Közelítő és szimbolikus számítások haladóknak

5. előadás

Interpolációs függvényközelítések

Általánosított interpoláció

Problémafelvetés

- A Lagrange-interpolációs formula:

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i L_i(x)$$

ahol $L_i(x) = \dfrac{(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$.

- Hogyan írható fel a megoldás, ha a folytonos függvények C[a,b] terének egy véges dimenziós $< g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x) >$ alterében keresünk hasonló közelítő függvényt?

Általánosított interpolációs polinom meghatározása

Tekintsük az alábbi páronként különböző **interpolációs alappontokat**

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a,b]$$

és $f_1, f_2, \ldots, f_n$ függvényértékeket.

Határozzunk meg olyan

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i(x)$$

általánosított interpolációs polinomot, amely eleget tesz a

$$p(x_i) = f_i \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

interpolációs feltételeknek.

Speciális eset

- Az előbbi problémafelvetésben a Lagrange-interpoláció annak a speciális esetnek felel meg, amikor a legfeljebb n-1-ed fokú polinomok

$$< 1, x, \ldots, x^{n-1} >$$

alterében keressük a megoldást.

- Milyen tulajdonságok jellemzik az interpolációra alkalmas altereket?

Haar-altér

Definíció. *A G n dimenziós alteret* <u>*Haar-altérnek*</u> *nevezzük, ha bármely* $p(x) \in G$, *nem azonosan 0 általánosított polinomnak legfeljebb n-1 zérushelye van [a,b]-ben.*

- Haar Alfréd (1885-1933) magyar matematikus, a szegedi matematikai iskola egyik megalapítója volt.

Csebisev-féle függvényrendszerek

Definíció. *A Haar-altér bázisait Csebisev-féle függvényrendszereknek nevezzük*.

Példa Csebisev-féle függvényrendszerekre:

- az $\{1, x, ..., x^{n-1}\}$ hatványfüggvény-rendszer,
- az $\{1, e^{x}, ..., e^{(n-1)x}\}$ exponenciális függvényrendszer,
- az $\{1, \sin x, \cos x, ..., \sin(n-1)x, \cos(n-1)x\}$ trigonometrikus függvényrendszer a $[0, 2\pi)$ intervallumon.

Átfogalmazás

- A Haar-alteret úgy is definiálhattuk volna, hogy G *Haar-altér*, ha tetszőleges

$$< g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x) >$$

bázisát véve az ezzel felírt tetszőleges nem azonosan 0

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i(x)$$

alakú általánosított polinomnak legfeljebb n-1 zérushelye van [a,b]-ben.

Haar-mátrix

Definíció. *A G altér* $\{q_1(x), q_2(x), ..., q_n(x)\}$ *függvényeihez és az* $x_1, x_2, ..., x_n \in [a, b]$ *pontokhoz tartozó* *<u>Haar-mátrixon</u>* *a*

$$H = \begin{pmatrix} q_1(x_1) & q_2(x_1) & \dots & q_n(x_1) \\ q_1(x_2) & q_2(x_2) & \dots & q_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_1(x_n) & q_2(x_n) & \dots & q_n(x_n) \end{pmatrix}$$

mátrixot értjük.

Az általánosított interpolációs feladat megoldása és a Haar-altér

Tétel. *A* $G \subseteq C[a,b]$ *n dimenziós altérre a következő három állítás ekvivalens:*

(i) G Haar-altér.

(ii) G bármely $\{g_1(x), g_2(x), ..., g_n(x)\}$ *bázisához és tetszőleges* $x_1, x_2, ..., x_n \in [a,b]$ *alappontokhoz tartozó Haar-mátrix reguláris.*

(iii) Az általánosított interpolációs feladat tetszőleges alappontok és tetszőleges függvényértékek esetén egyértelműen megoldható.

Bizonyítás

Bizonyítás. $i) \Rightarrow ii)$

Legyen a $\{g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)\}$ bázisban felírt

$$\overline{p}(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i(x)$$

általánosított polinomnak *n* különböző zérushelye $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ekkor

$$\overline{p}(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i(x_j) = 0. \quad (1 \leq j \leq n)$$

A megfelelő Haar-mátrixot véve, így a $H\alpha = 0$ homogén lineáris egyenletrendszernek $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ megoldása. Ez azonban i) miatt csak a triviális megoldás lehet, így H valóban reguláris.

A bizonyítás második része

$ii) \Rightarrow iii)$ Adott alappontokhoz és függvényértékekhez tartozó általánosított interpolációs polinom meghatározása ekvivalens az alábbi lineáris egyenletrendszer megoldásával:

$$\begin{gathered}
\alpha_1 g_1(x_1) + \alpha_2 g_2(x_1) + \ldots + \alpha_n g_n(x_1) = f_1 \\
\alpha_1 g_1(x_2) + \alpha_2 g_2(x_2) + \ldots + \alpha_n g_n(x_2) = f_2 \\
\vdots \\
\alpha_1 g_1(x_n) + \alpha_2 g_2(x_n) + \ldots + \alpha_n g_n(x_n) = f_n
\end{gathered}$$

Mivel az együtthatómátrix ii) alapján reguláris,így a megoldás egyértelműen létezik.

A bizonyítás vége

$iii) \Rightarrow i)$ Ha $p(x_i) = 0$ a páronként különböző $x_1, x_2, ..., x_n$ helyeken, akkor *p(x)* megoldása az ezen alappontokhoz és az $f_i = 0 \quad i = 1, 2, ..., n$ értékekhez tartozó interpolációs feladatnak. Viszont $q(x) \equiv 0$ is megoldás. Így azonban, mivel iii) szerint a megoldás egyértelmű:

$$p(x) \equiv 0.$$

Általánosított interpolációs polinom

Haar-alterek esetében is felírható az általánosított interpolációs polinom a Lagrange-féle bázisfüggvények segítségével: $p(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i L_i(x)$

$$L_i(x) = \frac{1}{\det H} \det \begin{pmatrix} g_1(x_1) & g_2(x_1) & \dots & g_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_1(x_{i-1}) & g_2(x_{i-1}) & \dots & g_n(x_{i-1}) \\ g_1(x) & g_2(x) & \dots & g_n(x) \\ g_1(x_{i+1}) & g_2(x_{i+1}) & \dots & g_n(x_{i+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_1(x_n) & g_2(x_n) & \cdots & g_n(x_n) \end{pmatrix}$$

Racionális interpoláció

Adottak az *n,m* természetes számok, $x_0, x_1, ..., x_{n+m} \in [a,b]$ interpolációs alappontok és $f_0, f_1, ..., f_{n+m}$ függvényértékek. Határozzunk meg olyan

$$r_{n,m}(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)} = \frac{\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + ... + \alpha_{n-1} x + \alpha_n}{\beta_0 x^m + \beta_1 x^{m-1} + ... + \beta_{m-1} x + \beta_m}$$

racionális interpolációs polinomot, amely eleget tesz az

$$r_{n,m}(x_i) = f_i \qquad i = 0,1,...,n+m$$

interpolációs feltételeknek.

Racionális interpoláció

- Az interpolációs feltételek teljesüléséhez szükséges, hogy

$$p_n(x_i) - f_i q_m(x_i) = 0 \qquad i = 0,1,\ldots,n+m$$

legyen.

- Az α_i, β_j ismeretlenekre ez egy n+m+1 egyenletből álló n+m+2 ismeretlenes homogén lineáris egyenletrendszert határoz meg.

Trigonometrikus interpoláció

Adott az *n=2m+1* természetes szám, a páronként különböző $x_0, x_1, ..., x_{n-1} \in [0, 2\pi)$ interpolációs alappontok és az $f_0, f_1, ..., f_{n-1}$ függvényértékek. Határozzunk meg olyan

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{m} (a_l \cos lx + b_l \sin lx)$$

trigonometrikus interpolációs polinomot, amely eleget tesz az

$$s_n(x_i) = f_i \qquad i = 0, 1, ..., n-1$$

interpolációs feltételeknek.

Trigonometrikus interpoláció

- Ekvidisztáns alappontokat véve

$$x_k = \frac{2\pi k}{n} \qquad k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

- Az $s_n(x)$ meghatározása visszavezethető olyan

$$p_n(x) = \beta_0 + \beta_1 e^{ix} + \beta_2 e^{2ix} + \ldots + \beta_{n-1} e^{(n-1)ix}$$

ún. *fázispolinom* keresésére, amely teljesíti az alábbi feltételeket:

$$p_n(x_k) = f_k \qquad k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

Hermite interpoláció

Hermite interpoláció

Adott az *n* pozitív egész szám, a páronként különböző $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ alappontok, az m_i pozitív egész számok, az $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ konstans és az egyes alappontokhoz tartozó $\{f_i^0, f_i^1, ..., f_i^{m_i-1}\}$ értékek.

Határozzunk meg olyan legfeljebb m-1-ed fokú

$$H_m(x) = \alpha_0 x^{m-1} + \alpha_1 x^{m-2} + ... + \alpha_{m-2} x + \alpha_{m-1}$$

Hermite-féle interpolációs polinomot, amely eleget tesz a

$$H_m^j(x_i) = f_i^j \qquad i = 1, 2, ..., n, \quad j = 0, 1, ..., m_i - 1$$

interpolációs feltételeknek.

Speciális esetek

- A Lagrange-interpoláció

$$m_1 = m_2 = ... = m_n = 1 \qquad (m = n)$$

- Taylor-polinom (x_1 körüli)

$$n = 1$$

- Hermite-Fejér interpoláció

$$m = 2n$$

$$m_i = 2$$

Egy lineáris egyenletrendszer

$$H_m(x) = \alpha_0 x^{m-1} + \alpha_1 x^{m-2} + \ldots + \alpha_{m-2} x + \alpha_{m-1}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_0 x_1^{m-1} + \alpha_1 x_1^{m-2} + \cdots + \alpha_{m-1} &= f_1^0 \\
&\vdots \\
\alpha_0 x_n^{m-1} + \alpha_1 x_n^{m-2} + \cdots + \alpha_{m-1} &= f_n^0 \\
(m-1)\alpha_0 x_1^{m-2} + (m-2)\alpha_1 x_1^{m-3} + \cdots + \alpha_{m-2} &= f_1^1 \\
&\vdots \\
(m_n - 1)!\alpha_0 x_1^{m-1-(m_n-1)} + \cdots &= f_n^{m_n-1}
\end{aligned}$$

- Az interpolációs probléma megoldása ekvivalens egy mxm-es együtthatómátrixú lineáris egyenletrendszer megoldásával.

Unicitás és egzisztencia

Unicitás

Tétel. *Tetszőlegesen megadott feltételrend-szerhez legfeljebb egy azt kielégítő Hermite-féle interpolációs polinom létezik.*

Bizonyítás.

Tegyük fel, hogy van olyan feltételrendszer, amelyhez két különböző $H_m(x)$ és $\overline{H}_m(x)$ polinom létezik. Tekintsük az alábbi különbségpolinomot:

$$S(x) = H_m(x) - \overline{H}_m(x)$$

A bizonyítás vége

Az S(x) különbségpolinomnak minden alappont zérushelye, sőt minden zérushely multiplicitása legalább m_i .

$$S^{(j)}(x_i) = H_m^{(j)}(x_i) - \overline{H}_m^{(j)}(x_i) = f_i^{\,j} - f_i^{\,j} = 0$$

$$0 \le j \le m_i - 1$$

S(x)-nek tehát multiplicitással számolva legalább *m* zérushelye van. Másrészt azonban *S(x)* fokszáma legfeljebb *m-1*, így nem létezhet két különböző Hermite-féle interpolációs polinom.

Egzisztencia

Tétel. *Tetszőlegesen megadott feltételrend-szerhez létezik azt kielégítő Hermite-féle interpolációs polinom.*

Bizonyítás.

Az unicitástétel alapján a megoldás akkor is egyértelmű, ha olyan feltételrendszert veszünk, amelyhez a $H\alpha = 0$ homogén lineáris egyenletrendszer tartozik.

A bizonyítás

Az egyértelműség miatt az egyenletrendszer egyetlen megoldása a triviális megoldás:

$$\alpha = 0.$$

Ez viszont azt jelenti, hogy az egyenletrendszer együtthatómátrixa reguláris, vagyis

$$\det H \neq 0.$$

Ekkor azonban az egyenletrendszer tetszőleges jobboldali értékekkel is megoldható.

Hermite-Fejér interpoláció

- Speciális eset: $m = 2n,\ m_i = 2$, vagyis minden pontban a függvényérték és az első derivált értéke van megadva.

Fejér Lipót (1880-1959) magyar matematikus, az első magyar matematikai iskola megalapítója volt a budapesti tudományegyetemen.

Hermite-Fejér interpoláció

- **Állítás.** *A Hermite-polinom a Lagrange-féle bázispolinomok segítségével a következő alakban írható fel*:

$$H_{2n}(x) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^{\,0}(1-2(x-x_i)L_i'(x_i))L_i^2(x) + \sum_{i=1}^{n} f_i^{\,1}(x-x_i)L_i^2(x)$$

A bizonyítás behelyettesítéssel elvégezhető.

Példa az Hermite-Fejér interpolációra

Példa

Tekintsük az alábbi Hermite-Fejér interpolációs feladatot és határozzuk meg a hozzá tartozó interpolációs polinomot.

$$
\begin{array}{c|ccc}
x_i & -1 & 1 & 2 \\
y_i & 1 & -1 & -29 \\
y_i' & 5 & -7 & -43
\end{array}
$$

Megoldás

$$m = 6$$

$$\alpha_0(-1)^5 + \alpha_1(-1)^4 + \alpha_2(-1)^3 + \alpha_3(-1)^2 + \alpha_4(-1) + \alpha_5 = 1$$

$$\alpha_0 1^5 + \alpha_1 1^4 + \alpha_2 1^3 + \alpha_3 1^2 + \alpha_4 1 + \alpha_5 = -1$$

$$\alpha_0 2^5 + \alpha_1 2^4 + \alpha_2 2^3 + \alpha_3 2^2 + \alpha_4 2 + \alpha_5 = -29$$

$$5\alpha_0(-1)^4 + 4\alpha_1(-1)^3 + 3\alpha_2(-1)^2 + 2\alpha_3(-1) + \alpha_4 = 5$$

$$5\alpha_0 1^4 + 4\alpha_1 1^3 + 3\alpha_2 1^2 + 2\alpha_3 1 + \alpha_4 = -7$$

$$5\alpha_0 2^4 + 4\alpha_1 2^3 + 3\alpha_2 2^2 + 2\alpha_3 2 + \alpha_4 = -43$$

Megoldás

$$-\alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_5 = 1$$
$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = -1$$
$$32\alpha_0 + 16\alpha_1 + 8\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 = -29$$
$$5\alpha_0 - 4\alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_3 + \alpha_4 = 5$$
$$5\alpha_0 + 4\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 = -7$$
$$80\alpha_0 + 32\alpha_1 + 12\alpha_2 + 4\alpha_3 + \alpha_4 = -43$$

Megoldásvektor: $\alpha = (2,-6,-4,9,1,-3).$

Megoldás

A keresett Hermite-Fejér interpolációs polinom:

$$H_6(x) = 2x^5 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + x - 3$$

$$\begin{array}{c|ccc}
x_i & -1 & 1 & 2 \\
y_i & 1 & -1 & -29 \\
y_i' & 5 & -7 & -43
\end{array}$$

A megoldás előállítása Lagrange-féle bázispolinomokkal

$$H_{2n}(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i^{\,0}(1-2(x-x_i)L_i'(x_i))L_i^2(x) + \sum_{i=1}^{n} f_i^{\,1}(x-x_i)L_i^2(x)$$

$$L_1(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{6} \qquad L_2(x)=\frac{(x+1)(x-2)}{-2} \qquad L_3(x)=\frac{(x+1)(x-1)}{3}$$

$$L_1'(x)=\frac{1}{6}(2x-3) \qquad L_2'(x)=\frac{-1}{2}(2x-1) \qquad L_3'(x)=\frac{1}{3}2x$$

$$L_1^2(x)=\frac{(x-1)^2(x-2)^2}{36} \qquad L_2^2(x)=\frac{(x+1)^2(x-2)^2}{4} \qquad L_3^2(x)=\frac{(x+1)^2(x-1)^2}{9}$$

Gyakorló feladatok

Gyakorló feladatok

Mutassa meg, hogy ha a g(x) függvény szigorúan monoton [a,b]-n, akkor a

$$< 1, g(x), g(x)^2 ..., g(x)^{n-1} >$$

Haar-altér az [a,b]-n.

Gyakorló feladatok

Adjuk meg az alábbi pontokhoz tartozó Hermite interpolációs polinomot

$$\begin{array}{c|ccc} x_i & -1 & 1 & 2 \\ y_i & 1 & -1 & -29 \\ y_i' & 5 & -7 & -61 \end{array}$$

Gyakorló feladatok

Készítsen olyan eljárást, amely Hermite polinom előállítását valósítja meg! Az eljárás paraméterezés **Hermint(x,y,yd)** alakú legyen, ahol az **x** és **y** vektor az adott pontok x és y koordinátáiból áll, és **xd** az y derivált koordinátáit tartalmazza.

Irodalomjegyzék

- John H. Mathews, *Numerical Methods for Mathematics, Science, and Engineering*, Second Edition, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1992.
- Mihálykó Csaba – Virágh János, *Közelítő és szimbolikus számítások. Feladat-gyűjtemény*, Typotex, 2011.
- Virágh János, *Numerikus matematika*, JATEPress, Szeged, 1997.