Bonyolultságelmélet

Thursday 1st December, 2016, 22:34

Savitch tétele

Egy algoritmus

Savitch tétele

Egy algoritmus

- Input: irányított gráf, mondjuk $G[1..N][1..N]$ szomszédsági mátrixával

Savitch tétele

Egy algoritmus

- Input: irányított gráf, mondjuk $G[1..N][1..N]$ szomszédsági mátrixával
- Output: ?

function $\textsc{f}(x, y, d)$
  if $d == 0$ **then return** $(x == y)$ OR $G[x][y]$;
  for $z = 1 \dots N$ **do**
    if $\textsc{f}(x, z, d-1)$ AND $\textsc{f}(z, y, d-1)$ **then return** TRUE
  return FALSE
return $\textsc{f}(1, N, \lceil \log N \rceil)$;

Savitch tétele

A függvény

Az $f(x, y, d)$ hívás pontosan akkor ad TRUE-t, ha a G gráfban van x-ből y-ba legfeljebb 2^d hosszú út.

Savitch tétele

A függvény

Az $f(x, y, d)$ hívás pontosan akkor ad TRUE-t, ha a G gráfban van x-ből y-ba legfeljebb 2^d hosszú út.

- $d == 0$: legfeljebb egy hosszú út, vagyis $x == y$ vagy van él x-ből y-ba;

Savitch tétele

A függvény

Az $f(x, y, d)$ hívás pontosan akkor ad TRUE-t, ha a G gráfban van x-ből y-ba legfeljebb 2^d hosszú út.

- $d == 0$: legfeljebb egy hosszú út, vagyis $x == y$ vagy van él x-ből y-ba;
- $d > 0$: ha van x-ből y-ba egy legfeljebb 2^d hosszú út, akkor ennek felezőpontjába, z-be van x-ből egy legfeljebb 2^{d-1} hosszú út és z-ből y-ba is, ez akkor teljesül, ha $f(x, z, d-1)$ és $f(z, y, d-1)$ is TRUE-val tér vissza.

Savitch tétele

A függvény

Az $f(x, y, d)$ hívás pontosan akkor ad TRUE-t, ha a G gráfban van x-ből y-ba legfeljebb 2^d hosszú út.

- $d == 0$: legfeljebb egy hosszú út, vagyis $x == y$ vagy van él x-ből y-ba;
- $d > 0$: ha van x-ből y-ba egy legfeljebb 2^d hosszú út, akkor ennek felezőpontjába, z-be van x-ből egy legfeljebb 2^{d-1} hosszú út és z-ből y-ba is, ez akkor teljesül, ha $f(x, z, d-1)$ és $f(z, y, d-1)$ is TRUE-val tér vissza.

A belépési pont

Az $f(1, N, \lceil \log N \rceil)$ hívás tehát akkor ad TRUE-t, ha van legfeljebb $2^{\lceil \log N \rceil} \geq N$ hosszú út 1-ből N-be,

Savitch tétele

A függvény

Az $f(x, y, d)$ hívás pontosan akkor ad TRUE-t, ha a G gráfban van x-ből y-ba legfeljebb 2^d hosszú út.

- $d == 0$: legfeljebb egy hosszú út, vagyis $x == y$ vagy van él x-ből y-ba;
- $d > 0$: ha van x-ből y-ba egy legfeljebb 2^d hosszú út, akkor ennek felezőpontjába, z-be van x-ből egy legfeljebb 2^{d-1} hosszú út és z-ből y-ba is, ez akkor teljesül, ha $f(x, z, d-1)$ és $f(z, y, d-1)$ is TRUE-val tér vissza.

A belépési pont

Az $f(1, N, \lceil \log N \rceil)$ hívás tehát akkor ad TRUE-t, ha van legfeljebb $2^{\lceil \log N \rceil} \geq N$ hosszú út 1-ből N-be, vagyis egy (determinisztikus) algoritmus az ELÉRHETŐSÉG problémára.

Savitch tétele

Tárigény

Savitch tétele

Tárigény

- Az f függvény egy példányának tárigénye $\mathcal{O}(\log n)$, hisz csak az x, y, d, z változókat deklarálja, mindegyik $0 \ldots N$ közti értéket vesz fel;

Savitch tétele

Tárigény

- Az f függvény egy példányának tárigénye $\mathcal{O}(\log n)$, hisz csak az x, y, d, z változókat deklarálja, mindegyik $0 \ldots N$ közti értéket vesz fel;
- a hívási verem mélysége $\lceil \log N \rceil = \mathcal{O}(\log n)$, legfeljebb ennyi példánya van egyszerre f-nek a memóriában;

Savitch tétele

Tárigény

- Az f függvény egy példányának tárigénye $\mathcal{O}(\log n)$, hisz csak az x, y, d, z változókat deklarálja, mindegyik $0 \ldots N$ közti értéket vesz fel;
- a hívási verem mélysége $\lceil \log N \rceil = \mathcal{O}(\log n)$, legfeljebb ennyi példánya van egyszerre f-nek a memóriában;

tehát a teljes tárigény $\mathcal{O}(\log^2 n)$.

Savitch tétele

Tárigény

- Az f függvény egy példányának tárigénye $\mathcal{O}(\log n)$, hisz csak az x, y, d, z változókat deklarálja, mindegyik $0 \ldots N$ közti értéket vesz fel;
- a hívási verem mélysége $\lceil \log N \rceil = \mathcal{O}(\log n)$, legfeljebb ennyi példánya van egyszerre f-nek a memóriában;

tehát a teljes tárigény $\mathcal{O}(\log^2 n)$.

Ezzel beláttuk Savitch tételét:

Savitch tétele

Tárigény

- Az f függvény egy példányának tárigénye $\mathcal{O}(\log n)$, hisz csak az x, y, d, z változókat deklarálja, mindegyik $0 \dots N$ közti értéket vesz fel;
- a hívási verem mélysége $\lceil \log N \rceil = \mathcal{O}(\log n)$, legfeljebb ennyi példánya van egyszerre f-nek a memóriában;

tehát a teljes tárigény $\mathcal{O}(\log^2 n)$.

Ezzel beláttuk Savitch tételét:

Tétel

$$\textsc{Elérhetőség} \in \mathrm{SPACE}(\log^2 n).$$

Következmény

$$\mathrm{NSPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{SPACE}(f^2(n)),$$

ha $f(n) \geq \log n$.

Következmény

$$\mathrm{NSPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{SPACE}(f^2(n)),$$

ha $f(n) \geq \log n$.

Ötlet

Az ELÉRHETŐSÉG problémát a nemdeterminisztikus program konfigurációs gráfján oldjuk meg.

Következmény

$$\mathrm{NSPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{SPACE}(f^2(n)),$$

ha $f(n) \geq \log n$.

Ötlet

Az ELÉRHETŐSÉG problémát a nemdeterminisztikus program konfigurációs gráfján oldjuk meg.

Következmény

$$\mathbf{PSPACE} = \mathbf{NPSPACE}.$$

Következmény

$$\mathrm{NSPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{SPACE}(f^2(n)),$$

ha $f(n) \geq \log n$.

Ötlet

Az ELÉRHETŐSÉG problémát a nemdeterminisztikus program konfigurációs gráfján oldjuk meg.

Következmény

$$\mathbf{PSPACE} = \mathbf{NPSPACE}.$$

Következmény

$$\mathbf{NL} \subsetneq \mathbf{PSPACE}.$$

(Hiszen $\mathbf{NL} \subseteq \mathrm{SPACE}(\log^2 n) \subsetneq \mathrm{SPACE}(n)$ Savitch tétele és a tárhierarchia tétel szerint.)

Az Immerman-Szelepcsényi tétel

Egy nemdeterminisztikus algoritmus

Egy nemdeterminisztikus algoritmus

- Input: gráf, $G[1 \dots N][1 \dots N]$ szomszédsági mátrixával.

function Út(s, t, d)
    $i := s$;
    while $d \geq 0$ **do**
        if $i == t$ **then return** Accept
        $j :=$ nd(N);
        if NOT $G[i][j]$ **then return** Reject
        $i := j$;
        $d := d - 1$;

Az Immerman-Szelepcsényi tétel

Egy nemdeterminisztikus algoritmus

- Input: gráf, $G[1 \dots N][1 \dots N]$ szomszédsági mátrixával.

function Út(s, t, d)
  $i := s$;
  while $d \geq 0$ **do**
    if $i == t$ **then return** Accept
    $j :=$ nd(N);
    if NOT $G[i][j]$ **then return** Reject
    $i := j$;
    $d := d - 1$;

- A függvény visszaadhat Accept-et, ha s-ből t d lépésen belül elérhető.

Az Immerman-Szelepcsényi tétel

Egy nemdeterminisztikus algoritmus

- Input: gráf, $G[1 \dots N][1 \dots N]$ szomszédsági mátrixával.

function Út(s, t, d)
  $i := s$;
  while $d \geq 0$ **do**
    if $i == t$ **then return** Accept
    $j := \mathrm{nd}(N)$;
    if NOT $G[i][j]$ **then return** Reject
    $i := j$;
    $d := d - 1$;

- A függvény visszaadhat Accept-et, ha s-ből t d lépésen belül elérhető.
- Egyébként mindenképp Reject-et ad vissza.

Az Immerman-Szelepcsényi tétel

Egy nemdeterminisztikus algoritmus

- Input: gráf, $G[1 \dots N][1 \dots N]$ szomszédsági mátrixával.

function Út(s, t, d)
  $i := s$;
  while $d \geq 0$ **do**
    if $i == t$ **then return** Accept
    $j := \mathrm{nd}(N)$;
    if NOT $G[i][j]$ **then return** Reject
    $i := j$;
    $d := d - 1$;

- A függvény visszaadhat Accept-et, ha s-ből t d lépésen belül elérhető.
- Egyébként mindenképp Reject-et ad vissza.
- Tárigény: $\mathcal{O}(\log n)$.

Az Immerman-Szelepcsényi tétel

Egy nemdeterminisztikus algoritmust hívó algoritmus

Egy nemdeterminisztikus algoritmust hívó algoritmus

- Input: gráf, $G[1 \ldots N][1 \ldots N]$ szomszédsági mátrixával.

function T-IN-SK$(s, t, prev, k)$
    $check := 0$;
    for $u := 1 \ldots N$ **do**
        if ÚT$(s, u, k-1)$ **then**
            $check := check +$
1;
            if $G[u][t]$ **then** re-
turn ACCEPT
    if $check == prev$ **then**
return REJECT
    THROW ERROR;

Az Immerman-Szelepcsényi tétel

Egy nemdeterminisztikus algoritmust hívó algoritmus

- Input: gráf, $G[1 \dots N][1 \dots N]$ szomszédsági mátrixával.

function T-IN-SK$(s, t, prev, k)$
$check := 0$;
for $u := 1 \dots N$ **do**
if ÚT$(s, u, k-1)$ **then**
$check := check + 1$;
if $G[u][t]$ **then return** ACCEPT
if $check == prev$ **then return** REJECT
THROW ERROR;

- Ha $prev$ az s-ből legfeljebb $k-1$ lépésben elérhető csúcsok száma, akkor:

Az Immerman-Szelepcsényi tétel

Egy nemdeterminisztikus algoritmust hívó algoritmus

- Input: gráf, $G[1 \dots N][1 \dots N]$ szomszédsági mátrixával.

function T-IN-SK$(s, t, prev, k)$
    $check := 0$;
    for $u := 1 \dots N$ **do**
        if ÚT$(s, u, k-1)$ **then**
            $check := check + 1$;
            if $G[u][t]$ **then return** ACCEPT
    if $check == prev$ **then return** REJECT
    THROW ERROR;

- Ha $prev$ az s-ből legfeljebb $k-1$ lépésben elérhető csúcsok száma, akkor:
- ha s-ből t legfeljebb k lépésben elérhető, akkor az eredmény ACCEPT vagy ERROR, lehet ACCEPT;

Az Immerman-Szelepcsényi tétel

Egy nemdeterminisztikus algoritmust hívó algoritmus

- Input: gráf, $G[1 \dots N][1 \dots N]$ szomszédsági mátrixával.

function T-IN-SK$(s, t, prev, k)$
    $check := 0$;
    for $u := 1 \dots N$ **do**
        if ÚT$(s, u, k-1)$ **then**
            $check := check + 1$;
            if $G[u][t]$ **then return** ACCEPT
    if $check == prev$ **then return** REJECT
    THROW ERROR;

- Ha $prev$ az s-ből legfeljebb $k-1$ lépésben elérhető csúcsok száma, akkor:
- ha s-ből t legfeljebb k lépésben elérhető, akkor az eredmény ACCEPT vagy ERROR, lehet ACCEPT;
- ha nem, akkor az eredmény REJECT vagy ERROR, lehet REJECT.

Az Immerman-Szelepcsényi tétel

Egy nd algoritmust hívó algoritmust hívó algoritmus

Egy nd algoritmust hívó algoritmust hívó algoritmus

- Input: gráf, $G[1 \ldots N][1 \ldots N]$ szomszédsági mátrixával és s csúcsa.

$prev := 1;$
for $k := 1 \ldots N$ **do**
    $current := 0;$
    for $t := 1 \ldots N$ **do**
        if T-IN-SK$(s, t, prev, k)$
then
            $current := current +$
$1;$
    $prev := current;$
return $prev;$

Egy nd algoritmust hívó algoritmust hívó algoritmus

- Input: gráf, $G[1 \ldots N][1 \ldots N]$ szomszédsági mátrixával és s csúcsa.

$prev := 1;$
for $k := 1 \ldots N$ **do**
  $current := 0;$
  for $t := 1 \ldots N$ **do**
    if T-IN-SK$(s, t, prev, k)$
then
      $current := current + 1;$
  $prev := current;$
return $prev;$

- Az algoritmus visszaadja az s-ből elérhető csúcsok számát, vagy ERROR-t dob; van, mikor a számot adja vissza.

Egy nd algoritmust hívó algoritmust hívó algoritmus

- Input: gráf, $G[1 \ldots N][1 \ldots N]$ szomszédsági mátrixával és s csúcsa.

$prev := 1;$
for $k := 1 \ldots N$ **do**
  $current := 0;$
  for $t := 1 \ldots N$ **do**
    if T-IN-SK$(s, t, prev, k)$
then
      $current := current + 1;$
  $prev := current;$
return $prev;$

- Az algoritmus visszaadja az s-ből elérhető csúcsok számát, vagy ERROR-t dob; van, mikor a számot adja vissza.
- Mindezt logaritmikus tárigényben.

Az Immerman-Szelepcsényi tétel

Beláttuk az Immerman-Szelepcsényi tételt:

Az Immerman-Szelepcsényi tétel

Beláttuk az Immerman-Szelepcsényi tételt:

Tétel

Van olyan nemdeterminisztikus algoritmus, mely logaritmikus tárban kiszámítja az input gráf megadott csúcsából elérhető csúcsok számát.

Az Immerman-Szelepcsényi tétel

Beláttuk az Immerman-Szelepcsényi tételt:

Tétel

Van olyan nemdeterminisztikus algoritmus, mely logaritmikus tárban kiszámítja az input gráf megadott csúcsából elérhető csúcsok számát.

Nemdeterminisztikus függvénykiszámítás: minden szálon vagy a helyes eredményt adja vissza, vagy REJECT-et;

Az Immerman-Szelepcsényi tétel

Beláttuk az Immerman-Szelepcsényi tételt:

Tétel

Van olyan nemdeterminisztikus algoritmus, mely logaritmikus tárban kiszámítja az input gráf megadott csúcsából elérhető csúcsok számát.

Nemdeterminisztikus függvénykiszámítás: minden szálon vagy a helyes eredményt adja vissza, vagy REJECT-et; továbbá van olyan szál, mikor a helyes eredményt.

Az Immerman-Szelepcsényi tétel

Következmény

$$\mathrm{NSPACE}(f(n)) \;=\; \mathrm{coNSPACE}(f(n)),$$

ha $f(n) \geq \log n$.

Az Immerman-Szelepcsényi tétel

Következmény

$$\mathrm{NSPACE}(f(n)) \;=\; \mathrm{coNSPACE}(f(n)),$$

ha $f(n) \geq \log n$.

Ötlet

A konfigurációs gráfban először nd kiszámítjuk az elérhető konfigurációk számát, aztán nd mindet megpróbáljuk elérni.

Az Immerman-Szelepcsényi tétel

Következmény

$$\mathrm{NSPACE}(f(n)) \;=\; \mathrm{coNSPACE}(f(n)),$$

ha $f(n) \geq \log n$.

Ötlet

A konfigurációs gráfban először nd kiszámítjuk az elérhető konfigurációk számát, aztán nd mindet megpróbáljuk elérni. Ha annyit értünk el, amennyi csak elérhető és egyik sem elfogadó, akkor Accept, különben Reject.

Az Immerman-Szelepcsényi tétel

Következmény

$$\mathrm{NSPACE}(f(n)) \;=\; \mathrm{coNSPACE}(f(n)),$$

ha $f(n) \geq \log n$.

Ötlet

A konfigurációs gráfban először nd kiszámítjuk az elérhető konfigurációk számát, aztán nd mindet megpróbáljuk elérni. Ha annyit értünk el, amennyi csak elérhető és egyik sem elfogadó, akkor ACCEPT, különben REJECT.

Következmény

$$\mathbf{NL} \;=\; \mathrm{co}\mathbf{NL}.$$

A logaritmikus tárban való visszavezetés

A polinomidejű visszavezetésre nézve $\mathbf{P}$ minden nemtriviális eleme „$\mathbf{P}$-teljes”.

A logaritmikus tárban való visszavezetés

A polinomidejű visszavezetésre nézve $\mathbf{P}$ minden nemtriviális eleme „$\mathbf{P}$-teljes”.
Bevezetünk egy (formailag) „gyengébb” visszavezetést, melyet a $\mathbf{P}$ osztályon belül alkalmazunk problémák egymáshoz viszonyított nehézségének definiálására.

A logaritmikus tárban való visszavezetés

A polinomidejű visszavezetésre nézve $\mathbf{P}$ minden nemtriviális eleme „$\mathbf{P}$-teljes”.
Bevezetünk egy (formailag) „gyengébb” visszavezetést, melyet a $\mathbf{P}$ osztályon belül alkalmazunk problémák egymáshoz viszonyított nehézségének definiálására.

Az f függvény az A eldöntési problémának a B eldöntési problémára való logaritmikus tárigényű visszavezetése, ha

A logaritmikus tárban való visszavezetés

A polinomidejű visszavezetésre nézve $\mathbf{P}$ minden nemtriviális eleme „$\mathbf{P}$-teljes”.
Bevezetünk egy (formailag) „gyengébb” visszavezetést, melyet a $\mathbf{P}$ osztályon belül alkalmazunk problémák egymáshoz viszonyított nehézségének definiálására.

Az f függvény az A eldöntési problémának a B eldöntési problémára való logaritmikus tárigényű visszavezetése, ha

- f kiszámítható logaritmikus tárban és

A logaritmikus tárban való visszavezetés

A polinomidejű visszavezetésre nézve $\mathbf{P}$ minden nemtriviális eleme „$\mathbf{P}$-teljes”.
Bevezetünk egy (formailag) „gyengébb” visszavezetést, melyet a $\mathbf{P}$ osztályon belül alkalmazunk problémák egymáshoz viszonyított nehézségének definiálására.

Az f függvény az A eldöntési problémának a B eldöntési problémára való logaritmikus tárigényű visszavezetése, ha

- f kiszámítható logaritmikus tárban és
- tetszőleges I inputra $A(I) = B(f(I))$.

A logaritmikus tárban való visszavezetés

A polinomidejű visszavezetésre nézve $\mathbf{P}$ minden nemtriviális eleme „$\mathbf{P}$-teljes”.
Bevezetünk egy (formailag) „gyengébb” visszavezetést, melyet a $\mathbf{P}$ osztályon belül alkalmazunk problémák egymáshoz viszonyított nehézségének definiálására.

Az f függvény az A eldöntési problémának a B eldöntési problémára való logaritmikus tárigényű visszavezetése, ha

- f kiszámítható logaritmikus tárban és
- tetszőleges I inputra $A(I) = B(f(I))$.

Ha létezik A-nak B-re való logaritmikus tárigényű visszavezetése, annak jele $\mathrm{A} \leq_{\mathcal{L}} \mathrm{B}$: A logtárban visszavezethető B-re.

A logtáras visszavezetés

Logaritmikus tárigényű (tehát mindenképp offline) algoritmusnak legfeljebb $2^{\mathcal{O}(\log n)}$, azaz polinom sok konfigurációja lehet adott input esetén;

A logtáras visszavezetés

Logaritmikus tárigényű (tehát mindenképp offline) algoritmusnak legfeljebb $2^{\mathcal{O}(\log n)}$, azaz polinom sok konfigurációja lehet adott input esetén;mivel a visszavezetés nem eshet végtelen ciklusba, így polinomidőben meg is kell álljon.

A logtáras visszavezetés

Logaritmikus tárigényű (tehát mindenképp offline) algoritmusnak legfeljebb $2^{\mathcal{O}(\log n)}$, azaz polinom sok konfigurációja lehet adott input esetén;mivel a visszavezetés nem eshet végtelen ciklusba, így polinomidőben meg is kell álljon.

Vagyis ha $\mathrm{A} \leq_{\mathcal{L}} \mathrm{B}$, akkor $\mathrm{A} \leq_{\mathcal{P}} \mathrm{B}$ is.

A logtáras visszavezetés

Logaritmikus tárigényű (tehát mindenképp offline) algoritmusnak legfeljebb $2^{\mathcal{O}(\log n)}$, azaz polinom sok konfigurációja lehet adott input esetén;mivel a visszavezetés nem eshet végtelen ciklusba, így polinomidőben meg is kell álljon.

Vagyis ha $\mathrm{A} \leq_{\mathcal{L}} \mathrm{B}$, akkor $\mathrm{A} \leq_{\mathcal{P}} \mathrm{B}$ is.

Megjegyzés

Nem ismert, hogy $\leq_{\mathcal{L}}$ és $\leq_{\mathcal{P}}$ egybeesnek-e. . .

A logtáras visszavezetés

Logaritmikus tárigényű (tehát mindenképp offline) algoritmusnak legfeljebb $2^{\mathcal{O}(\log n)}$, azaz polinom sok konfigurációja lehet adott input esetén;mivel a visszavezetés nem eshet végtelen ciklusba, így polinomidőben meg is kell álljon.

Vagyis ha $\mathrm{A} \leq_{\mathcal{L}} \mathrm{B}$, akkor $\mathrm{A} \leq_{\mathcal{P}} \mathrm{B}$ is.

Megjegyzés

Nem ismert, hogy $\leq_{\mathcal{L}}$ és $\leq_{\mathcal{P}}$ egybeesnek-e. . . (ha igen, akkor $\mathbf{L} = \mathbf{P}$)

Nehézség, teljesség

Legyen $\mathcal{C}$ problémák egy osztálya. Az A probléma $\mathcal{C}$-nehéz a logtáras visszavezetésre nézve, ha minden $\mathcal{C}$-beli probléma logtárban visszavezethető A-ra.

Nehézség, teljesség

Legyen $\mathcal{C}$ problémák egy osztálya. Az A probléma $\mathcal{C}$-nehéz a logtáras visszavezetésre nézve, ha minden $\mathcal{C}$-beli probléma logtárban visszavezethető A-ra.
Ha még $\mathrm{A} \in \mathcal{C}$ is, akkor A egy $\mathcal{C}$-teljes probléma a logtáras visszavezetésre nézve.

Nehézség, teljesség

Legyen $\mathcal{C}$ problémák egy osztálya. Az A probléma $\mathcal{C}$-nehéz a logtáras visszavezetésre nézve, ha minden $\mathcal{C}$-beli probléma logtárban visszavezethető A-ra.
Ha még $\mathrm{A} \in \mathcal{C}$ is, akkor A egy $\mathcal{C}$-teljes probléma a logtáras visszavezetésre nézve.

Megjegyzés

Nem ismert, hogy a logtáras visszavezetésre nézve $\mathbf{NP}$-teljes problémák ugyanazok-e, mint a polinomidejű visszavezetésre nézve $\mathbf{NP}$-teljesek.
(A $\textsc{Sat}$ egy $\mathbf{NP}$-teljes probléma a logtáras visszavezetésre nézve is; az összes hatékony visszavezetés, melyet eddig láttunk, egyben logtáras is volt.)

A logtáras visszavezetés tranzitivitása

Tétel

A logtárban való visszavezethetőség tranzitív: ha f az A-nak B-re, g pedig a B-nek C-re való logtáras visszavezetése, akkor az $f \circ g$ összetett függvény az A-nak C-re való logtáras visszavezetése.

A gond

Legyen M_f az f-et, M_g pedig a g-t kiszámító program.

A logtáras visszavezetés tranzitivitása

Tétel

A logtárban való visszavezethetőség tranzitív: ha f az A-nak B-re, g pedig a B-nek C-re való logtáras visszavezetése, akkor az $f \circ g$ összetett függvény az A-nak C-re való logtáras visszavezetése.

A gond

Legyen M_f az f-et, M_g pedig a g-t kiszámító program.
Az nyilván igaz, hogy $I \in A \Leftrightarrow f(I) \in B \Leftrightarrow g(f(I)) \in C$.

A logtáras visszavezetés tranzitivitása

Tétel

A logtárban való visszavezethetőség tranzitív: ha f az A-nak B-re, g pedig a B-nek C-re való logtáras visszavezetése, akkor az $f \circ g$ összetett függvény az A-nak C-re való logtáras visszavezetése.

A gond

Legyen M_f az f-et, M_g pedig a g-t kiszámító program.
Az nyilván igaz, hogy $I \in A \Leftrightarrow f(I) \in B \Leftrightarrow g(f(I)) \in C$.
Csakhogy ha $M_f(I)$-t munkaregiszterekbe írjuk, sokkal hosszabb lehet, mint $\log(|I|)$!

A visszavezetés tranzitivitása

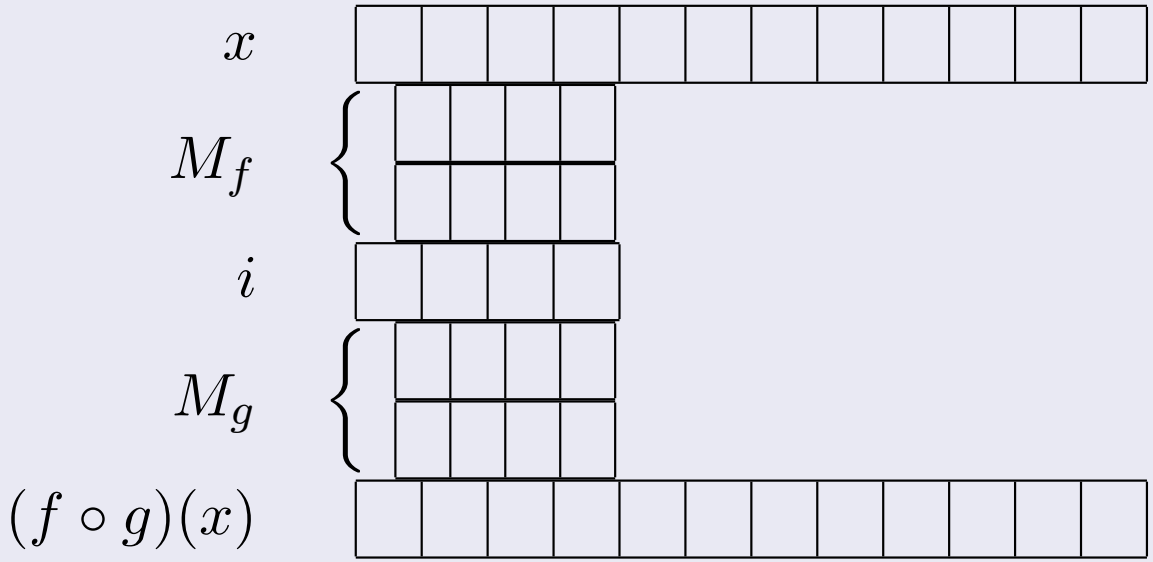
A trükk

Nem tároljuk el M_f teljes outputját, csak a legutolsóként írt output regiszter sorszámát és a belekerült értéket.

A visszavezetés tranzitivitása

A trükk

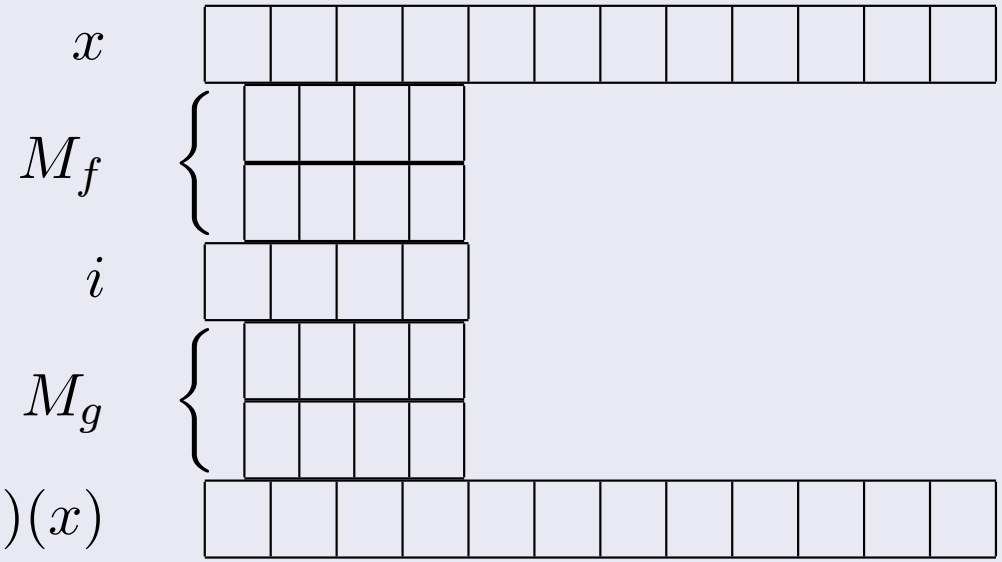
Nem tároljuk el M_f teljes outputját, csak a legutolsóként írt output regiszter sorszámát és a belekerült értéket.



A visszavezetés tranzitivitása

A trükk

Nem tároljuk el M_f teljes outputját, csak a legutolsóként írt output regiszter sorszámát és a belekerült értéket.

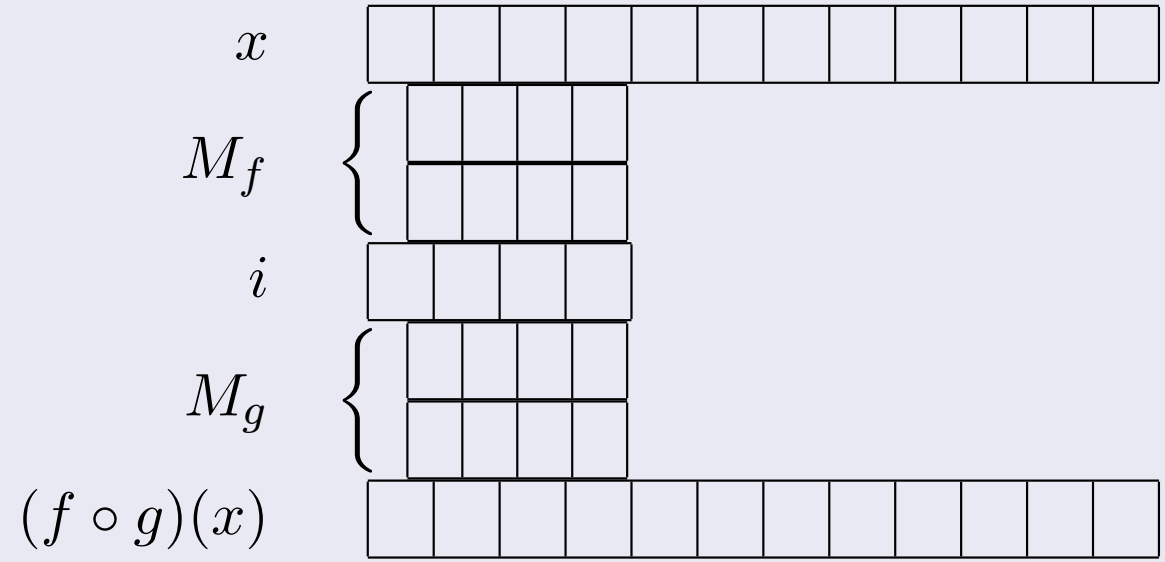


M_g-nek szüksége van egy nagyobb sorszámú regiszter tartalmára: folytatjuk M_f szimulálását.

A visszavezetés tranzitivitása

A trükk

Nem tároljuk el M_f teljes outputját, csak a legutolsóként írt output regiszter sorszámát és a belekerült értéket.



M_g-nek szüksége van egy nagyobb sorszámú regiszter tartalmára: folytatjuk M_f szimulálását.

M_g-nek szüksége van egy kisebb sorszámú regiszter tartalmára: elölről kezdjük M_f szimulálását.

$\mathbf{P}$-teljesség, $\mathbf{NL}$-teljesség

Korábban láttuk, hogy $\mathbf{P}$ (így $\mathbf{NL}$) bármely két nemtriviális problémája hatékonyan visszavezethető egymásra, így a polinomidejű visszavezetésre nézve ezen osztályokon belül a ,,teljesség" fogalma értelmetlenné válik.

$\mathbf{P}$-teljesség, $\mathbf{NL}$-teljesség

Korábban láttuk, hogy $\mathbf{P}$ (így $\mathbf{NL}$) bármely két nemtriviális problémája hatékonyan visszavezethető egymásra, így a polinomidejű visszavezetésre nézve ezen osztályokon belül a ,,teljesség" fogalma értelmetlenné válik.

Azt mondjuk, hogy egy probléma $\mathbf{NL}/\mathbf{P}$-teljes/nehéz, ha a logtáras visszavezetésre nézve az.

P-teljesség, NL-teljesség

Korábban láttuk, hogy **P** (így **NL**) bármely két nemtriviális problémája hatékonyan visszavezethető egymásra, így a polinomidejű visszavezetésre nézve ezen osztályokon belül a ,,teljesség" fogalma értelmetlenné válik.

Azt mondjuk, hogy egy probléma **NL**/**P**-teljes/nehéz, ha a logtáras visszavezetésre nézve az.

Tétel

A Hálózat-Kiértékelés probléma **P**-teljes.

P-teljesség, NL-teljesség

Korábban láttuk, hogy **P** (így **NL**) bármely két nemtriviális problémája hatékonyan visszavezethető egymásra, így a polinomidejű visszavezetésre nézve ezen osztályokon belül a ,,teljesség" fogalma értelmetlenné válik.

Azt mondjuk, hogy egy probléma **NL**/**P**-teljes/nehéz, ha a logtáras visszavezetésre nézve az.

Tétel

A Hálózat-Kiértékelés probléma **P**-teljes.

Az Elérhetőség probléma **NL**-teljessége

Tétel

Az Elérhetőség probléma **NL**-teljes.

Az Elérhetőség probléma NL-teljessége

Tétel

Az Elérhetőség probléma **NL**-teljes.

Ötlet

Azt már láttuk, hogy Elérhetőség $\in$ **NL**.
Az **NL**-nehézséghez mint korábban, az elérhetőségi módszert alkalmazzuk: egy nemdeterminisztikus, $\mathcal{O}(\log n)$ tárkorlátos gép konfigurációs gráfjában megoldva az elérhetőségi problémát a kezdőkonfigurációtól az elfogadóig, készen vagyunk.

Következmény

Az Elérhetetlenség probléma **NL**-teljes.

Az Elérhetőség probléma NL-teljessége

Tétel

Az Elérhetőség probléma **NL**-teljes.

Ötlet

Azt már láttuk, hogy Elérhetőség $\in \mathbf{NL}$.
Az **NL**-nehézséghez mint korábban, az elérhetőségi módszert alkalmazzuk: egy nemdeterminisztikus, $\mathcal{O}(\log n)$ tárkorlátos gép konfigurációs gráfjában megoldva az elérhetőségi problémát a kezdőkonfigurációtól az elfogadóig, készen vagyunk.

Következmény

Az Elérhetetlenség probléma **NL**-teljes.

Hiszen az Immerman-Szelepcsényi tétel szerint $\mathbf{NL} = \mathrm{co}\mathbf{NL}$.

Logaritmikus tár

Tétel

A 2SAT probléma **NL**-teljes.

Logaritmikus tár

Tétel

A 2SAT probléma **NL**-teljes.

Ötlet

Azt már tudjuk, hogy $2\text{SAT} \in \mathbf{NL}$.

Logaritmikus tár

Tétel

A 2SAT probléma **NL**-teljes.

Ötlet

Azt már tudjuk, hogy $2\text{SAT} \in \mathbf{NL}$. Tekintsük az ELÉRHETETLENSÉG egy példányát.

Logaritmikus tár

Tétel

A 2SAT probléma **NL**-teljes.

Ötlet

Azt már tudjuk, hogy $2\text{SAT} \in \mathbf{NL}$. Tekintsük az ELÉRHETETLENSÉG egy példányát. Minden csúcshoz rendeljünk egy x változót.

Tétel

A 2SAT probléma **NL**-teljes.

Ötlet

Azt már tudjuk, hogy $2\text{SAT} \in \mathbf{NL}$. Tekintsük az ELÉRHETETLENSÉG egy példányát. Minden csúcshoz rendeljünk egy x változót. A 2SAT azon φ példányát készítjük el, mely az összes $\neg x \vee y$ tagokból áll, ahol (x, y) él, továbbá az s és $\neg t$ tagokból, ahol s a kezdőcsúcs és t a cél.

Tétel

A 2SAT probléma **NL**-teljes.

Ötlet

Azt már tudjuk, hogy $2\text{SAT} \in \mathbf{NL}$. Tekintsük az ELÉRHETETLENSÉG egy példányát. Minden csúcshoz rendeljünk egy x változót. A 2SAT azon φ példányát készítjük el, mely az összes $\neg x \vee y$ tagokból áll, ahol (x, y) él, továbbá az s és $\neg t$ tagokból, ahol s a kezdőcsúcs és t a cél.
Így φ kielégíthető $\Leftrightarrow$ s-ből nem érhető el t.

Tétel

A 2SAT probléma **NL**-teljes.

Ötlet

Azt már tudjuk, hogy $2\text{SAT} \in \mathbf{NL}$. Tekintsük az ELÉRHETETLENSÉG egy példányát. Minden csúcshoz rendeljünk egy x változót. A 2SAT azon φ példányát készítjük el, mely az összes $\neg x \vee y$ tagokból áll, ahol (x, y) él, továbbá az s és $\neg t$ tagokból, ahol s a kezdőcsúcs és t a cél.
Így φ kielégíthető $\Leftrightarrow$ s-ből nem érhető el t.

Emiatt a 2SAT komplementere is **NL**-teljes.

Összefoglalás

- Megismertük Savitch tételét és következményét.
- Megismertük az Immermann-Szelepcsényi tételt és következményét.
- Megismertük a logaritmikus tárigényű visszavezetést és hogy mi motiválja a bevezetését.
- Láttuk, hogy a logaritmikus tárigényű visszavezetés tranzitív.
- Kimondtuk, hogy a Hálózat-Kiértékelés probléma **P**-teljes.
- Beláttuk, hogy Elérhetőség, 2Sat és komplementereik **NL**-teljesek.