Bonyolultságelmélet

Monday 3rd October, 2016, 16:59

Memó: első kiszámítható teljes problémáink

Emlékezzünk: egy $\mathcal{C}$-beli probléma $\mathcal{C}$-teljes, ha **minden** $\mathcal{C}$-beli probléma visszavezethető rá.

A HÁLÓZAT-KIÉRTÉKELÉS probléma $\mathbf{P}$-beli.

Tétel

A HÁLÓZAT-KIELÉGÍTHETŐSÉG probléma $\mathbf{NP}$-teljes.

Következmény (Cook tétele)

A SAT probléma is $\mathbf{NP}$-teljes.

SAT NP-teljességéről

Mivel a SAT probléma **NP**-teljes,

- ha polinomidőben megoldható lenne, akkor $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$. (Ebben persze lehet **hinni**. De eddig még senki nem oldotta meg polinomidőben...)
- Nem ismert rá **szubexponenciális** algoritmus.
- Ilyenkor bevethetők (a teljesség igénye nélkül):
  - **heurisztikák**
  - **randomizált algoritmusok** alkalmazása
  - a követelmények **relaxálása...** (pl. nem az összes, de minél több klóz egyszerre történő kielégítése)
  - ...majd a relaxált követelmények **approximálása**
  - vagy olyan **speciális esetek** keresése, melyre van hatékony algoritmus.

A kielégíthetőség változatai

A SAT problémának vizsgálhatjuk **speciális eseteit**, pl:

- klózonként csak **konstans sok** literált engedünk meg
- csak speciális (pl. **Horn**) alakú klózokat engedünk meg

Definíció

Legyen $k \geq 1$. A kSAT a SAT azon speciális esete, amelyben minden klóz pontosan k (nem feltétlenül különböző) literálból áll.

3SAT

Állítás

3SAT **NP**-teljes, és így $k \geq 3$ esetén kSAT **NP**-teljes.

Bizonyítás

$$
\begin{array}{rcl}
\ell & \mapsto & \ell \vee \ell \vee \ell \\
\ell_1 \vee \ell_2 & \mapsto & \ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_2 \\
\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3 & \mapsto & \ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3 \\
\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3 \vee \ell_4 & \mapsto & (\ell_1 \vee \ell_2 \vee x) \wedge (\neg x \vee \ell_3 \vee \ell_4) \\
\vdots & & \vdots \\
\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ldots \vee \ell_n & \mapsto & (\ell_1 \vee \ell_2 \vee x) \wedge (\neg x \vee \ell_3 \vee y) \wedge \\
 & & (\neg y \vee \ell_4 \vee z) \wedge \ldots \wedge (\neg u \vee \ell_{n-1} \vee \ell_n)
\end{array}
$$

Állítás

Legyen $\varphi = c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots\ldots \wedge c_k$ konjunktív normálformájú formula. Minden c_i klózhoz legyen c_i' az előzőekben adott kifejezés, ahol minden kifejezésben új változókat használunk.
Ekkor φ akkor és csak akkor kielégíthető, ha $\varphi' = c_1' \wedge c_2' \wedge \ldots \wedge c_k'$ az.

Mivel SAT $\leq_{\mathcal{P}}$ 3SAT és 3SAT $\in \mathbf{NP}$, ezért SAT $\mathbf{NP}$-teljességéből következik, hogy 3SAT is $\mathbf{NP}$-teljes.

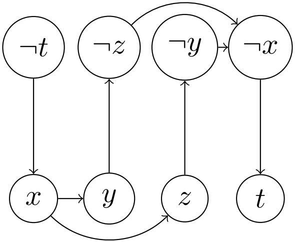
A 2SAT problémára viszont adható hatékony algoritmus.
Legyen φ egy $2-CNF$ (minden klóz két literálból áll).

A $G(\varphi)$ gráf

- csúcsok: a φ-ben előforduló változók és negáltjaik.
- élek: (α, β) él $\Leftrightarrow$ $\overline{\alpha} \vee \beta$ vagy $\beta \vee \overline{\alpha}$ a φ tagja (azaz ha $\alpha \rightarrow \beta$ vagy $\overline{\beta} \rightarrow \overline{\alpha}$ a φ tagja.)

Példa

Legyen
$\boldsymbol{\varphi = (\neg x \vee z) \ \wedge \ (\neg x \vee y) \ \wedge \ (\neg y \vee \neg z) \ \wedge \ (x \vee t)}$.
Ekkor $G(\varphi)$:



Tétel

A φ formula akkor és csak akkor kielégíthető, ha nincs olyan x változó, amelyre létezik $G(\varphi)$-ben irányított út x-ből $\neg x$-be és vissza.

Ötlet

Minden él egy implikációnak felel meg.
Így ha ℓ_1-ből ℓ_2 elérhető, akkor $\varphi \models (\ell_1 \to \ell_2)$.
Ha x-ből is elérhető $\neg x$ és fordítva, akkor $\varphi \models (x \leftrightarrow \neg x)$, így φ kielégíthetetlen.
Ha nincs ilyen változó, akkor ciklusban:

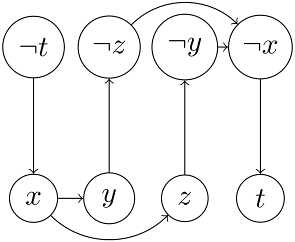
- válasszunk egy olyan ℓ literált, amiből nem érhető el $\overline{\ell}$ és melynek még nem adtunk értéket;
- állítsuk 1-re ℓ-t és minden belőle elérhető literált, komplementereiket pedig nullára;

amíg minden változónak értéket nem adtunk (nem lesz ütközés, ha nincs olyan x, akiből $\neg x$ elérhető és viszont). Az így kapott értékelés kielégíti φ-t.

2Sat

Példa

$\boldsymbol{\varphi = (\neg x \vee z) \ \wedge \ (\neg x \vee y) \ \wedge \ (\neg y \vee \neg z) \ \wedge \ (x \vee t)}$.



Válasszuk először x-et. $G(\varphi)$-ben x-ből elérhető $\neg x$.
igaz-ra állítjuk $\neg x$-et és t-t, hamis-ra x-et és $\neg t$-t.
Ezek után válasszuk mondjuk y-t. y-ból nem érhető el $\neg y$, tehát $\alpha := y$.
igaz-ra állítjuk y-t és $\neg z$-t, hamis-ra pedig $\neg y$-t és z-t.
A kapott értékadás kielégíti φ-t.

Következmény

2SAT $\in$ $\mathbf{P}$.

Horn-formulák és Horn-átnevezhető formulák

Egy klóz **Horn-klóz**, ha benne maximum egy pozitív literál szerepel.
Egy CNF **Horn-formula**, ha benne minden klóz Horn-klóz.
Egy CNF **Horn-átnevezhető**, ha bizonyos változói komplementálásával Horn-formulává tehető (vagyis ha van változók egy olyan X halmaza, hogy minden $x \in X$-re x helyébe $\neg x$-et, $\neg x$ helyébe x-et írva a formulába, az eredmény Horn-formula lesz).

Példa

- $x \ \wedge \ (\neg x \vee y) \ \wedge \ (\neg y \vee z) \ \wedge \ (\neg y \vee \neg z)$ Horn-formula.
- $(x \vee y) \ \wedge \ (\neg x \vee \neg y)$ Horn-átnevezhető.
- $(\neg x \vee \neg y) \ \wedge (\neg x \vee y) \ \wedge \ (x \vee \neg y) \ \wedge \ (x \vee y)$ **nem** Horn-átnevezhető.

Horn-formulák és Horn-átnevezhető formulák

Tétel

Horn-átnevezhető formulák kielégíthetősége polinom időben eldönthető.

Ötlet

Az **egységrezolúció** alkalmazása ezekre a formulákra teljes:

- amíg találunk egy egyetlen literálból álló $\{\ell\}$ klózt:
- ℓ értékét 1-re állítjuk;
- töröljük az összes, ℓ-t tartalmazó klózt;
- a maradék klózokból töröljük az $\overline{\ell}$ literált.

Ha közben megkapjuk az üres klózt, a formula kielégíthetetlen; ellenkező esetben kielégíthető.

Az algoritmus (ésszerű reprezentációval) lineáris időben végrehajtható és Horn-átnevezhető formulákra helyes.

Horn-formulák és Horn-átnevezhető formulák

Megjegyzés

Az is polinom időben eldönthető egy CNF-ről, hogy Horn-átnevezhető-e.

Megjegyzés

„Keverni" nem tudjuk a két hatékonyan eldönthető speciális esetet: **NP**-teljes a következő probléma: adott egy olyan CNF, melyben minden klóz

- vagy max. két literálból áll,
- vagy háromelemű negatív klóz,

kielégíthető-e?

Ötlet: 3Sat $\leq$ ez

Változónként $(x \vee \hat{x}) \wedge (\neg x \vee \neg \hat{x})$ és ehhez hozzá minden eredeti klózban a pozitív x literálokat $\neg \hat{x}$-re cseréljük

Az előfordulásszám csökkentése

Azt is próbálhatjuk korlátozni, hogy egy változó (vagy egy literál) hányszor fordulhat elő legfeljebb a formulában.

Tétel

NP-teljes a következő probléma: adott egy 3CNF, melyben minden változó legfeljebb háromszor szerepel, kielégíthető-e?

P-ben van a következő probléma: adott egy CNF, melyben minden változó legfeljebb kétszer szerepel, kielégíthető-e?

NP-teljes gráfelméleti problémák

FÜGGETLEN CSÚCSHALMAZ

Adott: $G = (V, E)$ irányítatlan gráf, K szám.

Kérdés: Létezik-e K elemű független csúcshalmaz?

Tétel

A FÜGGETLEN CSÚCSHALMAZ probléma **NP**-teljes.

Bizonyítás

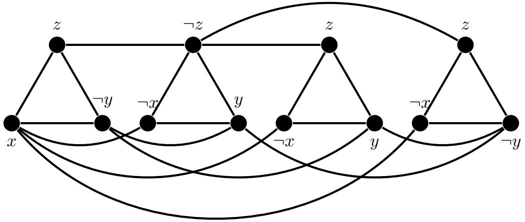
Világos, hogy a probléma **NP**-ben van. Megmutatjuk, hogy 3SAT visszavezethető a FÜGGETLEN CSÚCSHALMAZ-ra.

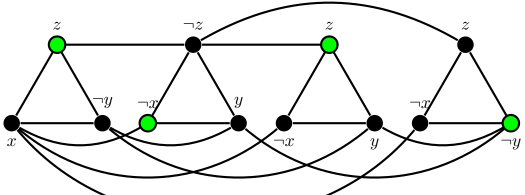
Legyen φ a 3SAT egy példánya, $\varphi = c_1 \wedge \ldots \wedge c_m$. A G gráf álljon m darab **háromszögből**, melyek a c_i tagoknak felelnek meg, s melyek csúcsai a c_i-kben lévő literáloknak felelnek meg. Ezen kívül még kössünk össze éllel **minden ellentétes literált**. Végül legyen $\boldsymbol{K = m}$.

φ kielégíthető $\Leftrightarrow$ G-ben létezik K elemű független csúcshalmaz.

Példa

Legyen
$\varphi = (x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z)$.
Ekkor a G gráf:





NP-teljes gráfelméleti problémák

KLIKK

Adott: $G = (V, E)$ irányítatlan gráf, K szám.

Kérdés: Létezik-e K elemű klikk (teljes részgráf)?

Tétel

KLIKK **NP**-teljes.

Bizonyítás (visszavezetéssel): gyakorlaton.

NP-teljes gráfelméleti problémák

CSÚCSLEFEDÉS

Adott: $G = (V, E)$ irányítatlan gráf, K szám.

Kérdés: Létezik-e olyan K elemű csúcshalmaz, hogy minden él illeszkedik a halmaz egy csúcsához?

Tétel

A CSÚCSLEFEDÉS probléma **NP**-teljes.

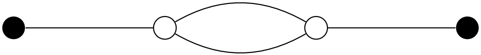
Bizonyítás (visszavezetéssel): gyakorlaton.

Tétel

A HAMILTON-ÚT probléma **NP**-teljes.

Ötlet

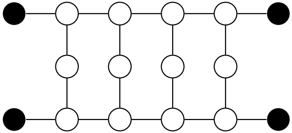
,,Értékválasztó" gadget:



(Balról jobbra ha megy egy Hamilton-út, akkor **választanunk** kell a ,,fenti" és a ,,lenti" útvonal közül egyet.)
$\Rightarrow$ mint egy értékadás – ilyen gadgetből változónként lesz egy

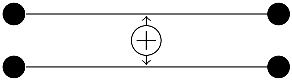
Ötlet

,,XOR" gadget:



Minden Hamilton-út egy olyan gráfban, ami ezt a gadgetot **feszített részgráfként** tartalmazza, a következők egyike ezen a gráfon belül:

Hogy átláthatóbb legyen a rajzunk, ezt a gadgetet így rajzoljuk:



Ötlet

A XOR gadgettel egy gráfban olyan Hamilton-kört keresünk, melyben **ki tudjuk kötni bizonyos élpárokra**, hogy a két él közül a keresett Hamilton-kör **pontosan egyen** haladjon át.
A teljes konstrukció a $3\textsc{Sat} \leq \textsc{Hamilton-Út}$ visszavezetéshez:

- minden változóhoz létrehozunk egy **értékválasztó gadget**et, az x_i-hez tartozó két párhuzamos élt x_i-vel ill. $\neg x_i$-vel címkézzük;
- minden klózhoz létrehozunk egy **háromszöget**, az $\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3$ klózhoz létrehozott háromszög éleit rendre ℓ_1-gyel, ℓ_2-vel és ℓ_3-mal címkézzük;
- az ellentétes literálokkal címkézett élek között XOR gadgetet hozunk létre;
- az értékválasztó gadgeteket láncba kötjük;
- a háromszögek csúcsaiból, az utolsó értékválasztó csúcsból és még egy plusz csúcsból pedig egyetlen nagy klikket készítünk;
- végül az előző pontbeli plusz csúcsból még egy új csúcsba lépünk.

Összefoglalás

- Definiáltuk a $k\textsc{Sat}$ problémákat, ahol $k \geq 1$ egész.
- Láttuk, hogy $\textsc{Sat} \leq 3\textsc{Sat}$, így $3\textsc{Sat}$ is $\mathbf{NP}$-teljes.
- Megadtunk egy polinomidejű algoritmust $2\textsc{Sat}$ eldöntésére.
- Definiáltuk a Horn-átnevezhető formulákat és megadtunk egy polinomidejű algoritmust, ami eldönti, hogy egy input Horn-átnevezhető formula kielégíthető-e.
- A $3\textsc{Sat}$-ot visszavezettük a következő problémára: input egy CNF, melynek minden klóza vagy három negatív literált tartalmaz, vagy kételemű, kielégíthető-e? Így ez (a két hatékonyan eldönthető speciális eset „keveréke”) is $\mathbf{NP}$-teljes.
- Definiáltuk a Független Csúcshalmaz, Klikk és Csúcslefedés problémákat.
- Láttuk, hogy $3\textsc{Sat} \leq$ Független Csúcshalmaz, így ez utóbbi is $\mathbf{NP}$-teljes.
- Gyakorlaton láttuk, hogy Független Csúcshalmaz $\leq$ Klikk és hogy Független Csúcshalmaz $\leq$ Csúcslefedés, így ezek is $\mathbf{NP}$-teljesek.
- Vázlatosan megnéztük, hogy $3\textsc{Sat} \leq$ Hamilton-Út, így ez utóbbi is $\mathbf{NP}$-teljes.