - \left(B - \sum_{j=1}^{n-1} b_{1j} + \sum_{i=2}^{n-1} b_{i,n-i+1} - \sum_{i=1}^{n-2} b_{i1} \right) - \sum_{j=2}^{n-1} b_{n-1,j} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} b_{1j} - \sum_{i=2}^{n-1} b_{i,n-i+1} + \sum_{i=1}^{n-2} b_{i1} - \sum_{j=2}^{n-1} b_{n-1,j}.$$

Az eddigi lépések egyértelműek voltak abban az értelemben, hogy egyetlen számolási szabály generálta a soron következő új érték meghatározását. Ahhoz azonban, hogy a végeredményként adódó táblázat valóban bűvös négyzet legyen szükséges az is, hogy az utolsó lépésben kiszámolandó a_{nn} elem is egyértelmű legyen. A vizsgálat tárgyát itt az jelenti, hogy mivel az a_{nn} meghatározására három mód is kínálkozik, hiszen az utolsó oszlopban, az utolsó sorban, valamint az átlóban álló elemek összege is B, így fontos ellenőrizni, hogy az általunk vizsgált négyzetben a három számolási mód ugyanazt az értéket adja-e. Ez persze függeni fog a B értékétől, de pont ezek az egyenlőségek fogják magát a bűvös összeget is így meghatározni. Lássuk hát az utolsó lépést!

6. lépés. Határozzuk meg az a_{nn} elemet.
6.1 Az átlóban álló elemek alapján:

$$a_{nn} = B - \sum_{i=1}^{n-1} b_{ii}.$$

6.2 Az utolsó oszlopban álló elemek alapján (az $a_{n-1,n}$ elemet szándékosan külön írva):

$$a_{nn} = B - a_{n-1,n} - \sum_{i=1}^{n-2} a_{in} = B - \sum_{j=1}^{n-1} b_{1j} + \sum_{i=2}^{n-1} b_{i,n-i+1} - \sum_{i=1}^{n-2} b_{i1} + \sum_{j=2}^{n-1} b_{n-1,j} - \sum_{i=1}^{n-2} \left(B - \sum_{j=1}^{n-1} b_{ij} \right).$$

6.3 Az utolsó sorban álló elemek alapján (az a_{n1} elemet szándékosan külön írva):

$$a_{nn} = B - a_{n1} - \sum_{j=2}^{n-1} a_{nj} = B - \sum_{j=1}^{n-1} b_{1j} + \sum_{i=2}^{n-1} b_{i,n-i+1} - \sum_{j=2}^{n-1} \left(B - \sum_{i=1}^{n-1} b_{ij} \right).$$

A három számítás során kapott értékeknek azonosnak kell lennie. Ellenőrizzük először a 6.2 és 6.3 esetben kapottakat. Könnyen látható, hogy az első három tag

$$B - \sum_{j=1}^{n-1} b_{1j} + \sum_{i=2}^{n-1} b_{i,n-i+1}$$

azonos a két kifejezésben, tehát ezeket elhagyhatjuk. Igazolandó, hogy

$$-\sum_{i=1}^{n-2} b_{i1} + \sum_{j=2}^{n-1} b_{n-1,j} - \sum_{i=1}^{n-2} \left(B - \sum_{j=1}^{n-1} b_{ij} \right) = -\sum_{j=2}^{n-1} \left(B - \sum_{i=1}^{n-1} b_{ij} \right).$$

Mindkét oldalhoz adjunk $(n-2)B$-t:

$$-\sum_{i=1}^{n-2} b_{i1} + \sum_{j=2}^{n-1} b_{n-1,j} + \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=1}^{n-1} b_{ij} = \sum_{j=2}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} b_{ij}.$$

A baloldalon áll tehát

$$\sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=1}^{n-1} b_{ij} - \sum_{i=1}^{n-2} b_{i1} + \sum_{j=2}^{n-1} b_{n-1,j} = \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=1}^{n-1} b_{ij} - \sum_{i=1}^{n-2} b_{i1} + \sum_{j=1}^{n-1} b_{n-1,j} - b_{n-1,1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} b_{ij} - \sum_{i=1}^{n-2} b_{i1} - b_{n-1,1} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} b_{ij} - \sum_{i=1}^{n-1} b_{i1} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^{n-1} b_{ij},$$

ami így már látható, hogy egyenlő a jobb oldallal. Mivel a 6.1 esetben is ugyanezt kell, hogy kapjuk, mint a 6.2 és a 6.3 esetekben, így ez csak úgy következhet be ha

$$B-\sum_{i=1}^{n-1} b_{ii} = B-\sum_{j=1}^{n-1} b_{1j}+\sum_{i=2}^{n-1} b_{i,n-i+1}-\sum_{j=2}^{n-1}\left(B-\sum_{i=1}^{n-1} b_{ij}\right)$$

vagyis

$$B=\frac{1}{n-2}\left(\sum_{i=2}^{n-1} b_{ii}+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=2}^{n-1} b_{ij}-\sum_{i=1}^{n-1} b_{1i}+\sum_{i=2}^{n-1} b_{i,b-i+1}\right).$$

Az összegeket tanulmányozva egy kis egyszerűsítési lehetőségünk is van

$$B=\frac{1}{n-2}\left(\sum_{i=2}^{n-1} b_{ii}+\sum_{i=2}^{n-1}\sum_{j=2}^{n-1} b_{ij}+\sum_{i=2}^{n-1} b_{i,n-i+1}\right),$$

vagy még egyszerűbben

$$B=\frac{1}{n-2}\sum_{i=2}^{n-1}\left(b_{ii}+\sum_{j=2}^{n-1} b_{ij}+b_{i,n-i+1}\right).$$

Ellenőrzésként lássuk mit ad a bűvös összegre levezett általános formula a Bolyai János által is vizsgált $n=3$ esetben.

$$B=\frac{1}{n-2}\sum_{i=2}^{n-1}\left(b_{ii}+\sum_{j=2}^{n-1} b_{ij}+b_{i,n-i+1}\right)=b_{22}+b_{22}+b_{22}=3b_{22},$$

vagyis a 3×3-as bűvös négyzet esetén a táblázat közepén lévő szám háromszorosa adódik, ahogyan természetesen Bolyainál is (az ő jelöléseit használva $3b$). A bűvös összeg tanulmányozása további érdekes észrevételeket eredményezhet. Látható például, hogy B pontosan azoktól az elemektől függ, amelyek nincsenek a bűvös négyzet peremén, vagyis amely elemek indexei között nincs 1 és n.

Befejezésül megemlítjük, hogy Kiss Elemér Bolyai bűvös négyzetével kapcsolatosan azt is leírta [3], hogy Bolyai bűvös négyzetének közlése után Dénes József felhívta a figyelmét Jack Chernick egy 1938-ban bizonyított Bolyaiéhoz nagyon hasonló vizsgálatára [1]. Chernick a maga bűvös négyzetét abból a célból közölte, hogy megmutassa minden 3×3-as bűvös négyzet három változóval szerkeszthető. Vegyük észre, hogy ugyanezt Bolyai János is a maga bűvös négyzetének megadásával megmutatta, illetve a fentiek alapján éppen az ő példáját általánosítva azt is láthatjuk, hogy *minden $n\times n$-es bűvös négyzet $n(n-2)$ változóval szerkeszthető ($n\geq 3$).* Nem nehéz megmutatni, hogy $n(n-2)$ darab változó itt szükséges is az általános esetben. Chernick szintén eljutott ehhez az állításhoz, habár a bizonyításában az ő konstrukciója más mint a fenti.

References

[1] Jack Chernick, Solution of the general magic square, *Amer. Math. Monthly* 3(1938) 172-175.

[2] Kiss Elemér, *Matematikai kincsek Bolyai János kéziratos hagyatékából*, Akadémai és Typotex Kiadó, Budapest, 1999.

[3] Kiss Elemér, Újabb kincsek Bolyai János hagyatékából, *Élet és Tudomány* LVI. évf. 19. szám, 2001. május 11.

On a generalization of the magic square of János Bolyai

Péter Gábor Szabó

János Bolyai constructed a general 3×3 magic square using 3 variables. In this paper we presented a generalization of this result for the case $n \times n$ ($n \geq 3$). We proved that each magic square ordered n constructed by $n(n-2)$ variables. Our proof based on Bolyai's example and it is different from Chernick's proof.