

Közelítő és szimbolikus számítások haladóknak

6. előadás

Közelítések normált lineáris
terekben

Alapfeladat

Tekintsük a V normált lineáris térnek egy n dimenziós G alterét és rögzítsük G -nek egy $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ bázisát. Tegyük fel, hogy $f \in V$.

Feladatunk f -nek a **legjobb** $p = \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i$ alakú p^* közelítését meghatározni, amelyre a **közelítés hibája minimális**, vagyis

$$\|f - p^*\| \leq \|f - p\|$$

bármely $p \in G$ -re.

Alapkérdések

Vezessük be a következő jelölést: $E_G(f) = \inf \{ \|f - p\| \mid p \in G \}$.
Tehát p^* pontosan akkor lesz a legjobb közelítés, ha

$$E_G(f) = \|f - p^*\|.$$

A kitűzött feladattal kapcsolatos alapvető kérdések:

- Van-e olyan $p^* \in G$, amelyre $E_G(f) = \|f - p^*\|$?
- Egyértelmű-e p^* ?
- Milyen tulajdonságok jellemzik p^* -ot?
- Hogyan becsülhető $E_G(f)$?
- Praktikusan, milyen módon határozható meg p^* ?

Egzisztencia és unicitás

A legjobban közelítő elem egzisztenciája

Tétel. *A V normált lineáris tér tetszőleges f eleméhez létezik V -nek az n dimenziós G alterében f -et legjobban közelítő p^* elem.*

Bizonyítás.

$E_G(f)$ definíciójából következik, hogy megadható olyan G -beli elemekből álló $\{p_k\}$ sorozat, amelyre

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - p_k\| = E_G(f) .$$

A bizonyítás folytatása

A háromszög-egyenlőtlenséget felhasználva

$$\|p_k\| \leq \|f\| + \|f - p_k\|,$$

amiből következőleg a $\{p_k\}$ sorozat korlátos.

Vegyük a $p_k = \sum_{i=1}^n \beta_i^{(k)} g_i$ előállítást, és így a $\{\beta_k\} = (\beta_1^{(k)}, \beta_2^{(k)}, \dots, \beta_n^{(k)})$ korlátos vektorsorozatot, (a sorozat korlátos, mert $\left(\sum_{i=1}^n \beta_i^{(k)2}\right)^{1/2}$ vektornormát határozza meg, így a vektornormák ekvivalenciája miatt van olyan γ konstans, hogy $\left(\sum_{i=1}^n \beta_i^{(k)2}\right)^{1/2} \leq \gamma \|p_k\|$ és a $\{p_k\}$ sorozat korlátos).

A bizonyítás vége

A $\{\beta_k\}$ sorozat korlátossága miatt kiválasztható belőle egy konvergens részsorozat:

$$\beta_{k_l} \rightarrow \beta^*$$

Tekintsük a $p^* = \sum_{i=1}^n \beta_i^* g_i \in G$ elemet! Mivel a $\{p_{k_l}\}$ részsorozatra

$$\|p_{k_l} - p^*\| \rightarrow 0, \text{ így}$$

$$\|f - p^*\| \leq \|f - p_{k_l}\| + \|p_{k_l} - p^*\| \rightarrow E_G(f)$$

ahonnan adódik, hogy p^* az f -et legjobban közelítő elem.

Unicitás

Az általános esetben az unicitás nem garantált, így előfordulhat, hogy egy elemnek végtelen sok legjobb közelítése van.

Példa. Legyen $V = R^2$, $G = R^1 = \langle e_1 \rangle$ és $f = e_2$. Ha a $\|\cdot\|_\infty$ vektornormát használjuk, akkor f -nek végtelen sok legjobb közelítése van, hiszen tetszőleges $|\alpha| \leq 1$ mellett igaz, hogy

$$\|f - \alpha e_1\|_\infty = 1 = E_G(f).$$

Szigorúan normált lineáris tér

Definíció. *A V normált lineáris tér szigorúan normált, ha tetszőleges a zéró elemtől különböző f és h elemére az*

$$\|f + h\| = \|f\| + \|h\|$$

egyenlőségből következik, hogy a két elem lineárisan függő.

A legjobban közelítő elem unicitása

Tétel. *Ha a V lineáris tér szigorúan normált, akkor tetszőleges f -hez legfeljebb egy G -beli legjobban közelítő p^* létezik.*

Bizonyítás.

Tegyük fel, hogy f -hez két különböző legjobban közelítő elem létezik p^* és p^{**} . Ekkor a

$$q^* = 1/2(p^* + p^{**})$$

is legjobban közelítő elem lenne.

A bizonyítás folytatása

Valóban, ugyanis az f elemet legjobban közelítő elemek a G altér konvex részhalmazát alkotják. Ez könnyen látható, mivel, ha $\lambda \in [0,1]$, akkor

$$\begin{aligned} \| f - (\lambda p^* + (1-\lambda)p^{**}) \| &= \| \lambda(f - p^*) + (1-\lambda)(f - p^{**}) \| \leq \\ &\leq \lambda \| f - p^* \| + (1-\lambda) \| f - p^{**} \| = \\ &= \lambda E_G(f) + (1-\lambda)E_G(f) = E_G(f). \end{aligned}$$

A bizonyítás folytatása

Ekkor

$$\begin{aligned} E_G(f) &\leq \|f - q^*\| = \left\| f - \frac{1}{2}(p^* + p^{**}) \right\| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \|f - p^*\| + \frac{1}{2} \|f - p^{**}\| = E_G(f) \end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy teljesül az

$$\left\| \frac{1}{2}(f - p^*) + \frac{1}{2}(f - p^{**}) \right\| = \left\| \frac{1}{2}(f - p^*) \right\| + \left\| \frac{1}{2}(f - p^{**}) \right\|$$

egyenlőség. A tér szigorú normáltsága miatt

$$\frac{1}{2}(f - p^*) = \alpha \frac{1}{2}(f - p^{**})$$

A bizonyítás vége

$$\frac{1}{2}(f - p^*) = \alpha \frac{1}{2}(f - p^{**})$$

$$(1 - \alpha)f = p^* - \alpha p^{**}$$

A fenti egyenlőségéből következőleg

$$\alpha = 1,$$

vagyis
$$p^* = p^{**},$$

ami ellenkezik kiindulásunkkal.

Négyzetes közelítések

Euklideszi tér

Definíció. A V lineáris teret euklideszi térnek (vagy lineáris belsőszorzat-térnek) nevezzük, ha értelmezve van a tér tetszőleges f, h elemeinek $[f, h]$ belső szorzata, azaz van olyan $[\cdot, \cdot]: V \times V \rightarrow R$ leképezés, hogy

- (i) $[f, f] \geq 0$ és ha $[f, f] = 0$, akkor $f = 0$,
- (ii) $[f, h] = [h, f]$,
- (iii) $[f+g, h] = [f, h] + [g, h]$,
- (iv) $[\alpha f, h] = \alpha [f, h]$ tetszőleges α skalárra.

Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij egyenlőtlenség

Tétel. *Euklideszi térben tetszőleges f és h elemekre*

$$|[f, h]| \leq \sqrt{[f, f]} \sqrt{[h, h]}$$

Bizonyítás.

$$0 \leq [f - th, f - th] = [h, h]t^2 - 2t[f, h] + [f, f]$$

Az előbbi egyenlőtlenség minden t -re teljesül, ami csak úgy lehetséges, ha a t -re másodfokú függvény diszkriminánsa nem pozitív.

A bizonyítás vége

$$4([f, h])^2 - 4[f, f][h, h] \leq 0$$

$$[f, h]^2 \leq [f, f][h, h]$$

$$|[f, h]| \leq \sqrt{[f, f]} \sqrt{[h, h]}$$

Norma származtatása belső szorzatból

Tétel. Az $\|f\| = \sqrt{[f, f]}$ definícióval adott $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}^+$ leképezéssel V normált vektortér.

Bizonyítás.

- a) $\|f\| \geq 0$, és ha $\|f\| = 0$, akkor $f=0$ a belső szorzat (i) tulajdonsága miatt,
- b) $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$ a (iv) tulajdonság miatt,

A bizonyítás vége

c) a háromszög-egyenlőtlenség a Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij egyenlőtlenség segítségével bizonyítható.

$$\|f + h\|^2 = [f + h, f + h] = [f, f] + 2[f, h] + [h, h] \leq$$

$$\leq [f, f] + 2\|f\|\|h\| + [h, h] = (\|f\| + \|h\|)^2$$

$$\|f + h\| \leq \|f\| + \|h\|$$

Euklideszi tér

Tétel. *Minden euklideszi tér szigorúan normált.*

Bizonyítás. Ha f és g a tér két tetszőleges 0 -tól különböző eleme, akkor az alábbi egyenlőségek és egyenlőtlenségek teljesülnek:

$$\begin{aligned}\|f + g\|^2 &= [f + g][f + g] = [f, f] + 2[f, g] + [g, g] \leq \\ &\leq \|f\|^2 + 2|[f, g]| + \|g\|^2 \leq (\|f\| + \|g\|)^2\end{aligned}$$

Itt végig egyenlőségek viszont csak úgy állhatnak, ha f és g lineárisan függők.

„Geometriai” jellemzés a legjobban közelítő elemre

- Euklideszi terekben a p^* legjobban közelítő elemre „geometriai” jellemzés adható. Az euklideszi vektornormával ellátott vektortér esetében ez annak a szemléletes ténynek felel meg, hogy f -et legjobban éppen a G altérre való merőleges vetülete közelíti.

Tétel. *Legyen V tetszőleges euklideszi tér, G a V altere és f V -beli. A G -beli p^* akkor és csak akkor lesz f legjobb közelítése, ha*

$$[f-p^*, g]=0 \quad \text{bármely } G\text{-beli } g\text{-re.}$$

Bizonyítás/Szükségesség

Indirekt úton bizonyítunk. Legyen p^* legjobban közelítő elem. Tegyük fel, hogy van olyan $g \in G$, amelyre $[f - p^*, g] = \beta \neq 0$. Tegyük fel, hogy $\|g\| = 1$. Legyen $p^{**} = p^* + \beta \cdot g$. Ekkor

$$\begin{aligned} \|f - p^{**}\|^2 &= \|f - p^* - \beta g\|^2 = \\ &= [(f - p^*) - \beta g, (f - p^*) - \beta g] = \\ &= \|f - p^*\|^2 - 2\beta[f - p^*, g] + \beta^2 \|g\|^2 = \|f - p^*\|^2 - \beta^2 \end{aligned}$$

Ami ellentmondás, hiszen akkor p^{**} még jobb közelítés lenne.

Bizonyítás/Elégségesség

Tegyük fel, hogy $[f-p^*,g]=0$, bármely $g \in G$. Legyen $g=p^*+h$, valamilyen alkalmas G -beli h elemmel.

Ekkor

$$\begin{aligned}\|f - g\|^2 &= \|f - p^* - h\|^2 = \\ &= [(f - p^*) - h, (f - p^*) - h] = \\ &= [f - p^*, f - p^*] + [h, h] = \|f - p^*\|^2 + \|h\|^2\end{aligned}$$

Tehát valóban p^* adja a legjobb közelítést.

Két következmény

Következmény. *Egy euklideszi tér (lineáris belsőszorzat-tér) tetszőleges elemének pontosan egy legjobb közelítése létezik.*

Következmény. *A p^* elem pontosan akkor lesz f legjobb közelítése, ha*

$$[f - p^*, g_i] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Gram-mátrix

Ha $p^* = \sum_{k=1}^n \alpha_k g_k$, akkor az előbbi feltétel ekvivalens azzal, hogy az $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ vektor az alábbi **normálegyenletek** megoldása:

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k [g_k, g_i] = [f, g_i] \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

A rendszer alábbi mátrixát a $(g_1, g_2, \dots, g_n)$ bázishoz tartozó **Gram-mátrix**nak nevezzük.

$$G = \begin{pmatrix} [g_1, g_1] & [g_2, g_1] & \cdots & [g_n, g_1] \\ [g_1, g_2] & [g_2, g_2] & \cdots & [g_n, g_2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [g_1, g_n] & [g_2, g_n] & \cdots & [g_n, g_n] \end{pmatrix}$$

Észrevételek

- **Valós** V tér esetén a belső szorzat szimmetriájából következik, hogy G szimmetrikus, sőt az is bizonyítható, hogy pozitív definit mátrix. A közelítés hibájára ekkor az alábbi adódik: $(E_G(f))^2 = [f - p^*][f - p^*] =$

$$= [f, f] - [f, \sum_{k=1}^n \alpha_k g_k] = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n \alpha_k [f, g_k]$$

- Ha G valamely **ortonormált bázisára** írjuk fel a normálegyenleteket, akkor az együtthatómátrix az egységmátrix lesz. Ekkor $\alpha_i = [f, g_i]$. ($i = 1, 2, \dots, n$)
- Ha G egy **ortogonális bázisára** írjuk fel a normálegyenleteket, akkor

$$\alpha_i = \frac{[f, g_i]}{[g_i, g_i]}. \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Észrevételek

- Véges n dimenziós euklideszi terekre a legismertebb példákat az R^n terek adják, sőt bármely n dimenziós euklideszi tér izomorf R^n -nel.
- Az alkalmazások szempontjából legfontosabbak azok a **függvényterek**, ahol a tartóhalmaz elemei adott tulajdonságú függvények. Itt a belső szorzat fogalmát legtöbbször valamilyen integrálfogalomból vezetik le.

Példa. Vegyünk az $[a,b]$ intervallumon Lebesgue szerint négyzetesen integrálható függvények $L_2[a,b]$ terét. Két elem belső szorzatát az alábbi integrál adja:

$$[f(x), g(x)] = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Egyenletes konvergencia

Tétel. *Ha folytonos függvényekből álló $f_n(x)$ függvény sorozat egyenletesen tart $f(x)$ -hez $[a,b]$ -n, akkor teljesül az euklideszi térbeli konvergencia is:*

$$\|f - f_n\|_2^2 = \int_a^b (f(x) - f_n(x))^2 dx \rightarrow 0$$

- (Emlékeztető: (f_n) sorozatra azt mondjuk *egyenletesen konvergál* f -hez, ha minden pozitív ε -hoz létezik egy $n_0 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy minden $x \in D_f$ és minden $n \geq n_0$ -ra $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.)

Egyenletes közelítések

Csebisev-approximáció

- Az $f \in C[a, b]$ folytonos függvényt közelítjük egy rögzített $G = \langle g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x) \rangle$ altérben felírható $p(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i(x)$ alakú általánosított polinomokkal.
- A $C[a, b]$ -t azonban mint normált lineáris teret tekintjük a

$$\|g(x)\|_{\infty} = \max_{x \in [a, b]} |g(x)|$$

maximum- vagy más néven Csebisev-normával. Ezt a közelítést egyenletes vagy **Csebisev-approximáció**nak nevezik.

Unicitás

Példa. Az $f(x) \equiv 1$ és $g(x) = x$ függvények a $C[-1,1]$ tér elemei. Könnyű látni, hogy

$$2 = \|f(x) + g(x)\|_{\infty} = \|f(x)\|_{\infty} + \|g(x)\|_{\infty} = 1 + 1$$

viszont az f és g mégsem lineárisan függők, hiszen nem teljesül az $f(x) = \alpha g(x)$, vagyis a tér nem szigorúan normált.

Az unicitás pontosan a Haar-alterek esetében teljesül.

Alternáló sorozat

Definíció. Az $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} \leq b$ értékek az $f(x)$ függvény $p(x) \in G$ közelítésének $(n+1)$ tagú alternáló sorozatát alkotják, ha

$$\operatorname{sgn} e(x_{i+1}) = -\operatorname{sgn} e(x_i)$$

bármely $1 \leq i \leq n$, vagyis az $e(x) = f(x) - p(x)$ hibafüggvény a szomszédos helyeken mindig ellentétes előjelű. Az x_i -k optimális alternáló sorozatot határoznak meg, ha még

$$|e(x_i)| = \|e(x)\|_\infty$$

is igaz minden $1 \leq i \leq n+1$ -re.

Korlát a legjobb közelítés hibájára

Tétel (de la Vallée-Poussin). *Legyen a $p(x)$ közelítés egy tetszőleges alternáló sorozata*

Ekkor $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} \leq b.$

$$\min_{1 \leq i \leq n+1} |e(x_i)| \leq E_G(f) \leq \|e(x)\|_\infty$$

- Itt különösen az alsó korlát igen hasznos, mivel a segítségével meg tudjuk ítélni, hogy mennyire jó az adott közelítő függvény. A felső korlát következik $E_G(f)$ definíciójából.

Csebisev tétele

Tétel. A $p^*(x) \in G$ függvény pontosan akkor közelíti egyenletesen legjobban $f(x)$ -et, ha megadható hozzá olyan $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} \leq b$. alternáló sorozat, hogy $|e(x_i)| = \|e(x)\|_\infty$ minden $1 \leq i \leq n+1$ -re és

$$\operatorname{sgn} e(x_{i+1}) = -\operatorname{sgn} e(x_i) \quad 1 \leq i \leq n$$

Példa

Példa. Mi lesz az $f(x) \in C[a,b]$ folytonos függvényt az $[a,b]$ intervallumon egyenletesen legjobban közelítő konstans függvény?

Megoldás.

Csebisev tétele szerint az

$$\frac{1}{2} \left(\min_{x \in [a,b]} f(x) + \max_{x \in [a,b]} f(x) \right)$$

konstans függvény, ugyanis ennek van két optimális alternáló pontja: a és b .

Gyakorló feladatok

Gyakorló feladatok

- Igazoljuk, hogy egy normált lineáris tér akkor és csak akkor euklideszi tér, ha bármely f és h elemére teljesül a

$$\| f + h \|^2 + \| f - h \|^2 = 2(\| f \|^2 + \| h \|^2)$$

egyenlőség.

Gyakorló feladatok

- Igazoljuk, hogy az

$$\| \underline{x} \|_p = \sqrt[p]{\sum_{j=1}^n |x_j|^p} \quad p > 1$$

normával ellátott R^n lineáris tér akkor és csak akkor lineáris belsőszorzat-tér, ha

$$p = 2.$$

Gyakorló feladatok

- Határozzuk meg az $f(x)=\ln(x+1)$ valós függvényt a $[-0.5,0.5]$ intervallumon egyenletesen legjobban közelítő elsőfokú polinomot.

Irodalomjegyzék

- John H. Mathews, *Numerical Methods for Mathematics, Science, and Engineering*, Second Edition, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1992.
- Mihálykó Csaba – Virágh János, *Közelítő és szimbolikus számítások. Feladatgyűjtemény*, Typotex, 2011.
- Virágh János, *Numerikus matematika*, JATEPress, Szeged, 1997.