Bizonytalanság

November 5, 2009

Bizonytalanság

Legyen az A_t akció az, hogy t perccel a repülőgép indulása előtt indulunk otthonról. Kérdés, hogy A_t végrehajtásával kiérünk-e időben?

Problemák:

1. hiányos ismeret (utak állapota, más vezetők tervei, stb.)
2. mérés pontatlansága (útinform rádióból)
3. bizonytalanság az akciók kimentelében (kilyukad-e a gumi, stb.)
4. a forgalom modellezése (és előrejelzése) kezelhetetlen komplexitású

Logikai következtetéssel

1. megkockáztatja a tévedést: "A_{25} időben odaér"
   vagy
2. olyan következtetésre jut ami nem használható a döntés meghoztalára:
   "A_{25} időben odaér HA nincs baleset a hídon
   és nem esik az eső stb. . ."
3. A_{1440} biztosan odaérünk . . .

A bizonytalanság kezelése

Logikában:
Tfh az autónak nem lapos a kereke
Tfh A_{25} időben odaér ha nincs ellentmondó bizonyíték
Milyen feltevésekkel élhetünk? Hogyan kezeljük a nem ismert bizonyítékokat?
Valószínűség
Az ismert bizonyítékok birtokában,
A_{25} időben odaér 0.04 valószínűséggel
A **valószínűség** a *meggyőződés*/hit mértéke.
(**Fuzzy logika** az *igazság foká*t nézi és NEM bizonytalanságot.)

Valószínűség

A gyakorlatban a tudás mindíg tökéletlen, mert

- lusták vagyunk összegyűjteni a szabályokat (szakértői tudás) vagy a tényeket (tesztek elvégzése) vagy
- elméleti és gyakorlati tudatlanság folytán.

Valószínűség: A tudás tökéletlenségének (azaz ismeretlen tényeknek és szabályoknak) véletlen hatásként való kezelése.
pl., $P(A_{25}|\text{a rádió nem jelentett balesetet}) = 0.06$
Egy állítás/esemény valószínűsége változik annak függvényében hogy mit tapasztalunk. pl.,
$P(A_{25}|\text{a rádió nem jelentett balesetet, 19h a gép indulása}) = 0.15$

Döntéshozatal bizonytalan környezetben

Tfh., hogy ismerjük az alábbiakat:

$$
\begin{aligned}
P(A_{25} \text{ időben odaérünk}|\ldots) &= 0.04 \\
P(A_{90} \text{ időben odaérünk}|\ldots) &= 0.70 \\
P(A_{120} \text{ időben odaérünk}|\ldots) &= 0.95 \\
P(A_{1440} \text{ időben odaérünk}|\ldots) &= 0.9999
\end{aligned}
$$

Melyiket válasszuk?
Függ a **preferenciáktól** (pl. inkább lekéssük a gépet vagy a reptéren órákat várunk)
Egy cselekvés kimenetelének az értéke lehet pl a lehetséges kimenetelek értékeinek a valószínűségekkel súlyozott átlaga (azaz a várható érték).

Véletlen változók

Egy véletlen változónak van

- *neve* A (pl. baleset a hídon) és
- *domain*je D (pl. {van, nincs}).

Minden $d \in D$ értékre az $A = d$ egy *elemi kijelentés*.

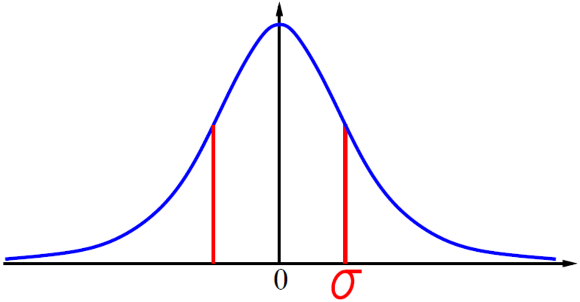
Véletlen változók típusai

A következő típusok vannak domain alapján:

- logikai: ekkor a domain igaz, hamis. pl. Fogfájás (a név mindíg nagybetűvel írva). Ekkor a ”Fogfájás=igaz” egy elemi kijelentés. Röviden a ”Fogfájás=igaz” helyett azt írjuk hogy ”fogfájás” (kisbetűvel). Pl ”fogfájás $\wedge$ $\neg$ luk” azt rövidíti hogy ”Fogájás=igaz $\wedge$ Luk=hamis”.
- diszkrét: megszámlálható domain. pl. Idő, ahol a domain pl nap, eső, felhő, hó. Röviden az ”Idő=nap” elemi kijelentés helyett azt írjuk hogy ”nap”.
- folytonos: X véletlen változó, $D \subseteq \mathbb{R}$. pl. $(X = 3,2)$ egy elemi kijelentés.

Folytonos változók

eloszlásfüggvény: $F(x) = P(A < x)$
sűrűség fgv. $f()$, ha $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.
Pl gausz sűrűségfgv: $P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$



Elemi események

- *Komplex kijelentés*eket képezhetünk kijelentések fölött a szokásos logikai operátorokkal ($\vee, \wedge, \neg$). Folytonos változóknál pl $X < 3,2$.
- *Elemi esemény* (lehetséges világ): elemi kijelentések konjunkciója, ahol a nyelvben szereplő véletlen változók mindegyike pontosan egyszer szerepel (értéket kap).

Pl. ha két logikai véletlen változónk van: Luk és Fogfájás, akkor négy elemi esemény van: ”luk∧fogfájás”, ”luk∧¬fogfájás”, ”¬luk∧fogfájás””¬luk∧¬fogfájás”.

Elemi események tulajdonságai

1. az elemi események egymást kölcsönösen kizárják és halmazuk kimerítő, azaz minden lehetséges világot (döntési szituációt) pontosan egy elemi esemény ír le (modellez)
2. egy elemi esemény természetes módon minden lehetséges elemi kijelentéshez igazságértéket rendel
3. minden kijelentés logikailag ekvivalens a neki nem ellentmondó elemi eseményeket leíró kijelentések halmazával.
   pl luk $\equiv$ (luk $\wedge$ fogfájás) $\vee$ (luk $\wedge\neg$ fogfájás)

Jelölések

- $P(a)$ az a kijelentés *valószínűsége*, pl P(Idő=nap) = 0,5.
- $P(A)$ az A véletlen változó *eloszlása*, pl P(Idő=nap) = 0,2, P(Idő=eső) = 0,3 stb.
- $P(A, B)$ az A és B véletlen változók *együttes eloszlás*a (táblázat).

Feltételes valószínűség

$P(a|b)$ az a kijelentés *feltételes valószínűsége*, feltéve hogy az összes tudásunk b. pl.$P(luk|\neg fogfajas) = 0,2$

Def.: $P(a|b) = P(a \wedge b)/P(b)$ (feltéve hogy $P(b) > 0$).

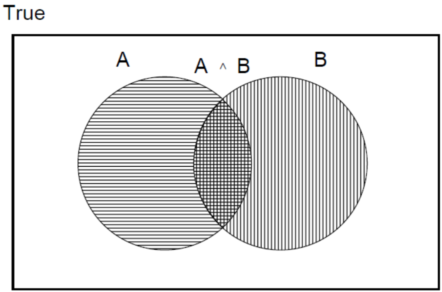
Szorzatszabály: $P(a \wedge b) = P(a|b)P(b) = P(b|a)P(a)$.

$P(A|B)$ egy táblázat $P(A = a_i|B = b_j), \forall(a_i, b_j)$

Lánc szabály: $P(X_1, ...X_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i|X_1, ...X_{i-1})$

A valószínűség axiómái

1. $0 \leq P(a) \leq 1$
2. $P(igaz) = 1,\ P(hamis) = 0$
3. $P(a \vee b) = P(a) + P(b) - P(a \wedge b)$



Egyéb tulajdonságok

- $P(\neg a) = 1 - P(a)$
  $P(a \vee \neg a) = P(a) + P(\neg a) - P(a \wedge \neg a)$
  $1 = P(a) + P(\neg a) - 0$
- $1 = \sum_{a \in D} P(A = a)$
  $P(A = a \wedge A = b) = 0$
- $P(a) = \sum_{e_i \in e(a)} P(e_i)$

Teljes együttes eloszlás

Luk	Fogfájás	Beakad	P()
nem	nem	nem	0.567
nem	nem	igen	0.144
nem	igen	nem	0.064
nem	igen	igen	0.016
igen	nem	nem	0.008
igen	nem	igen	0.072
igen	igen	nem	0.012
igen	igen	igen	0.108

Valószínűségi következtetés

$P(luk \wedge \neg beakadas) = 0.008 + 0.012$
$P(luk \vee fogfajas) = 0.108 + 0.012 + 0.072 + 0.008 + 0.016 + 0.064$
(marginális valószínűség: elemi kijelentések valószínűsége)
általánosan: $P(\overline{X}) = \sum_{y \in \overline{Y}} P(\overline{X}, y)$
Feltételfelodás: $P(\overline{X}) = \sum_{y \in \overline{Y}} P(\overline{X}|y)P(y)$

Valószínűségi következtetés

Ismerjük:

- tények (pl. fogfájás)
- általános tudás (teljes együttes eloszlás)

Kérdés: feltételes valószínűség, pl $P(luk|fogfajas) = ?$

$$P(Luk|fogfajas) = \frac{1}{P(fogfajas)} P(Luk, fogfajas)$$

Normalizációval: $P(A|b) = \alpha P(A, b) = \alpha \sum_x P(A, b, x)$

Függetlenség

Két változó **független** ha az egyik nem tartalmaz információt a másikról.

a és b kijelentések függetlenek akkor és csak akkor ha

$P(a \wedge b) = P(a)P(b)$

$P(A, B) = P(A)P(B)$, $P(A|B) = P(A)$

Tömörítés: ha két fglen. részhalmaz akkor 2^n helyett $2^k + 2^m$ valószínűség

A függetlenség *szimetrikus reláció* a változók felett, míg az okozati kapcsolat aszimetrikus.

Feltételes függetlenség

a és b kijelentések feltételesen függetlenek c feltevésével akkor és csak akkor ha $P(a \wedge b|c) = P(a|c)P(b|c)$ (például a fogfájás és a beakadás közös oka a luk)

$P(A, B|C) = P(A|C)P(B|C)$

Tömörítés: $P(A, B, C) = P(A, B|C)P(C) = P(A|C)P(B|C)P(C)$

Bayes szabály

$P(a \wedge b) = P(a|b)P(b) = P(b|a)P(a)$

$\Longrightarrow$ **Bayes szabály:** $P(a|b) = \frac{P(b|a)P(a)}{P(b)}$

$P(Ok|Okozat) = \frac{P(Okozat|Ok)P(Ok)}{P(Okozat)}$

pl. $P(Influenza|Fejfajas) = \alpha P(Fejfajas|Influenza)P(Influenza)$

Naív Bayes következtetés

Naiv: a tényváltozók páronként feltételesen függetlenek a célváltozót feltéve:

$$P(A|B_1,...B_n) = \alpha P(B_1,...B_n|A)P(A) = \alpha P(A) \prod_{i=1}^{n} P(B_i|A)$$

Összegzés

- A valószínűség alkalmas a bizonytalan tudás formalizálására
- Együttes eloszlások definiálják az elemi eseményeket
- Valószínűségi következtetések levonhatók elemi események valószínűségének összegzésével
- A teljes együttes eloszlások tömörítése szükséges
- A tömörítés megoldható a (feltételes) függetlenségek kiaknázásával