

# 1. Ortogonális transzformációk, sajátértékek meghatározása QR-transzformációval

Korábban két trianguláris felbontással is megismerkedhettünk: az LR- (vagy LU) illetve a Cholesky-felbontással. A továbbiakban egy újabb, meghatározását tekintve stabilisabb dekompozícióval fogunk foglalkozni, az ún. ortogonális triangularizációval.

**1.1 Definíció.** A  $Q$  kvadratikus mátrix ortogonális, ha  $Q^T Q = Q Q^T = I$ .

Vegyük észre, hogy egy ortogonális mátrix mindig reguláris (következik a determinánsok szorzástételéből), így  $Q$  ortogonalitása úgy is definiálható, hogy  $Q$  olyan négyzetes mátrix, amelynek inverze megegyezik a transzponáltjával.

Az ortogonális mátrix elnevezésnek az a magyarázata, hogy ortogonális mátrix sor- ill. oszlopvektorrendszere mindig ortonormált vektorrendszer lesz (Gondoljuk meg!), vagyis benne minden vektor egységnyi hosszúságú és két különböző vektor skalárszorzata 0 (azaz a vektorok merőlegesek egymásra).

Az ortogonális mátrixok távolságtartó transzformációt indukálnak.

**1.1 Tétel.** Tetszőleges  $Q$  ortogonális mátrixra és  $x$  vektorra  $\|x\|_2 = \|Qx\|_2$ .

**Bizonyítás.**  $\|Qx\|_2^2 = (Qx)^T (Qx) = x^T Q^T Q x = x^T (Q^T Q)x = x^T x = \|x\|_2^2$ .

**1.2 Definíció.** A  $Q$  kvadratikus mátrixot elemi tükröző mátrixnak (vagy másnéven *Householder-mátrixnak*) mondjuk, ha  $Q=I$  vagy felírható  $Q = I - 2qq^T$  alakban, ahol  $q$  olyan vektor amelyre  $q^T q = \|q\|_2^2 = 1$ .

Az elnevezés onnan adódik, hogy  $Q \neq I$  esetben, az  $x \rightarrow Qx$  transzformáció az  $n$ -dimenziós euklideszi térnek egy  $q$  normálisú origón átmenő hipersíkra való tükrözését adja.

**1.1 Példa.** Írjuk fel a  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$  normálisú origón átmenő egyenesre való tükrözést megadó elemi tükröző mátrixot és számoljuk ki a segítségével az (5,3) koordinátájú pontnak az előbbi egyenesre való tükörképének a koordinátáit.

**Megoldás.**

$$Q = I - 2qq^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A megadott pont tükörképének koordinátái:  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Vegyük észre, hogy a kapott  $Q$  mátrix egy szimmetrikus és ortogonális mátrix. Ezek általában is teljesülő tulajdonságai az elemi tükröző mátrixoknak.

**1.2 Tétel.** Minden elemi tükröző mátrix szimmetrikus és ortogonális.

**Bizonyítás.** Legyen  $Q$  elemi tükröző mátrix.

Szimmetria:  $Q^T = (I - 2qq^T)^T = I^T - 2(q^T)^T q^T = I - 2qq^T = Q$ .

Ortogonalitás:

$$Q^T Q = QQ = (I - 2qq^T)(I - 2qq^T) = I - 2qq^T - 2qq^T + 4qq^T qq^T = I - 4qq^T + 4q(q^T q)q^T = I$$

**1.3 Tétel.** Legyenek  $x$  és  $y$  azonos hosszúságú de különböző vektorok az euklideszi térben. Ekkor a  $q = \frac{x-y}{\|x-y\|_2}$  és  $Q = I - 2qq^T$  formulákkal megadott elemi tükrözés  $x$ -et  $y$ -ba viszi.

**Bizonyítás.** Könnyen látható, hogy  $\|q\|_2^2 = q^T q$  tényleg 1.

Határozzuk meg a  $Qx$  vektort!

$$\begin{aligned}
Qx &= \left( I - 2 \frac{x-y}{\|x-y\|_2} \left( \frac{x-y}{\|x-y\|_2} \right)^T \right) x = x - 2(x-y) \frac{(x-y)^T x}{\|x-y\|_2^2} = x - 2(x-y) \frac{x^T x - y^T x}{(x-y)^T (x-y)} = \\
&= x - 2(x-y) \frac{x^T x - y^T x}{x^T x - y^T x - x^T y + y^T y} = x - (x-y) \frac{2(x^T x - y^T x)}{2(x^T x - y^T x)} = y.
\end{aligned}$$

**1.4 Tétel.** Legyen  $Q \in R^{n \times n}$  egy elemi tükröző mátrix. Ekkor az alábbi partícionált formában megadott

$$T = \begin{pmatrix} I & O \\ O^T & Q \end{pmatrix} \in R^{m \times m}$$

mátrix is elemi tükröző mátrix lesz.

**Bizonyítás.** Ha  $Q$  egységmátrix, akkor  $T$  is egységmátrix lesz, így az állítás ekkor igaz. Ha  $Q = I - 2qq^T$ , ahol  $q$  egységnyi hosszúságú, akkor bevezetve a  $q'^T = (0, 0, \dots, 0, q_1, q_1, \dots, q_n)$   $m$ -komponensű vektort könnyen látható, hogy  $q'$  hossza is egységnyi lesz és  $T = I - 2q'q'^T$ , tehát  $T$  is elemi tükröző mátrix.

**1.3 Definíció.** Egy  $A$  mátrix ortogonális triangularizációján  $A$ -nak egy  $A = QR$  dekompozícióját értjük, ahol  $Q$  ortogonális,  $R$  felső trianguláris mátrix.

Tudjuk, hogy nem minden kvadratikus mátrixnak lehet megadni az LR-felbontását, ahogyan Cholesky-felbontása sincs minden négyzetes mátrixnak. Viszont minden mátrixnak van ortogonális-trianguláris dekompozíciója, amelyet megkaphatunk elemi tükröző mátrixokkal végzett szorzások segítségével.

**1.5 Tétel.** Minden  $A$   $n$ -edrendű valós kvadratikus mátrixhoz megadhatók olyan  $Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1}$  elemi tükröző mátrixok, hogy az  $A_0 = A$ ,  $A_j = Q_j A_{j-1}$  rekurzióval számított  $A_j$  mátrix  $1, 2, \dots, j$ -dik oszlopában minden főátló alatti elem 0 lesz. Speciálisan így  $A_{n-1}$  felső trianguláris alakú lesz.

**Bizonyítás.** A bizonyítást  $j$  szerinti indukcióval végezzük.

A  $j=1$  esetben használjuk fel az **1.3 Tételt** az  $x = Ae_1 = a$  és  $y = \|a\|_2 e_1$  választással. Így a  $Q_1 A_0$  szorzás elvégzése után kapott  $A_1$  mátrix első oszlopában a második elemtől kezdve, minden szám 0 lesz.

Tegyük fel, hogy az állítás teljesül az első  $j$  esetre! Az  $A_j$  mátrixot

írjuk fel  $A_j = \begin{pmatrix} U_j & B_j \\ O_j^T & C_j \end{pmatrix}$  partícionált alakban, ahol  $U_j \in R^{j \times j}$ ,  $B_j \in R^{j \times (n-j)}$ ,

$O_j^T \in R^{(n-j) \times j}$  és  $C_j \in R^{(n-j) \times (n-j)}$ . Az **1.3 Tételt** felhasználva van olyan  $S_j \in R^{(n-j) \times (n-j)}$  elemi tükröző mátrix, amellyel szorozva az  $S_j C_j$  mátrix első oszlopában a másodiktól kezdve minden elem 0. Mivel az **1.4**

**Tétel** szerint  $Q_{j+1} = \begin{pmatrix} I_j & O_j \\ O_j^T & S_j \end{pmatrix}$  szintén elemi tükröző mátrix lesz, így az

$A_{j+1} = Q_{j+1} A_j = \begin{pmatrix} I_j & O_j \\ O_j^T & S_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_j & B_j \\ O_j^T & C_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_j & B_j \\ O_j^T & S_j C_j \end{pmatrix}$  mátrix már a  $j+1$ -dik oszlopában is felső trianguláris lesz.

A fenti tétel valóban dekompozíciót ad, hiszen így  $A_{n-1} = Q_{n-1} Q_{n-2} \dots Q_1 A$ , ahol  $R = A_{n-1}$  felső trianguláris mátrix,  $Q_{n-1} Q_{n-2} \dots Q_1$  ortogonális mátrix, aminek  $Q$  inverze (vagyis az előbbi szorzatmátrix transzponáltja) is ortogonális lesz, így  $A = QR$ . A fenti dekompozíciós megadási módot szokás Householder-algoritmusnak is nevezni. (Alston Scott Householder (1904-1993) amerikai matematikus.)

**1.2 Példa.** Határozzuk meg a Householder-algoritmussal az alábbi mátrix ortogonális-trianguláris felbontását

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

**Megoldás.**

Ekkor csak egy elemi tükröző mátrixra van szükség, amely az első oszlop főátló alatti elemét kinullázza. Legyen  $x = (3, 4)^T$  és  $y = (5, 0)^T$ . Így

$$q = \left( -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)^T \text{ és } Q = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}. \text{ Ebből következőleg}$$

$$R = QA = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & \frac{26}{5} \\ 0 & -\frac{7}{5} \end{pmatrix}, \text{ tehát a QR-dekompozíció így}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & \frac{26}{5} \\ 0 & -\frac{7}{5} \end{pmatrix}.$$

**Egy speciális eset:**

### **Reguláris mátrixok ortogonális triangularizációja**

Ha a felbontandó mátrix reguláris, akkor más módon is megadhatjuk annak egy ortogonális-triangularis felbontását.

A Cholesky-felbontáson alapuló eljárás.

Mivel  $A$  reguláris, így a  $B = A^T A$  mátrix pozitív definit, tehát létezik  $B$ -nek kanonikus  $B = R^T R$  Cholesky-felbontása. Legyen  $Q = AR^{-1}$ . Ekkor az  $A = QR$  ortogonális triangularis felbontás lesz. Valóban, hiszen  $R$  felső triangularis mátrix, másrészt  $Q$  ortogonális, mivel

$$Q^T Q = (AR^{-1})^T (AR^{-1}) = (R^{-1})^T A^T AR^{-1} = (R^{-1})^T BR^{-1} = (R^{-1})^T (R^T R)R^{-1} = ((R^T)^{-1} R^T) (RR^{-1}) = I = I.$$

**1.3 Példa.** Határozzuk meg a Cholesky-felbontáson alapuló eljárással az alábbi reguláris mátrix ortogonális-triangularis felbontását

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

**Megoldás.**

$$B = A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 26 \\ 26 & 29 \end{pmatrix}.$$

$$B \text{ Cholesky-felbontása } B = R^T R = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ \frac{26}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & \frac{26}{5} \\ 0 & \frac{7}{5} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Így } Q = AR^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{26}{35} \\ 0 & \frac{5}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}. \text{ Tehát a QR-dekompozíció}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 26 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Vegyük észre, hogy a Householder-algoritmus és a Cholesky-felbontás „nagyon hasonló” mátrixokat adott, a különbség csak előjelekben van. Általában is igazolható ez a tulajdonsága reguláris mátrixok ortogonális triangularizációjának.

**1.6. Tétel** *Reguláris  $A$  mátrix ortogonális triangularizációja  $Q$  oszlopainak és  $R$  sorainak előjelétől eltekintve egyértelmű.*

**Bizonyítás.** Tekintsük  $A$  két különböző felbontását:  $A = Q_1 R_1 = Q_2 R_2$ . Mivel  $A$  reguláris, így a felbontásban szereplő minden mátrix reguláris lesz, ezért  $Q_2^T Q_1 = R_2 R_1^{-1}$ . Itt a baloldal ortogonális, a jobb oldal felső trianguláris mátrix lesz, ami csak úgy lehet, ha mindkét oldalon ugyanaz a  $V$  diagonális mátrix áll. Mivel  $V$  diagonális, ezért a főátlójában minden elem csak 1 vagy -1 lehet és  $Q_2 = Q_1 V$ ,  $R_2 = V R_1$ .

## 1.1 Megjegyzés

a) Ha ismert  $A=QR$  dekompozíciója, könnyen megkapható  $|\det A|$ . Ehhez elég meggondolni, hogy egy ortogonális mátrix determinánsa csak +1 vagy -1 lehet. Ekkor viszont  $|\det A| = \prod_{i=1}^n |r_{ii}|$ .

b) Ha ismert az  $Ax=a$  lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixának  $A=QR$  felbontása, akkor tekintve a

$$\begin{aligned} Qy &= a \\ Rx &= y \end{aligned}$$

egyenletrendszereket  $x$  könnyen meghatározható, kihasználva  $Q$  ortogonalitását ( $y = Q^T a$ , majd a szokásos visszahelyettesítéssel  $x$  is megkapható).

**1.2 Megjegyzés** Az elemi tükröző mátrixok mellett az ortogonális mátrixoknak fontos osztályát alkotják az ún. elemi forgató mátrixok is. Itt csak a  $2 \times 2$ -es esettel foglalkozunk.

**1.4 Definíció** A  $2 \times 2$ -es

$$S = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

mátrixot elemi forgató mátrixnak nevezzük, ahol  $0 \leq \alpha < 2\pi$ .

Könnyen látható, hogy  $S$  ortogonális.

Egy  $A$  mátrixot megszorozva  $S$ -sel

$$SA = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ a_{21} \cos \alpha - a_{11} \sin \alpha & * \end{pmatrix}$$

Azt szeretnék, hogy  $a_{21} \cos \alpha - a_{11} \sin \alpha = 0$ . Ez elérhető egy ilyen választással:

$$\cos \alpha := \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}, \quad \sin \alpha := \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}, \quad \text{amennyiben } a_{11}^2 + a_{21}^2 \neq 0, \quad \text{ha } 0 \text{ akkor } \alpha := 0.$$

Innen már könnyen adódik az elemi forgató mátrixokat használó ortogonális dekompozíció.

**1.4 Példa.** Határozzuk meg az alábbi mátrix QR-felbontását elemi forgató mátrixok felhasználásával

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

**Megoldás.**

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5}, \quad \sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{4}{5}. \quad \text{Így}$$

$$SA = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & \frac{26}{5} \\ 0 & \frac{5}{5} \end{pmatrix}, \quad \text{amiből következőleg } A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & \frac{26}{5} \\ 0 & \frac{5}{5} \end{pmatrix}.$$

## Miért 'forgató' mátrix?

Ha az  $(x,y)$  koordinátájú pont  $\beta$  szöget zár be az  $x$ -tengellyel és azt az origó körül  $-\alpha$  szöggel elforgatjuk, akkor az így kapott pont  $(x',y')$  koordinátái  $(z \cos(\beta - \alpha), z \sin(\beta - \alpha))$  lesz, ahol  $z = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ . Így

$$x' = z(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = z\left(\cos \alpha \frac{x}{z} + \sin \alpha \frac{y}{z}\right) = x \cos \alpha + y \sin \alpha$$

$$y' = z(\sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha) = z\left(\frac{y}{z} \cos \alpha - \frac{x}{z} \sin \alpha\right) = y \cos \alpha - x \sin \alpha$$

## A QR-algoritmus

A QR-algoritmust rekurzióval adjuk meg. Legyen  $A_1 = A$ . Ha  $A_i = Q_i R_i$ , akkor  $A_{i+1} = R_i Q_i$ , ahol  $Q_i$  ortogonális,  $R_i$  felső trianguláris mátrixok minden  $i \geq 1$ -re.

Az előbbi módon definiált mátrixsorozat egymást követő elemei hasonlóak lesznek egymáshoz. Valóban, hiszen ha  $A_i = Q_i R_i$  és  $A_{i+1} = R_i Q_i$ , akkor mivel  $R_i = Q_i^{-1} A_i$ , így  $A_{i+1} = Q_i^{-1} A_i Q_i$ .

**1.7. Tétel (A QR-algoritmus konvergenciatétele)** Ha  $A$  sajátértékeire  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n| > 0$  és van olyan  $A$ -t diagonizáló  $X$  mátrix, hogy  $X^{-1} A X = D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  és létezik  $X^{-1}$ -nek LR-felbontása, akkor az  $\{A_k\}, \{R_k\}$  és  $\{Q_k\}$  mátrixsorozatok konvergensek és

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} R_k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} Q_k = I.$$

A QR-algoritmusnak egyik előnye, hogy az algoritmus sosem akad el amiatt, hogy egy mátrixnak nincs QR-felbontása, mivel az mindig létezik. Az algoritmusnak másik előnye, hogy a kerekítési hibákkal szemben stabilisabban viselkedik, mint az LR ill. a Cholesky-felbontáson alapuló eljárás.



## 2. Egyenletrendszerek közelítő megoldása, relaxációs módszerek, többváltozós Newton-módszer, függvényminimalizálás.

Korábban tanultuk a lineáris egyenletrendszerek közelítő megoldását adó Jacobi- (J-módszer) és Gauss-Seidel-iterációs (S-módszer) eljárásokat. Ezen módszerek kiterjesztéseként tárgyaljuk most a Jacobi-féle relaxációs, illetve a szukcesszív túlrelaxációs módszert.

Tekintsük az  $Ax=a$  lineáris egyenletrendszer  $A$  erősen reguláris együtthatómátrixának  $A = \frac{1}{\omega}D - \left( L + U + \left( \frac{1}{\omega} - 1 \right) D \right)$  felírását, ahol  $D$  diagonális,  $L$  alsó trianguláris,  $U$  felső trianguláris mátrixok (a főátlóban minden elem 0) és  $\omega > 0$  valós paraméter (ún. relaxációs paraméter).

### Jacobi-féle relaxációs módszer (JOR-módszer)

$A$ -nak az  $R$ - $S$  reguláris szétvágásában legyen

$$R = \frac{1}{\omega}D, \quad S = L + U + \left( \frac{1}{\omega} - 1 \right) D.$$

Így az  $x = Bx + b$  iterációs formulában

$$B_{J(\omega)} = \omega D^{-1} \left( L + U + \left( \frac{1}{\omega} - 1 \right) D \right), \quad \text{illetve} \quad b_{J(\omega)} = \omega D^{-1} a.$$

### Szukcesszív túlrelaxációs módszer (SOR-módszer)

Ekkor  $R = \frac{1}{\omega}D - L$ ,  $S = U + \left( \frac{1}{\omega} - 1 \right) D$ , így  $B_{S(\omega)} = (D - \omega L)^{-1} (\omega U + (1 - \omega) D)$ ,

$$b_{S(\omega)} = \omega (D - L\omega)^{-1} a.$$

Természetesen az előbbi relaxációs módszerekre is teljesülnek a Jacobi- ill. a Gauss-Seidel iterációnál tanult konvergencia-kritériumok.

**2.1 Tétel** *Erősen reguláris együtthatómátrixú  $Ax=a$  lineáris egyenletrendszerre a JOR- vagy SOR-módszer akkor és csak akkor konvergens, ha*

- i)  $\rho(B) < 1$ .
- ii) van olyan  $\|\cdot\|$  mátrixnorma, amelyre  $\|B\| < 1$ .

Az iterációs módszerekkel kapcsolatosan megfogalmazható több olyan „relatív” konvergencia-kritérium is, ahol az egyik módszer konvergenciája a másik módszer konvergenciáját vonja maga után.

**2.2 Tétel** *Legyen  $Ax=a$  egy erősen reguláris együtthatómátrixú egyenletrendszer. Ha a  $J$ -módszer konvergens, akkor tetszőleges  $0 < \omega < 1$  relaxációs paraméterre a  $J(\omega)$ -módszer is konvergens lesz.*

**Bizonyítás.** Azt fogjuk megmutatni, hogy  $\rho(B_{J(\omega)}) < 1$ .

Nem nehéz látni, hogy  $B_{J(\omega)} = \omega B_J + (1-\omega)I$  (Gondoljuk meg!).

Ha  $B_J$  sajátértékei  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , akkor viszont  $B_{J(\omega)}$   $\mu_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) sajátértékei felírhatók  $\mu_i = \omega\lambda_i + 1 - \omega$  alakban (Gondoljuk meg!). Így azonban

$$|\mu_i| = |\omega\lambda_i + 1 - \omega| \leq |\omega\lambda_i| + |1 - \omega| = \omega|\lambda_i| + 1 - \omega < \omega \cdot 1 + 1 - \omega = 1,$$

tehát  $B_{J(\omega)}$  spektrálsugara tényleg 1-nél kisebb, vagyis a  $J(\omega)$ -módszer is konvergens lesz.

A relaxációs módszerek esetén a konvergencia szükséges feltétele hogy a relaxációs paraméter 2-nél kisebb pozitív szám legyen.

**2.3 Tétel** *Minden  $\omega > 0$  relaxációs paraméter esetén  $|1 - \omega| \leq \rho(B_{J(\omega)})$ .*

**Bizonyítás.** Vegyük észre, hogy  $B_{J(\omega)}$  főátlójában minden elem  $1 - \omega$  (Gondoljuk meg!). Ekkor viszont, ha  $B_{J(\omega)}$  sajátértékei  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , akkor  $\text{tr}(B_{J(\omega)}) = n(1 - \omega)$  és ez azt jelenti, hogy  $n|1 - \omega| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq n\rho(B_{J(\omega)})$ , amiből a bizonyítandó egyenlőtlenség  $n$ -nel való leosztással következik.

**2.4 Tétel** *Minden  $\omega > 0$  relaxációs paraméter esetén  $|1 - \omega| \leq \rho(B_{S(\omega)})$ .*

**Bizonyítás.** Határozzuk meg a  $B_{S(\omega)}$  mátrix karakterisztikus polinomjának a 0 helyen felvett értékét.

$$p_{B_{S(\omega)}}(0) = \det(B_{S(\omega)}) = \det(D - \omega L)^{-1} \det(\omega U + (1 - \omega)D) = \frac{1}{\det D} (1 - \omega)^n \det D = (1 - \omega)^n.$$

Mivel  $p_{B_{S(\omega)}}(0)$  egyben a  $B_{S(\omega)}$  sajátértékeinek a szorzata is, így

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i = (1-\omega)^n.$$

Ebből viszont  $|1-\omega|^n = \prod_{i=1}^n |\lambda_i| \leq (\rho(B_{S(\omega)}))^n$  következik, amiből  $n$ -dik gyököt vonva a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk.

A **2.3 Tétel** és a **2.4 Tétel** közvetlen következménye (Gondoljuk meg!), hogy mind a JOR-, mind SOR-módszer esetében a konvergencia szükséges feltétele, hogy  $0 < \omega < 2$ .

Vannak olyan tételek is, amelyek elégséges feltételt adnak a konvergenciára. Fontosak azok az eredmények is, amelyek olyan optimális  $\omega$  értéket adnak, amire az iterációs mátrix spektrálsugara minimális lesz, mivel a konvergencia ekkor lesz a leggyorsabb.

**2.5 Tétel** *Tegyük fel, hogy a  $B_J$  mátrix minden sajátértéke valós és  $1 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ . Ekkor*

a) az  $\omega^* := \frac{2}{2 - (\lambda_1 + \lambda_n)}$  értékre a JOR-módszer konvergens<sup>1</sup>,

b) ha  $\omega \neq \omega^*$ , akkor  $\rho(B_{J(\omega^*)}) < \rho(B_{J(\omega)})$ ,

c) a JOR-módszer akkor és csak akkor konvergens, ha  $0 < \omega < \frac{2}{1 - \lambda_n}$ .

## Bizonyítás

a) Mivel  $B_{J(\omega)} = \omega B_J + (1-\omega)I$ , így a  $B_{J(\omega)}$  mátrix  $\mu_i = \omega \lambda_i + (1-\omega)$  sajátértékeire (lásd a **2.2 Tétel** bizonyítását)  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$  is teljesül.

Így  $\rho(B_{J(\omega)}) = \max(|\mu_1|, |\mu_n|)$ .

$$\mu_1^* = \frac{2}{2 - (\lambda_1 + \lambda_n)} \lambda_1 + 1 - \frac{2}{2 - (\lambda_1 + \lambda_n)} = \frac{\lambda_1 - \lambda_n}{2 - (\lambda_1 + \lambda_n)}$$

$$\mu_n^* = \frac{2}{2 - (\lambda_1 + \lambda_n)} \lambda_n + 1 - \frac{2}{2 - (\lambda_1 + \lambda_n)} = \frac{\lambda_n - \lambda_1}{2 - (\lambda_1 + \lambda_n)} = -\mu_1^*$$

<sup>1</sup>  $\omega^*$ -ra is teljesül a relaxációs paraméterre vonatkozó azon szükséges feltétel, miszerint az csak 2-nél kisebb pozitív szám lehet. Ehhez elég azt megmondolni, hogy a  $B_J$  főátlójában minden elem 0, így a mátrix nyoma, és egyben a sajátértékek összege is 0 kell, hogy legyen. Összevetve ezt a tételnek a sajátértékekre vonatkozó feltételével, következik, hogy  $\lambda_1 \geq 0$  és  $\lambda_n \leq 0$ . Ekkor viszont áll az is, hogy  $\lambda_n < 1 - \lambda_1$ , vagyis  $\omega^* < 2$ .

Tehát

$$\rho(B_{J(\omega^*)}) = \max(|\mu_1^*|, |\mu_n^*|) = \frac{\lambda_1 - \lambda_n}{2 - (\lambda_1 + \lambda_n)} = \frac{2\lambda_1 - (\lambda_1 + \lambda_n)}{2 - (\lambda_1 + \lambda_n)} < \frac{2 - \lambda_1 - \lambda_n}{2 - \lambda_1 - \lambda_n} = 1$$

vagyis a JOR-módszer konvergens.

b) Definiáljuk az  $f_i(\omega) = |(\lambda_i - 1)\omega + 1|$  függvényeket, minden  $1 \leq i \leq n$ -re. Az optimális  $\omega^*$  értéket, vagyis ahol a  $B_{J(\omega)}$  spektrálsugara minimális az  $\omega^* = \min_{\omega > 0} \max(f_1(\omega), f_n(\omega))$  képlet határozza meg. Itt a maximum akkor lesz minimális, ha  $f_1(\omega) = f_n(\omega)$ , azaz

$$-((\lambda_n - 1)\omega + 1) = (\lambda_1 - 1)\omega + 1, \text{ vagyis } \omega = \frac{2}{2 - (\lambda_1 + \lambda_n)}.$$

Ha  $\omega^* < \omega$ , akkor  $\rho(B_{J(\omega)}) = |f_n(\omega)| > |f_n(\omega^*)| = \rho(B_{J(\omega^*)})$ .

Ha  $\omega < \omega^*$ , akkor  $\rho(B_{J(\omega)}) = |f_1(\omega)| > |f_1(\omega^*)| = \rho(B_{J(\omega^*)})$ .

c) A JOR-módszer pontosan akkor konvergens, ha  $\rho(B_{J(\omega)}) < 1$ . Mivel

$$\rho(B_{J(\omega)}) = \max(|\mu_1|, |\mu_n|), \text{ így a spektrálsugár akkor lesz 1 alatt, ha } f_n(\omega) < 1.$$

Ez pedig akkor teljesül, ha  $-((\lambda_n - 1)\omega + 1) < 1$ , vagyis  $0 < \omega < \frac{2}{1 - \lambda_n}$ .

## Nemlineáris egyenletrendszerek

Először az egyváltozós analízisből ismert differenciálás fogalmát általánosítjuk.

**2.1 Definíció** Az  $F : D \subseteq R^n \rightarrow R^m$  leképezés (Fréchet-)differenciálható az  $x^* \in \overset{\circ}{D}$  helyen, ha létezik olyan  $A \in R^{m \times n}$  mátrix, amellyel

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|F(x^* + h) - F(x^*) - Ah\|}{\|h\|} = 0.$$

Ekkor az  $A$  mátrixot az  $F$  függvény  $x^*$ -beli deriváltjának mondjuk és rá az  $F'(x^*)$  jelölést használjuk. Az  $F$  függvény differenciálható  $D$ -ben, ha bármely  $x^* \in \overset{\circ}{D}$  helyen létezik  $F'(x^*)$ . Ekkor értelmezett az  $F'(x) : \overset{\circ}{D} \subseteq R^n \rightarrow R^{m \times n}$  derivált függvény.

## Megjegyzés

1. Az előbbi definíciót kimondhattuk volna

$$\lim_{y \rightarrow x^*} \frac{\|F(y) - F(x^*) - A(y - x^*)\|}{\|y - x^*\|} = 0$$

alakban is.

2. Az  $m=n=1$  speciális eset ekvivalens a differenciálhatóság szokásos definíciójával:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|F(x^* + h) - F(x^*) - F'(x^*)h|}{|h|} = 0$$

3. Ha az  $A=F'(x^*)$  létezik, akkor egyértelmű, sőt  $A$  megegyezik a parciális deriváltak helyettesítési értékeiből álló  $m \times n$ -es függvény-mátrixszal ( $m=n$  esetén a Jacobi-mátrixszal):

$$a_{ij} = \left[ \frac{\partial F_i(x^*)}{\partial x_j} \right]_{i,j=1}^{m,n} \quad (F \text{ komponensenkénti előállítását felhasználva}).$$

**2.1 Példa** Határozzuk meg az alábbi függvény deriváltját:

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

**Megoldás**

$$F'(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

## Többszörös Newton-módszer

A többszörös érintőmódszert az egyváltozós módszer  $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

képlete helyett az  $x_{k+1} = x_k - (F'(x_k))^{-1} F(x_k)$  iterációs sorozattal határozzuk meg. Látható, hogy a derivált mátrix elemeit a megfelelő parciális deriváltakba való  $x = x_k$  helyettesítéssel kaphatjuk meg. Fontos azt is észrevennünk, hogy ez a formula csak akkor alkalmazható ha az  $F'(x_k)$  mátrix reguláris.

## 2.6 Tétel (A Newton-módszer lokális konvergencia-tétele)

*Legyen az  $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  leképezésnek  $x^* \in \overset{\circ}{D}$  zérushelye. Tegyük fel, hogy vannak olyan  $\beta, \gamma, \delta, \sigma$  pozitív konstansok, hogy  $\sigma = \frac{\beta\gamma}{2}$ ,  $\delta\sigma < 1$ ,  $S_\delta(x^*) \subseteq D$ , továbbá  $F$  folytonosan differenciálható  $S_\delta(x^*)$ -ban és*

a)  $\|(F'(x))^{-1}\| \leq \beta$  bármely  $x \in S_\delta(x^*)$ -ra,

b)  $\|F'(u) - F'(v)\| \leq \gamma\|u - v\|$  bármely  $u, v \in S_\delta(x^*)$ -ra.

Ekkor tetszőleges  $x_0 \in S_\delta(x^*)$  kezdőértéket választva az  $x_{k+1} = x_k - (F'(x_k))^{-1}F(x_k)$  képlettel definiált iterációs sorozat a következőket teljesíti ( $k \in \mathbb{N}^+$ )

(i)  $x_k \in S_\delta(x^*)$ ,

(ii)  $x_k \rightarrow x^*$  és  $x^*$  az  $F$  egyetlen zérushelye  $S_\delta(x^*)$ -ban,

(iii)  $\|e_k\| \leq \sigma\|e_{k-1}\|^2$ ,

(iv)  $\|e_k\| \leq \frac{1}{\sigma}(\sigma\|e_0\|)^{2^k}$ , ahol  $e_k = x_k - x^*$  (a hibavektor).

**2.1 Példa** Közelítsük az alábbi egyenletrendszer egyik gyökét a  $(-0.6, 0.6)$  kezdőértékből kiindulva a Newton-módszerrel

$$x^3 - 3xy^2 = 1$$

$$3x^2y - y^3 = 0$$

**Megoldás.** A Jacobi-mátrix és inverze:

$$J(x_n, y_n) = 3 \begin{pmatrix} x_n^2 - y_n^2 & -2x_n y_n \\ 2x_n y_n & x_n^2 - y_n^2 \end{pmatrix} \quad J^{-1}(x_n, y_n) = \frac{1}{3(x_n^2 + y_n^2)^2} \begin{pmatrix} x_n^2 - y_n^2 & 2x_n y_n \\ -2x_n y_n & x_n^2 - y_n^2 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = -0.4000, y_1 = 0.8629 \quad x_4 = -0.5000, y_4 = 0.8660$$

$$x_2 = -0.5047, y_2 = 0.8564 \quad x_5 = -0.4999, y_5 = 0.8660$$

$$x_3 = -0.4998, y_3 = 0.8660 \quad \dots$$

A kezdőértéktől függően az eljárással közelíthetők az egyenletrendszer gyökei:  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ,  $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ,  $(1, 0)$

A Jacobi-mátrix invertálásának elkerülése végett az eljárást sokszor az alábbi módon szokás használni a gyakorlatban:

1. INPUT:  $x_1, \varepsilon$ .
2.  $k=1$
3. SOLVE  $F'(x_k)s_k = -F(x_k)$  for  $s_k$
4.  $x_{k+1} = x_k + s_k$
5.  $k=k+1$
6. if  $\|x_{k+1} - x_k\| < \varepsilon$  then stop
7. goto 3

## Numerikus differenciálás

A deriváltak meghatározására alapvetően három módszert szoktak használni:

- a) „Kézzel” való deriválás
- b) Numerikus differenciálás
- c) Automatikus deriválás

a) A „kézzel” való derivált meghatározásakor a deriválási szabályokat alkalmazzuk és kiszámoljuk a derivált függvényt.

**2.2 Példa** Határozzuk meg az  $f(x) = (x-1)^2$  képlettel megadott valós függvény deriváltját az  $x = 2$  pontban.

**Megoldás** Mivel  $f'(x) = 2(x-1)$ , így  $f'(2) = 2$ .

b) A *numerikus differenciálás* során a derivált értéket differenciahányadossal közelítjük (ahol  $\delta$  valamilyen kicsi szám):

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta}$$

**2.3 Példa** Közelítsük az előbbi példában megadott függvény deriváltját az  $x = 2$  pontban numerikus differenciálással ( $\delta = 0.01$ ).

**Megoldás**

$$f'(2) \approx \frac{f(2+0.01) - f(2)}{0.01} = \frac{(2+0.01-1)^2 - (2-1)^2}{0.01} = 2.01$$

c) Az *automatikus deriválás* során együtt számoljuk az adott függvényre ismert kiszámítási eljárást az egyes műveletekhez tartozó deriválási szabályokkal. A változóhoz egy elempárt rendelünk, amelynek első komponense a függvényértéknek, a második a derivált értékének felel meg.

**2.4 Példa** Határozzuk meg az előbbi példákban szereplő függvény deriváltjának értékét az  $x=2$  pontban automatikus deriválással.

### Megoldás

Rendeljük az  $x$  változóhoz a  $(2,1)$  számpárt. A 2 az  $x$ -nek a 2 pontban vett helyettesítési értéke, az 1  $x$  deriváltjának értéke.

Az  $f(x)=(x-1)^2$  függvényben  $x$ -ből levonunk 1-et. Az 1-et is számpárral helyettesítjük  $(1,0)$ . Az  $x-1$  kivonást így elvégezzük a számpárokon, ahol az első komponensen ez  $2-1$ -et fog jelenteni, a második komponensen  $1-0$  adódik (mivel  $(f-g)'=f'-g'$ ). Az eddigi részeredmény tehát  $(1,1)$ .

A négyzetre emelés során az első komponens értéke 1 marad, a második komponens 2 lesz, mivel  $(fg)'=f'g+fg'$ .

Az eredmény tehát  $(1,2)$ , amelyből az első komponens az  $f$  helyettesítési értékét adja, a második komponens a derivált értéke az  $x=2$  pontban, vagyis 2.

### Függvényminimalizálás

A lokális minimum létezésének *elsőrendű szükséges feltétele*:

**2.7 Tétel** Ha az  $f:R^n \rightarrow R$  függvénynek az  $\underline{x}'$  pontban lokális szélsőértéke van, akkor  $f'(\underline{x}')=0$ , (koordinátás alakban  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}')=0$  ( $i=1,\dots,n$ ) más jelölésben  $\text{grad } f(\underline{x}')=0$  vagy  $\nabla f(\underline{x}')=0$ ).

**2.2 Példa** Legyen  $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$ . Ekkor

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 3x_2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 3x_2^2 - 3x_1.$$

Az  $f$  függvénynek lokális szélsőértéke a  $(0,0)$ , és az  $(1,1)$  pontban lehet.

*Másodrendű szükséges feltétel* a lokális minimum létezéséhez:

**2.8 Tétel** Ha az  $f$  függvénynek az  $\underline{x}'$  pontban lokális minimuma van, akkor  $f'(\underline{x}')=0$ , és  $f''(\underline{x}')$  (az ún. Hesse-mátrix) pozitív szemidefinit.



### 2.3 Példa Az előbbi példában

$$f''(x_1, x_2) = \left( \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1,2}^{i=1,2} = \begin{pmatrix} 6x_1 & -3 \\ -3 & 6x_2 \end{pmatrix} \quad (\text{Hesse-mátrix})$$

Így a  $(0,0)$  pontban  $f''(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ . Ez a mátrix nem pozitív szemidefinit, (sajátértékei különböző előjelűek: 3, -3). Tehát a  $(0,0)$  pontban a függvénynek nem lehet lokális minimuma. Az  $(1,1)$  pontban:  $f''(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ . Ez a mátrix pozitív definit, mivel mindkét főminorja pozitív, így az  $(1,1)$  pontban az  $f$  függvénynek lokális minimuma lehet.

*Másodrendű elégséges feltétel a lokális minimum létezéséhez:*

**2.9 Tétel** Legyen  $f'(\underline{x})=0$ . Ha  $f''(\underline{x})$  pozitív definit, akkor az  $f$  függvénynek az  $\underline{x}$  pontban lokális minimuma van.

**2.4 Példa:** Az előbbi példabeli függvénynek az  $(1,1)$  pontban lokális minimuma van, mert  $f''(1,1)$  pozitív definit.

**Megjegyzés:** Ha az előbbi tételben  $f''(\underline{x})$  indefinit, akkor  $\underline{x}$ -ben nincs lokális szélsőértéke  $f$ -nek. Ha  $f''(\underline{x})$  pozitív vagy negatív szemidefinit (de nem definit), akkor a tételeinkből semmilyen következtetés nem vonható le. Természetesen ebben az esetben is megvizsgálhatnánk a magasabb rendű deriváltakat, azonban a megvizsgálandó adatok nagy száma miatt, ez az út gyakorlati/számítástechnikai szempontból nem megfelelő.

A fentiekből egyértelműen kitűnik, hogy az egyenletrendszer megoldás és az optimalizálás, mint problémák között szoros kapcsolat van. Amennyiben egy  $f$  többváltozós függvénynek keressük a szélsőértékeit és a Newton-módszert az  $F(x) = \nabla f(x) = 0$  egyenletrendszerre alkalmazzuk, akkor  $F'(x) = \nabla_{xx}^2 f(x) = \left[ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{i,j=1}^n$ , ami  $f$  Hesse-mátrixa.

### 3. Folytonos függvények közelítései, négyzetes és egyenletes közelítések.

Tekintsük a  $V$  normált lineáris térnek egy  $n$  dimenziós  $G$  alterét és rögzítsük  $G$ -nek egy  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  bázisát. Tegyük fel, hogy  $f \in V$ .

Feladatunk  $f$ -nek a legjobb  $p = \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i$  alakú  $p^*$  közelítését meghatározni, amelyre a közelítés hibája minimális, vagyis

$$\|f - p^*\| \leq \|f - p\|, \text{ bármely } p \in G\text{-re.}$$

Vezessük be a következő jelölést:  $E_G(f) = \inf\{\|f - p\| \mid p \in G\}$ . Tehát  $p^*$  pontosan akkor lesz a legjobb közelítés, ha  $E_G(f) = \|f - p^*\|$ .

A kitűzött feladattal kapcsolatos alapvető kérdések:

- (i) Van-e olyan  $p^* \in G$ , amelyre  $E_G(f) = \|f - p^*\|$ ?
- (ii) Egyértelmű-e  $p^*$ ?
- (iii) Milyen tulajdonságok jellemzik  $p^*$ -ot?
- (iv) Hogyan becsülhető  $E_G(f)$ ?
- (v) Praktikusan, milyen módon határozható meg  $p^*$ ?

**3.1 Tétel** (A legjobban közelítő elem egzisztenciája) *A  $V$  normált lineáris tér tetszőleges  $f$  eleméhez létezik  $V$ -nek az  $n$  dimenziós  $G$  altérben  $f$ -et legjobban közelítő  $p^*$  elem.*

#### Bizonyítás

$E_G(f)$  definíciójából következik, hogy megadható olyan  $G$ -beli elemekből álló  $\{p_k\}$  sorozat, amelyre  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - p_k\| = E_G(f)$ . A háromszög-egyenlőtlenséget felhasználva  $\|p_k\| \leq \|f\| + \|f - p_k\|$ , amiből következőleg a  $\{p_k\}$  sorozat korlátos.

Vegyük a  $p_k = \sum_{i=1}^n \beta_i^{(k)} g_i$  előállítását, és így a  $\{\beta_k\} = (\beta_1^{(k)}, \beta_2^{(k)}, \dots, \beta_n^{(k)})$  korlátos vektorsorozatot (a sorozat korlátos, mert  $\left(\sum_{i=1}^n \beta_i^{(k)^2}\right)^{1/2}$  vektornormát határozza meg, így a vektornormák ekvivalenciája miatt van olyan  $\gamma$  konstans, hogy  $\left(\sum_{i=1}^n \beta_i^{(k)^2}\right)^{1/2} \leq \gamma \|p_k\|$  és a  $\{p_k\}$  sorozat korlátos). A  $\{\beta_k\}$  sorozat korlátossága miatt kiválasztható belőle egy konvergens részsorozat:

$$\beta_{k_i} \rightarrow \beta^*.$$

Tekintsük a  $p^* = \sum_{i=1}^n \beta_i^* g_i \in G$  elemet! Mivel a  $p_{k_i}$  részsorozatra  $\|p_{k_i} - p^*\| \rightarrow 0$ , így  $\|f - p^*\| \leq \|f - p_{k_i}\| + \|p_{k_i} - p^*\| \rightarrow E_G(f)$ , ahonnan adódik, hogy  $p^*$  az  $f$ -et legjobban közelítő elem.

Az általános esetben az unicitás nem garantált, előfordulhat, hogy egy elemnek végtelen sok legjobban közelítése van.

**3.1 Példa** Legyen  $V = R^2$ ,  $G = R^1 = \langle e_1 \rangle$  és  $f = e_2$ . Ha a  $\|\cdot\|_\infty$  vektornormát használjuk, akkor  $f$ -nek végtelen sok legjobban közelítése van, hiszen tetszőleges  $|\alpha| \leq 1$  mellett igaz  $\|f - \alpha e_1\|_\infty = 1 = E_G(f)$ .

**3.1 Definíció** A  $V$  normált lineáris tér szigorúan normált, ha tetszőleges  $0$ -tól különböző  $f$  és  $h$  elemére a háromszögegyenlőtlenségben fennálló  $\|f + h\| = \|f\| + \|h\|$  egyenlőségből következik, hogy a két elem lineárisan függő.

**3.2 Tétel** (A legjobban közelítő elem unicitása) Ha a  $V$  lineáris tér szigorúan normált, akkor tetszőleges  $f$ -hez legfeljebb egy  $G$ -beli legjobban közelítő  $p^*$  létezik.

## Bizonyítás

Tegyük fel, hogy két különböző legjobban közelítő elem létezik  $p^*$  és  $p^{**}$ . Ha ez így lenne, akkor  $q^* = 1/2(p^* + p^{**})$  is legjobban közelítő

elem lenne, mivel egy  $f$  elemet legjobban közelítő elemek a  $G$  tér konvex részalmazát alkotják. Valóban, hiszen ekkor ha  $\lambda \in [0,1]$ , akkor

$$\begin{aligned} \|f - (\lambda p^* + (1-\lambda)p^{**})\| &= \|\lambda(f - p^*) + (1-\lambda)(f - p^{**})\| \leq \\ &\leq \lambda \|f - p^*\| + (1-\lambda) \|f - p^{**}\| = \lambda E_G(f) + (1-\lambda)E_G(f) = E_G(f). \end{aligned}$$

Ekkor

$$E_G(f) \leq \|f - q^*\| = \|f - \frac{1}{2}(p^* + p^{**})\| \leq \frac{1}{2} \|f - p^*\| + \frac{1}{2} \|f - p^{**}\| = E_G(f),$$

ami azt jelenti, hogy teljesül a

$$\|\frac{1}{2}(f - p^*) + \frac{1}{2}(f - p^{**})\| = \|\frac{1}{2}(f - p^*)\| + \|\frac{1}{2}(f - p^{**})\|$$

egyenlőség. A tér szigorú normáltsága miatt azonban

$$\frac{1}{2}(f - p^*) = \alpha \frac{1}{2}(f - p^{**}).$$

Ez azonban azt jelentené, hogy  $p^* = p^{**}$ , ami ellenkezik a kiindulásunkkal.

## Négyzetes közelítések

**3.2 Definíció** A  $V$  lineáris teret euklideszi térnek (vagy lineáris belsőszorzat-térnek) nevezzük, ha értelmezve van a tér tetszőleges  $f, h$  elemeinek  $[f, h]$  belső szorzata, azaz van olyan  $[.,.]: V \times V \rightarrow R$  leképezés, hogy

- (i)  $[f, f] \geq 0$  és ha  $[f, f] = 0$ , akkor  $f = 0$ ,
- (ii)  $[f, h] = [h, f]$ ,
- (iii)  $[f+g, h] = [f, h] + [g, h]$ ,
- (iv)  $[\alpha f, h] = \alpha [f, h]$ .

Euklideszi-térben teljesül a Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij egyenlőtlenség.

**3.3 Tétel** Euklideszi térben tetszőleges  $f$  és  $h$  elemekre

$$|[f, h]| \leq \sqrt{[f, f]} \sqrt{[h, h]}.$$

### Bizonyítás

$$0 \leq [f - th, f - th] = [h, h]t^2 - 2t[f, h] + [f, f]$$

Az előbbi egyenlőtlenség minden  $t$ -re teljesül, ami csak úgy lehetséges, ha  $t$ -re másodfokú függvény diszkriminánsa nem pozitív, tehát

$4([f, h])^2 - 4[f, f][h, h] \leq 0$ , amiből gyökvonással a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk.

**3.4 Tétel** Az  $\|f\| = \sqrt{[f, f]}$  definícióval adott  $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}^+$  leképezéssel  $V$  normált vektortér lesz.

### Bizonyítás

- a)  $\|f\| \geq 0$ , és ha  $\|f\| = 0$  akkor  $f=0$  a belső szorzat (i) tulajdonsága miatt,
- b)  $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$  a (iv) tulajdonság miatt,
- c) a háromszög-egyenlőtlenség a CSB-egyenlőtlenség segítségével bizonyítható

$$\|f + h\|^2 = [f + h, f + h] = [f, f] + 2[f, h] + [h, h] \leq [f, f] + 2\|f\|\|h\| + [h, h] = (\|f\| + \|h\|)^2.$$

**3.5. Tétel** Minden euklideszi tér szigorúan normált.

**Bizonyítás.** Ha  $f$  és  $g$  a tér két tetszőleges  $0$ -tól különböző eleme, akkor az alábbi egyenlőtlenségek teljesülnek:

$$\|f + g\|^2 = [f + g, f + g] = [f, f] + 2[f, g] + [g, g] \leq \|f\|^2 + 2\|f\|\|g\| + \|g\|^2 = (\|f\| + \|g\|)^2. \text{ Itt végig egyenlőségek viszont csak úgy állhatnak, ha } f \text{ és } g \text{ lineárisan függők.}$$

Euklideszi terekben a  $p^*$  legjobban közelítő elemre „geometriai” jellemzés adható. Az euklideszi vektornormával ellátott  $\mathbb{R}^n$  vektortér esetében ez annak a szemléletes ténynek felel meg, hogy  $f$ -et legjobban éppen a  $G$  alterre való merőleges vetülete közelíti.

**3.6. Tétel** Legyen  $V$  tetszőleges euklideszi tér,  $G$  a  $V$  altere és  $f$   $V$ -beli. A  $G$ -beli  $p^*$  akkor és csak akkor lesz  $f$  legjobb közelítése, ha

$$[f - p^*, g] = 0 \quad \text{bármely } G\text{-beli } g\text{-re.}$$

**3.7. Tétel** *A  $V$  euklideszi tér tetszőleges  $f$  elemének pontosan egy  $G$ -beli  $p^*$  legjobb közelítése létezik.*

Véges  $n$  dimenziós euklideszi terekre a legismertebb példákat az  $R^n$  terek adják, sőt bármely  $n$  dimenziós euklideszi tér izomorf  $R^n$ -nel.

Az alkalmazások szempontjából legfontosabbak azok a függvényterek, ahol a tartóhalmaz elemei adott tulajdonságú függvények, a belső szorzat fogalmát pedig valamilyen integrálfogalomból vezetik le.

Például, ha a Riemann-féle integrálfogalmat használva, az  $[a,b]$  intervallumon folytonos függvényekre definiáljuk a

$$[f(x), g(x)] = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

belső szorzatot, akkor euklideszi teret kapunk, amelyben igazolható az alábbi tétel.

**3.8 Tétel** *Ha folytonos függvényekből álló  $f_n(x)$  függvénysorozat egyenletesen tart  $f(x)$ -hez  $[a,b]$ -n, akkor az előbbi euklideszi térbeli konvergencia is igaz:*

$$\|f - f_n\|_2^2 = \int_a^b (f(x) - f_n(x))^2 dx \rightarrow 0.$$

(Emlékeztető:  $(f_n)$ -re azt mondjuk *egyenletesen konvergál*  $f$ -hez, ha minden pozitív  $\varepsilon$ -hoz létezik egy  $n_0 \in N$  úgy, hogy minden  $x \in D_f$  és minden  $n \geq n_0$ -ra  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ )

### **Egyenletes közelítések**

Az  $f \in C[a,b]$  folytonos függvényt közelítjük egy rögzített  $G = \langle g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x) \rangle$  altérben felírható  $p(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i(x)$  alakú általánosított polinomokkal. A  $C[a,b]$ -t azonban mint normált lineáris teret tekintjük a  $\|g(x)\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |g(x)|$  maximum- vagy más néven Csebisev-normával.

A fenti közelítést szokás egyenletes vagy Csebisev-approximáció néven emlegetni.

A **3.1 Tétel** alapján a közelítő elem létezése garantált. A  $C[a,b]$  tér azonban nem szigorúan normált, így az unicitásról még nem mondhatunk semmit.

**3.2 Példa** Az  $f(x) \equiv 1$  és  $g(x) = x$  függvények a  $C[-1,1]$  tér elemei. Könnyű látni, hogy

$$2 = \|f(x) + g(x)\|_{\infty} = \|f(x)\|_{\infty} + \|g(x)\|_{\infty} = 1 + 1$$

viszont az  $f$  és  $g$  mégsem lineárisan függők, hiszen nem teljesül az  $f(x) = \alpha g(x)$ , vagyis a tér nem szigorúan normált.

A közelítő elem unicitása pontosan a Haar-alterek esetében teljesül. (Haar Alfréd (1885-1933) a szegedi matematikai iskola egyik megalapítója volt.)

**3.3 Definíció** A  $G$   $n$  dimenziós alteret Haar-térnek nevezzük, ha bármely  $p(x) \in G$ ,  $p(x)$  nem azonosan 0 általánosított polinomnak legfeljebb  $n-1$  zérushelye van  $[a,b]$ -ben.

**3.9 Tétel** Legyen  $G = \langle g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x) \rangle$  a  $C[a,b]$  tér  $n$  dimenziós altere. Tetszőleges  $f \in C[a,b]$ -re a  $p^*(x) \in G$  egyenletesen legjobban közelítő függvény pontosan akkor lesz egyértelmű, ha  $G$  Haar-altér.

A  $G$  Haar-tér bázisait Csebisev-féle függvényrendszereknek nevezik. Néhány példa Csebisev-féle függvényrendszerre:

- a) az  $\{1, x, \dots, x^{n-1}\}$  hatványfüggvény-rendszer,
- b) az  $\{1, e^x, \dots, e^{(n-1)x}\}$  rendszer,
- c) az  $\{1, \sin(x), \cos(x), \dots, \sin(n-1)x, \cos(n-1)x\}$  trigonometrikus függvényrendszer a  $[0, 2\pi)$  intervallumon.

## Hermite-féle interpoláció

Az alapprobléma:

Adottak az  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  páronként különböző alappontok, az  $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$  1-nél nem kisebb számok, az  $m = \sum_{i=1}^n m_i$  konstans, és az egyes alappontokhoz tartozó  $\{f_i^0, f_i^1, \dots, f_i^{m_i}\}$  értékek  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Határozzunk meg egy olyan legfeljebb  $m-1$ -ed fokú  $H_m(x)$  Hermite-féle interpolációs polinomot, amely eleget tesz a

$$H_m^{(j)}(x_i) = f_i^j \quad i = 1, 2, \dots, n \quad j = 0, 1, \dots, m_i - 1$$

interpolációs feltételeknek, ahol  $H_m^{(j)}(x_i)$  a  $H_m(x)$  polinom  $j$ -edik deriváltjának az  $x = x_i$  helyen vett helyettesítési értékét jelöli.

Ha speciálisan  $m_1 = m_2 = \dots = m_n = 1$  (vagyis  $m=n$ ), akkor a Lagrange-féle interpolációs problémához jutunk.

Ha  $n=1$ , akkor a Hermite-féle interpolációs polinom az  $x_1$  körüli Taylor-polinomot adja.

Ha a polinomot  $H_m(x) = \alpha_0 x^{m-1} + \alpha_1 x^{m-2} + \dots + \alpha_m$  alakban keressük, akkor az interpolációs feltételek az alábbi kvadratikus mátrixú lineáris egyenletrendszerrel adják:

$$\begin{aligned} \alpha_0 x_1^{m-1} + \alpha_1 x_1^{m-2} + \dots + \alpha_m &= f_1^0 \\ \vdots \\ \alpha_0 x_n^{m-1} + \alpha_1 x_n^{m-2} + \dots + \alpha_m &= f_n^0 \\ (m-1)\alpha_0 x_1^{m-2} + (m-2)\alpha_1 x_1^{m-3} + \dots + \alpha_{m-1} &= f_1^1 \\ \vdots \\ (m_n - 1)\alpha_0 x_1^{m-1-(m_n-1)} + \dots &= f_n^{m_n-1} \end{aligned}$$

A Hermite-féle interpolációs probléma egyértelműen megoldható, vagyis tetszőlegesen adott interpolációs feltételrendszerhez mindig megadható pontosan egy Hermite-féle interpolációs polinom, amely azt kielégíti.



Abban a speciális esetben ha  $m = 2n$  és  $m_i = 2$  ( $1 \leq i \leq n$ ), vagyis ha a függvényérték és az első derivált értéke adott minden pontban, akkor Hermite-Fejér interpolációról is szokás beszélni. Ekkor a  $H_{2n}(x)$  interpolációs polinom felírható a Lagrange-féle bázispolinomok segítségével a következő módon:

$$H_{2n}(x) = \sum_{i=1}^n f_i^0 (1 - 2(x - x_i)L'_i(x_i))L_i^2(x) + \sum_{i=1}^n f_i^1 (x - x_i)L_i^2(x).$$

#### 4. Numerikus integrálás, Gauss-kvadratura, kvadratura-sorozatok konvergenciája

Legyen  $\rho$   $[a,b]$ -n értelmezett nemnegatív, folytonos függvény, amelynek  $[a,b]$ -ben véges sok zérushelye van. Közelítsük az  $f$  függvény rögzített  $[a,b]$  intervallumhoz és rögzített  $\rho$  ún. súlyfüggvényhez tartozó

$$I(f) = \int_a^b f(x)\rho(x)dx$$

integrálját  $I(f) \approx Q_n(f) = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$  alakú kvadratura-formulával.

Az ilyen súlyfüggvényes integrálok bevezetése több szempontból is hasznosnak bizonyult. Ha sok olyan integrált kell kiszámítani, amelyek tartalmaznak egy közös tényezőt, érdemes ezt venni súlyfüggvénynek. Ilyen jellegű problémákkal találkozhatunk a valószínűség-számításban, de sok gyakorlati fizikai és kémiai problémánál is.

Felfoghatók ezek a kérdések úgy is, mint a korábban tanult interpolációs kvadratura-formulák általánosítása, ahol is korábban a  $\rho(x) \equiv 1$  speciális esettel dolgoztunk.

A továbbiakban azt próbáljuk meghatározni, hogy melyek a „legjobb” kvadratura-formulák, mennyi lehet a rendjük maximálisan.

Adott kvadratura-formula pontosságát az  $R_n(f) = I(f) - Q_n(f)$  képlethiba segítségével definiáljuk. A formula pontos  $f(x)$ -re, ha  $R_n(f) = 0$ .

**4.1 Definíció** A  $Q_n(\cdot)$  kvadratúra-formula rendje  $r$ , ha bármely legfeljebb  $r$ -ed fokú  $p(x)$  polinomra az pontos, de van olyan  $r+1$ -ed fokú  $q(x)$ , amire már  $R_n(q) \neq 0$ .

**4.1 Tétel** A  $Q_n(\cdot)$   $n$  alappontos kvadratúra-formula rendje legfeljebb  $2n-1$  lehet.

**Bizonyítás** Legyen  $\omega_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$ , ahol  $x_1, x_2, \dots, x_n$  a kvadratúra-alappontok. Tekintsük a  $q_n(x) = (\omega_n(x))^2$   $2n$ -ed fokú polinomot. Mivel

$$0 < \int_a^b (\omega_n(x))^2 dx = I(q) \neq Q_n(q) = \sum_{i=1}^n w_i (\omega_n(x_i))^2 = 0,$$

így erre már nem lesz pontos a formula.

**4.3 Definíció** Adott  $[a,b]$  intervallumhoz és  $\rho$  súlyfüggvényhez tartozó maximális rendű kvadratúra-formulákat Gauss-féle kvadratúra-formuláknak nevezzük.

**4.2 Tétel** Az  $[a,b]$  intervallumhoz és a  $\rho(x)$  súlyfüggvényhez tartozó tetszőleges  $n$  alappontos  $Q_n(\cdot)$  interpolációs kvadratúra-formula rendje akkor és csak akkor  $2n-1$ , ha bármely legfeljebb  $n-1$ -ed fokú  $p(x)$  polinomra  $\int_a^b p(x)\omega_n(x)\rho(x)dx = 0$ , vagyis ha az alappontokra felírt  $\omega_n(x)$   $n$ -ed fokú polinom ortogonális bármely legfeljebb  $n-1$ -ed fokú  $p(x)$  polinomra.

( $f(x)$  és  $g(x)$  ortogonális, ha  $[f,g]=0$ , ahol  $[f,g] = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx$ .)

**4.2 Definíció.** A rögzített  $[a,b]$  intervallumhoz és  $\rho(x)$  súlyfüggvényhez tartozó ortogonális polinomrendszeren polinomok olyan

$$\{p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x), \dots\}$$

sorozatát értjük, amelyben

(i)  $p_n(x)$   $n$ -ed fokú polinom

(ii)  $[p_i, p_n] = \int_a^b p_i(x)p_n(x)\rho(x)dx = 0$ , ha  $i \neq n$

**4.3 Tétel** Tetszőlegesen rögzített  $[a,b]$  intervallum,  $\rho(x)$  súlyfüggvény és pozitív  $n$  egész szám esetén  $Q_n(\cdot)$  Gauss-kvadrátúra

(i) egyértelműen létezik és rendje  $2n-1$ ,

(ii) alappontjai a  $p_n(x)$   $n$ -edik ortogonális polinom  $x_1, x_2, \dots, x_n$  gyökei,

súlyait a  $\omega_i = \int_a^b \frac{p_n(x)}{(x-x_i)p_n'(x_i)} \rho(x) dx$  integrálok adják.

### Kvadrátúra-sorozatok konvergenciája

A numerikus integrálási feladatok többségénél előre nem ismeretes, hogy melyik formulát kell alkalmazni a kívánt pontosság eléréséhez. Ezért általában kvadrátúra-formulák egy sorozatát vesszük, s ilyen sorozattal számítjuk ki a közelítéseket, míg csak el nem érjük az integrál adott hibahatáron belüli értékét.

**4.4 Tétel** Tetszőleges  $[a,b]$  intervallumhoz és  $\rho(x)$  súlyfüggvényhez tartozó Gauss-kvadrátúrák sorozata konvergens  $Q_n(f) \rightarrow I(f)$  tetszőleges  $f \in C[a,b]$ -beli folytonos függvényre.

A Newton-Cotes formulák sorozata azonban általában nem konvergens.

## 5. Differenciálegyenletek

A differenciálegyenletek olyan egyenletek, amelyekben az ismeretlen egy differenciálható függvény, és az egyenlet a függvény és ennek deriváltja(i) között teremt kapcsolatot. Például:

$$y'' + 6y' + 9y = 2e^{-3x}$$

(Itt az egyszerűbb írásmód kedvéért  $y(x)$  helyett csak  $y$ -t írunk).

A problémák differenciálegyenletben való megfogalmazása a fizikában, mérnöki tudományokban, a közgazdaságtanban és még számos tudományban alapvető szerepet töltenek be.

A differenciálegyenletek két fő típusát alkotják a *közönséges* és a *parciális* differenciálegyenletek. A közönséges differenciálegyenletek esetében az egyenlet egy egyváltozós függvényre van felírva, parciális differenciálegyenlet esetén az ismeretlen függvény többváltozós és az egyenletben szereplő deriváltjai parciális deriváltak.

## **Közönséges differenciálegyenletek**

$n$ -ed *rendűnek* nevezzük a differenciálegyenletet, ha a benne szereplő magasabb rendű deriváltak között az  $n$ -edik a legnagyobb.

Az  $n$ -ed rendű közönséges differenciálegyenlet *általános megoldása* az a függvény, mely pontosan  $n$  számú egymástól független állandót (paramétert) tartalmaz, és azonosan kielégíti az adott differenciálegyenletet.

Az  $n$ -ed rendű közönséges differenciálegyenlet *partikuláris megoldása* az a függvény, mely legfeljebb  $n-1$  számú egymástól független állandót (paramétert) tartalmaz, és azonosan kielégíti az adott differenciálegyenletet. Speciális esetben egyetlen paramétert sem tartalmaz a partikuláris megoldás. Általában (de nem mindig) az általános megoldás tartalmazza az összes partikuláris megoldást is, melyet úgy kaphatunk, hogy a paramétereknek konkrét értékeket adunk. A differenciálegyenlet partikuláris megoldásának kiválasztásához feltételeket kell megadni. Egy  $n$ -ed rendű közönséges differenciálegyenlethez meg lehet adni a független változó egy adott értékéhez tartozó függvényértéket, az első, második, ...,  $(n-1)$ -edik derivált értékét. Ezeket nevezzük *kezdeti feltételnek*. Amennyiben mind az  $n$  számú adatot megadjuk, a partikuláris megoldás nem fog paramétert tartalmazni.

## **Elsőrendű (lineáris) egyenletek**

*Elsőrendű* differenciálegyenletről beszélünk akkor, ha az  $y$  (az ismeretlen függvény) és deriváltjai csak legfeljebb az első hatványon szerepelnek és nem szerepel az egyenletben ilyen tényezők szorzata.

Elsőrendű differenciálegyenletek közelítő megoldása

## Picard iterációs módszere

Tekintsük az  $y' = f(x, y)$  elsőrendű differenciálegyenletet az  $y(x_0) = y_0$  kezdeti feltétellel. A differenciálegyenlet partikuláris megoldása fokozatos közelítéssel az alábbi módon határozható meg.

Ha az  $y' = f(x, y)$  egyenletben szereplő  $f(x, y)$  függvény valamilyen

$$|x - x_0| < a,$$

$$|y - y_0| < b$$

tartományban korlátos ( $f(x, y) \leq K$ ) és folytonos, továbbá eleget tesz az

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq M|y_2 - y_1|$$

Lipschitz-féle feltételnek ( $M$  pozitív konstans), akkor az

$$y_1(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(t, y(x_0)) dt,$$

$$y_n(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt$$

függvénysorozat  $n \rightarrow \infty$  esetén a differenciálegyenlet  $y = y(x)$  megoldásához konvergál az  $|x - x_0| < \min\left(a, \frac{b}{K}\right)$ .

**5.1 Példa** Határozzuk meg az  $y' = xy$  differenciálegyenletnek az  $y(0) = 1$  kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldását Picard-féle módszerrel.

### Megoldás

Mivel az  $f(x, y) = xy$  függvény tetszőleges véges  $x$  és  $y$  értékre korlátos és eleget tesz a Lipschitz-féle feltételnek, hiszen

$$|xy_2 - xy_1| = |x||y_2 - y_1| \leq M|y_2 - y_1|,$$

ezért az eljárás alkalmazható.

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x t \cdot 1 dt = 1 + \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^x = 1 + \frac{x^2}{2}.$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x t \left( 1 + \frac{t^2}{2} \right) dt = 1 + \left[ \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} \right]_0^x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x t \left( 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} \right) dt = 1 + \left[ \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} + \frac{t^6}{48} \right]_0^x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{48}$$

$$y_4(x) = 1 + \int_0^x t \left( 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} + \frac{t^6}{48} \right) dt = 1 + \left[ \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} + \frac{t^6}{48} + \frac{t^8}{384} \right]_0^x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{48} + \frac{x^8}{384}$$

Teljes indukcióval igazolható, hogy

$$y_n(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!} \left( \frac{x^2}{2} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left( \frac{x^2}{2} \right)^3 + \dots + \frac{1}{n!} \left( \frac{x^2}{2} \right)^n.$$

Így a kezdeti érték feladat megoldása:

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left( \frac{x^2}{2} \right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \frac{x^2}{2} \right)^k = e^{\frac{x^2}{2}}$$