Bonyolultságelmélet

Monday 10th October, 2016, 17:44

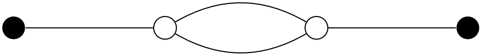
NP-teljes gráfelméleti problémák

Tétel

A HAMILTON-ÚT probléma **NP**-teljes.

Ötlet

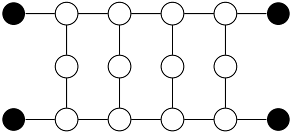
,,Értékválasztó" gadget:



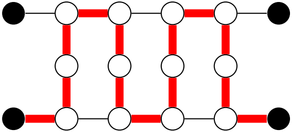
(Balról jobbra ha megy egy Hamilton-út, akkor **választanunk** kell a ,,fenti" és a ,,lenti" útvonal közül egyet.)
$\Rightarrow$ mint egy értékadás – ilyen gadgetből változónként lesz egy

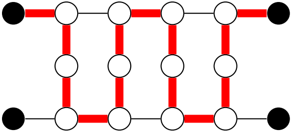
Ötlet

„XOR" gadget:

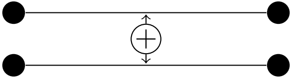


Minden Hamilton-út egy olyan gráfban, ami ezt a gadgetot **feszített részgráfként** tartalmazza, a következők egyike ezen a gráfon belül:





Hogy átláthatóbb legyen a rajzunk, ezt a gadgetet így rajzoljuk:



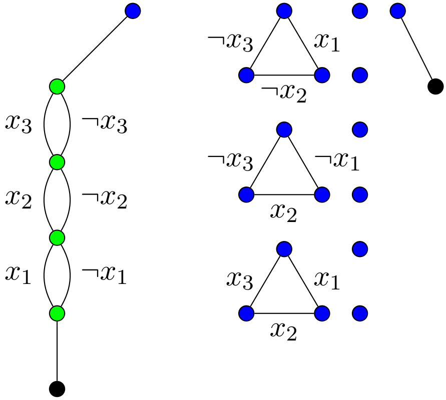
Ötlet

A XOR gadgettel egy gráfban olyan Hamilton-kört keresünk, melyben **ki tudjuk kötni bizonyos élpárokra**, hogy a két él közül a keresett Hamilton-kör **pontosan egyen** haladjon át.
A teljes konstrukció a $3\textsc{Sat} \leq \textsc{Hamilton-Út}$ visszavezetéshez:

- minden változóhoz létrehozunk egy **értékválasztó gadget**et, az x_i-hez tartozó két párhuzamos élt x_i-vel ill. $\neg x_i$-vel címkézzük;
- minden klózhoz létrehozunk egy **háromszöget**, az $\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3$ klózhoz létrehozott háromszög éleit rendre ℓ_1-gyel, ℓ_2-vel és ℓ_3-mal címkézzük; felveszünk még két további csúcsot;
- az ellentétes literálokkal címkézett élek között XOR gadgetet hozunk létre;
- az értékválasztó gadgeteket láncba kötjük;
- a háromszögek csúcsaiból, az utolsó értékválasztó csúcsból és még egy plusz csúcsból pedig egyetlen nagy klikket készítünk;
- végül az előző pontbeli plusz csúcsból még egy új csúcsba

Példa 3SAT $\leq$ HAMILTON-ÚT

Legyen $\varphi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$. Akkor a kapott gráf:



Továbbá, a kék csúcsokat páronként összekötjük, a háromszögek élei és az azonos címkéjű értékválasztó élek közé a $\oplus$ gadgetet illesztjük.

Így, mivel $\textsc{Hamilton-Út} \leq_{\mathcal{P}} \textsc{Tsp}(E)$, így a $\textsc{Tsp}(\mathrm{E})$ probléma $\mathbf{NP}$-teljes.

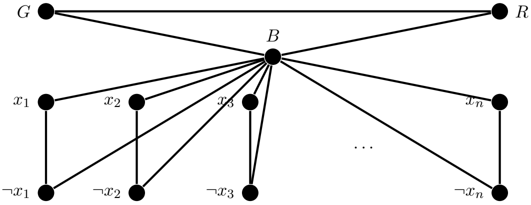
Tétel

A 3-$\textsc{Színezés}$ probléma $\mathbf{NP}$-teljes.

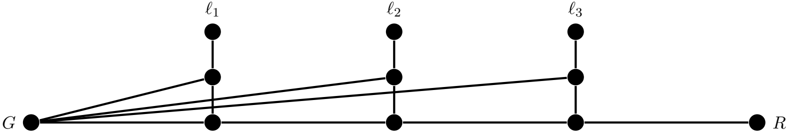
Megjegyzés

A 2-$\textsc{Színezés}$ probléma $\mathbf{P}$-ben van.
A 4-$\textsc{Színezés}$ probléma **triviális** síkbarajzolható gráfokra.

3SAT $\leq$ 3-SZÍNEZÉS: ötlet



így minden literál színe R (=„hamis") vagy G (=„igaz") színével kell megegyezzen, komplementere pedig egy másikkal $\Rightarrow$ kiértékelés



Ellenőrizhető: ha mindhárom literál R színét kapja, a plusz hat csúcsot nem lehet helyesen 3-színezni, ha viszont van köztük G színű, akkor igen

$\mathbf{NP}$-teljes problémák halmazokra és számokra

HÁRMASÍTÁS

Adott: Három azonos méretű halmaz, F (fiúk), L (lányok), H (házak), és egy $R \subseteq F \times L \times H$ reláció.

Kérdés: Megadható-e az R-beli hármasok egy olyan részhalmaza, melyben minden fiú, lány és ház pontosan egyszer szerepel?

Világos, hogy HÁRMASÍTÁS $\in \mathbf{NP}$.

Tétel

A HÁRMASÍTÁS probléma $\mathbf{NP}$-teljes.

Megjegyzés

PÁROSÍTÁS $\in \mathbf{P}$.

Halmazlefedés

Adott: Egy U halmaz részhalmazainak $C = (S_1, \ldots, S_n)$ rendszere és egy K szám.

Kérdés: Kiválasztható-e K darab az S_i-k közül úgy, hogy ezek egyesítése U?

Halmazpakolás

Adott: Egy U halmaz részhalmazainak $C = (S_1, \ldots, S_n)$ rendszere és egy K szám.

Kérdés: Kiválasztható-e az S_i-k közül K darab, páronként diszjunkt halmaz?

Pontos Lefedés Hármasokkal

Adott: Egy $3m$ elemű U halmaz és 3-elemű részhalmazainak $(S_1, \ldots, S_n)$ rendszere.

Kérdés: Kiválasztható-e m darab S_i úgy, hogy ezek egyesítése U? (A kiválasztott S_i-k nyilván diszjunktak.)

NP-teljes problémák halmazokra

Tétel

A Halmazlefedés, Halmazpakolás, Pontos Lefedés Hármasokkal problémák **NP**-teljesek.

Bizonyítás

A Hármasítás a Pontos Lefedés Hármasokkal **speciális esete**.
A Pontos Lefedés Hármasokkal a Halmazlefedés, valamint a Halmazpakolás speciális esete is.

Egész Értékű Programozás

Adott: Egy n-változós, egész együtthatós lineáris egyenlőtlenség-rendszer.
Kérdés: Létezik-e **egész értékű** megoldás?

A Halmazlefedés felfogható az Egész Értékű Programozás speciális eseteként:

$$Ax \geq 1, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \leq B, \quad 0 \leq x_i \leq 1,$$

ahol A oszlopai a halmazrendszer elemeinek felelnek meg.
Azt is meg lehet mutatni, hogy az Egész Értékű Programozás $\mathbf{NP}$-ben van.

Tétel

Az Egész Értékű Programozás probléma $\mathbf{NP}$-teljes.

$\mathbf{NP}$-teljes problémák halmazokra és számokra

A Részletösszeg probléma

Adott: $a_1, \ldots, a_n$ pozitív egészek és egy $K > 0$ célszám.
Kérdés: Kiválasztható-e az a_i-k közül néhány elem úgy, hogy összegük K legyen?

Tétel

A Részletösszeg probléma $\mathbf{NP}$-teljes.

Az $\mathbf{NP}$-beliség világos, az $\mathbf{NP}$-nehézséget a 3Satról való visszavezetéssel igazoljuk.

NP-teljes problémák halmazokra és számokra

3SAT $\leq$ RÉSZLETÖSSZEG

- Legyen $\varphi = c_1 \wedge \ldots \wedge c_n$ egy 3CNF, $c_i = \ell_{i,1} \vee \ell_{i,2} \vee \ell_{i,3}$.
- A φ-beli változók legyenek $x_1, \ldots, x_m$.
- Ebből elkészítjük a RÉSZLETÖSSZEG probléma egy példányát, melyben $n+m$-jegyű (!) számok szerepelnek.
- x_i-ből a t_i és f_i számok készülnek:
  - t_i és f_i első m jegye csupa 0, kivéve az i. jegyet, ami 1-es;
  - t_i utolsó n jegye közül az $m+k$. akkor 1-es, ha c_k-ban szerepel x_i, egyébként 0;
  - f_i utolsó n jegye közül az $m+k$. akkor 1-es, ha c_k-ban szerepel $\neg x_i$, egyébként 0.
- Továbbá, $a_i = b_i = 10^i$ minden $i = 1, \ldots, n$ esetén.
- Az eredmény: a $\{f_i, t_i : 1 \leq i \leq m\} \cup \{a_i, b_i : 1 \leq i \leq n\}$ halmaz és a $K = 11\ldots133\ldots3$ célszám (m darab 1-es, majd n darab 3-as).

Példa

Ha $\varphi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \ \vee \ (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_4) \ \vee \ (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_4)$:

$$\begin{aligned}
t_1 &= 1000110 \\
f_1 &= 1000001 \\
t_2 &= 0100001 \\
f_2 &= 0100110 \\
t_3 &= 0010100 \\
f_3 &= 0010000 \\
t_4 &= 0001010 \\
f_4 &= 0001001 \\
a_1 = b_1 &= 0000100 \\
a_2 = b_2 &= 0000010 \\
a_3 = b_3 &= 0000001 \\
\hline
K &= 1111333
\end{aligned}$$

- t_1 és f_1 közül pontosan az egyiket kell válasszuk (K első jegye miatt);
- általában t_i és f_i közül is pontosan az egyiket – t_i választása feleljen meg az $x_i = 1$, f_i választása az $x_i = 0$ értékadásnak;
- ezzel az $m + j$. jegyek mindegyike 0, 1, 2 vagy 3 lesz $j = 1, \ldots, n$-re, annak függvényében, hogy c_j-ben 0, 1, 2 vagy 3 literál vált igazzá;
- ha az $m + j$. jegy 3, akkor jó, ha 2, akkor válasszuk ki még mondjuk a_j-t, ha 1, akkor a_j-t és b_j-t is, ha 0, akkor nem tudjuk ezen a jegyen elérni a célszámot

$\mathbf{NP}$-teljes problémák halmazokra és számokra

Az Egész Értékű Programozás egy másik speciális esete:

Hátizsák

Adott: n elem mindegyikének w_i súlya és c_i értéke, valamint W és C.
Kérdés: Kiválasztható-e ismétlés nélkül néhány elem úgy, hogy összértékük $\geq C$ és összsúlyuk $\leq W$?

Tétel

A Hátizsák probléma $\mathbf{NP}$-teljes.

Ötlet

A Részletösszeg problémában az a_i értékekből rendre készítsünk egy tárgyat $w_i = c_i = a_i$ súllyal és értékkel, továbbá legyen $C = W = K$, a célszám.

Összefoglalás

- Megmutattuk, hogy a HAMILTON-ÚT **NP**-teljes. Így a TSP(E) is az.
- Megmutattuk, hogy a $3-$ SZÍNEZÉS **NP**-teljes.
- Definiáltuk a következő problémákat és beláttuk **NP**-teljességüket:
  - HÁRMASÍTÁS
  - PONTOS LEFEDÉS HÁRMASOKKAL
  - HALMAZLEFEDÉS
  - HALMAZPAKOLÁS
  - RÉSZLETÖSSZEG
  - HÁTIZSÁK
- Definiáltuk az EGÉSZ ÉRTÉKŰ PROGRAMOZÁS problémát és beláttuk, hogy **NP**-nehéz.