

Közelítő és szimbolikus számítások haladóknak

11. előadás

Differenciálegyenletek
numerikus megoldása

Bevezetés

A differenciálegyenletekről

Differenciálegyenletek

- A **differenciálegyenletek** olyan egyenletek, amelyekben az ismeretlen egy differenciálható függvény, és az egyenlet a függvény és ennek deriváltja(i) között teremt kapcsolatot.

Példák differenciálegyenletre

- Differenciálegyenletek

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x^2 + 9 \qquad y'' = y' \sin x - \cos x$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \qquad y''' + 2y'^2 + y' = e^x$$

Alkalmazások

- Különböző problémáknak differenciálegyenletben való megfogalmazása a **fizikában, kémiában, biológiában, mérnöki tudományokban** és számos más tudományban alapvető szerepet játszik.
- Pl. a rezgő húr differenciálegyenlete, a hővezetés differenciálegyenlete, stb.

A differenciálegyenletek típusai

- **Közönséges differenciálegyenlet**
az egyenlet egyváltozós függvényre van felírva
- **Parciális differenciálegyenlet**
az ismeretlen függvény többváltozós és az egyenletben szereplő deriváltjai parciális deriváltak

Közönséges differenciálegyenletek

Példa

$$y'' = y' \sin x - \cos x$$

n-ed rendűnek nevezzük a differenciálegyenletet, ha a benne szereplő magasabb rendű deriváltak között az n-edik a legnagyobb. (A fenti példa egy másodrendű differenciálegyenlet.)

Általános megoldás

Az n -ed rendű közönséges differenciálegyenlet **általános megoldása** az a függvény, amely pontosan n számú egymástól független konstans (paramétert) tartalmaz, és kielégíti az adott differenciálegyenletet.

Partikuláris megoldás

- Az n -ed rendű közönséges differenciálegyenlet **partikuláris megoldása** az a függvény, mely legfeljebb $n-1$ számú egymástól független konstans (paramétert) tartalmaz, és kielégíti a differenciálegyenletet.
- Speciális esetben egyetlen paramétert sem tartalmaz a partikuláris megoldás.

Kezdeti feltételek

- A differenciálegyenlet valamely partikuláris megoldásának kiválasztásához feltételeket kell megadni.
- Egy n -ed rendű közönséges differenciálegyenlet esetében meg lehet adni a független változó egy adott értékhez tartozó függvényértékét, az első, második, ..., $(n-1)$ -edik derivált értékét. Ezek a **kezdeti feltételek**.

Lineáris és nemlineáris differenciálegyenletek

- **Lineáris differenciálegyenlet**

az ismeretlen függvény és annak differenciáhányadosa(i) csak lineáris kifejezésekben szerepel

- **Nemlineáris differenciálegyenlet**

az ismeretlen függvényt vagy deriváltját tartalmazó tag nemlineáris kifejezésben is előfordul

Néhány nevezetes differenciálegyenlet

- Bernoulli-egyenletek

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$

- Clairaut-egyenletek

$$y = xy' + F(y')$$

- Ricatti-egyenletek

$$y' = P(x)z^2 + Q(x)y' + R(x)$$

Néhány nevezetes differenciálegyenlet

- Euler-egyenletek

$$xy'' + axy' + by = c(x)$$

- Bessel-egyenletek

$$xy'' + (2k + 1)xy' + (\alpha^2 x^{2r} + \beta^2)y = 0$$

ahol k, α, r, β valósak és $\alpha r \neq 0$.

Autonóm differenciálegyenlet

- A közönséges differenciálegyenletet **autonóm differenciálegyenletnek** nevezzük, ha a független változót explicit módon nem tartalmazza.
- Autonóm rendszer például a híres Lotka-Volterra-egyenletrendszer, a ragadozó-áldozat rendszer egyik legegyszerűbb modellje.

Lotka-Volterra-egyenletrendszer

$$x'(t) = a_1 x(t) - a_2 x(t)y(t)$$

$$y'(t) = -b_1 y(t) + b_2 x(t)y(t)$$

ahol a_1, a_2, b_1, b_2 pozitív konstansok, $x(t)$ és $y(t)$ a ragadozó és áldozat egyedszám.

Megoldási módszerek

- **Analitikus megoldás meghatározása**
pl. a differenciálegyenletek klasszikus elméletének alkalmazása
- **Közelítő megoldás keresése**
pl. Taylor-sor módszer
- **A megoldás numerikus meghatározása**
pl. Runge-Kutta módszerek

Példák

Példa

Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását.

$$y(9 + 4x^2)y' = 1$$

Megoldás

Ha y' helyébe $\frac{dy}{dx}$ -et írunk és a változókat szétválasztjuk, akkor az

$$ydy = \frac{dx}{9 + 4x^2}$$

egyenlethez jutunk. A két oldalt integrálva:

$$\frac{y^2}{2} = \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{2x}{3} + c$$

vagyis

$$y = \pm \sqrt{\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x}{3} + c}.$$

Példa

Határozzuk meg az alábbi egyenletnek azt a partikuláris megoldását, amelyre $y(0) = 0$.

$$e^x \cos y dx + (1 + e^x) \sin y dy = 0$$

Megoldás

Írjuk át az

$$e^x \cos y dx + (1 + e^x) \sin y dy = 0$$

egyenletet a következő alakba:

$$\frac{-\sin y}{\cos y} dy = \frac{e^x}{1 + e^x} dx$$

ahol $\cos(y) \neq 0$.

Megoldás

Integrálva a

$$\frac{-\sin y}{\cos y} dy = \frac{e^x}{1+e^x} dx$$

egyenletet

$$\ln |\cos y| = \ln(e^x + 1) + \ln c$$

adódik, amiből az **általános** megoldás:

$$\cos y = c(e^x + 1).$$

Megoldás

A partikuláris megoldás meghatározása

Ha $x = 0$, akkor $y = 0$ és így az

$$1 = c(1+1)$$

egyenletből

$$c = \frac{1}{2}.$$

A keresett **partikuláris** megoldás:

$$\cos y = \frac{1}{2}(e^x + 1).$$

Példa

Tekintsük az

$$y'(x) + q(x)y(x) = r(x), \quad y(a) = b$$

feladat alábbi megoldását.

Legyen

$$Q(x) = \int_a^x q(t)dt.$$

Ekkor

$$y'(x)e^{Q(x)} + y(x)q(x)e^{Q(x)} = r(x)e^{Q(x)}.$$

Példa

Az előbbiek alapján

$$[y(x)e^{Q(x)}]' = r(x)e^{Q(x)},$$

tehát

$$y(x)e^{Q(x)} - b = \int_a^x r(t)e^{Q(t)} dt$$

$$y(x) = e^{-Q(x)} \left[b + \int_a^x r(t)e^{Q(t)} dt \right]$$

A megoldás

$$y(x) = e^{-Q(x)} \left[b + \int_a^x r(t) e^{Q(t)} dt \right]$$

- A fellépő integrálokat általában csak **numerikusan** lehet kiszámítani, ilyenkor **közelítőleg oldjuk meg** a differenciálegyenletet.

Néhány differenciálegyenlet megoldása a Maple segítségével

Példa

Oldjuk meg a Maple segítségével az alábbi feladatokat!

a) $y' = xy$

b) $y' = xy, \quad y(0) = 1$

c) $u'' + \omega^2 u = 0, \quad u(0) = 2, \quad u'(0) = 3$

Megoldás

a)

➤ `ODE:=diff(y(x),x)=x*y(x)`

$$ODE := \frac{d}{dx} y(x) = xy(x)$$

➤ `dsolve(ODE,y(x))`

$$y(x) = _C1 e^{\left(\frac{1}{2}x^2\right)}$$

Megoldás

b)

➤ `ODE:=diff(y(x),x)=x*y(x)`

$$ODE := \frac{d}{dx} y(x) = xy(x)$$

➤ `dsolve({ODE,y(0)=1},y(x))`

$$y(x) = e^{\left(\frac{1}{2}x^2\right)}$$

Megoldás

c)

➤ $\text{ODE} := \text{diff}(u(t), [t^2]) + \omega^2 u(t) = 0$

$$ODE := \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) + \omega^2 u(t) = 0$$

➤ $\text{dsolve}(\{\text{ODE}, u(0)=2, D(u)(0)=3\}, u(t))$

$$u(t) = \frac{3 \sin(\omega t)}{\omega} + 2 \cos(\omega t)$$

Ellenőrzés

➤ `eval(subs(t=0,rhs(%)))`

$$u(0) = 2$$

➤ `diff(rhs(%%),t)`

$$3\cos(\omega t) - 2\sin(\omega t)\omega$$

➤ `eval(subs(t=0,%))`

$$u'(0) = 3$$

Példa

Oldjuk meg az alábbi **másodrendű differenciálegyenletet** a Maple segítségével.

$$(1 + \sin(x))^2 y'' + \cos(x) = 0$$

Megoldás

➤ `de:=(1+sin(x))^2*diff(y(x),x$2)+cos(x)=0;`

$$de := (1 + \sin(x))^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} y(x) \right) + \cos(x) = 0$$

➤ `dsolve(de);`

$$y(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} - \frac{1}{\cos(x)} + _C1x + _C2$$

Ellenőrizzük a megoldást!

A megoldás ellenőrzése

➤ `diff(% ,x$2);`

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) = \frac{2 \sin(x)^3}{\cos(x)^3} + \frac{2 \sin(x)}{\cos(x)} - \frac{2 \sin(x)^2}{\cos(x)^3} - \frac{1}{\cos(x)}$$

➤ `simplify(%*(1+sin(x))^2);`

$$(1 + \sin(x))^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} y(x) \right) = -\cos(x)$$

Gyakorló feladatok

Gyakorló feladatok

- Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet a Maple segítségével.

$$y' = \sqrt{y - 2x}$$

Gyakorló feladatok

- Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet a Maple segítségével.

$$y' = \sin(x + y)$$

Gyakorló feladatok

- Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet a Maple segítségével

$$y' = \left(\frac{2x - y + 1}{x} \right)^2$$

Irodalomjegyzék

- Molnárka Gy. – Gergó L., Wettl F., Horváth A. – Kallós G., *A Maple V és alkalmazásai*, Springer, 1996.
- Mihálykó Csaba – Virágh János, *Közelítő és szimbolikus számítások. Feladatgyűjtemény*, Typotex, 2011.
- Móricz Ferenc, *Differenciálegyenletek numerikus módszerei*, Polygon, Szeged, 1998.