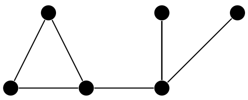
Bonyolultságelmélet gyakorlat – 06
Gráfos visszavezetések I.

Recap: Független Csúcshalmaz

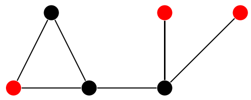
- **Input:** egy G gráf és egy k szám
- **Output:** van-e G-ben k darab olyan csúcs, melyek páronként **nem** szomszédosak?

A Független Csúcshalmaz egy **NP**-teljes probléma.

Pl. ez a lenti gráf $k = 3$-mal egy „igen” példány...



...mert benne a **piros** csúcsok egy 3-elemű független csúcshalmazt alkotnak



Ugyanez a gráf $k = 4$-gyel már egy „nem” példány, 4 csúcsot már nem tudunk találni benne úgy, hogy egyik se legyen szomszédos közülük egyik másikkal sem.

Klikk

- **Input:** egy G gráf és egy k szám
- **Output:** van-e G-ben k darab olyan csúcs, melyek páronként szomszédosak?

Az összes mai problémánk könnyen láthatóan **NP**-beliek, ezt nem nézzük meg külön mindre, hogy miért, ezért a mai feladataink csak az **NP**-nehézséget kérdezik, de amelyik **NP**-nehéz, az mind **NP**-teljes is lesz.

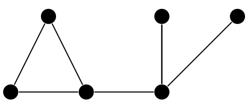
1. feladat.

Mutassuk meg, hogy a Klikk probléma **NP**-nehéz!

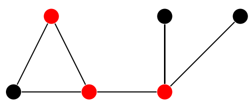
Csúcslefedés

- **Input:** egy G gráf és egy k szám
- **Output:** ki tudjuk-e választani G-nek k darab csúcsát úgy, hogy élnek legalább az egyik végpontja ki legyen választva?

Pl. ez a lenti gráf $k = 3$-mal egy „igen” példány...



...mert benne a **piros** csúcsok egy 3-elemű lefogó csúcshalmazt alkotnak



Ugyanez a gráf $k = 2$-vel már egy „nem” példány lenne.

2. feladat.

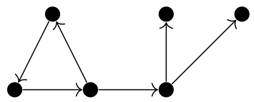
Mutassuk meg, hogy Csúcslefedés probléma **NP**-nehéz!

Domináns Csúcshalmaz

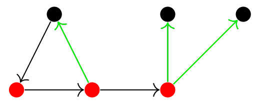
- **Input:** egy $\vec{G}$ irányított gráf és egy k szám
- **Output:** van-e G-ben olyan k-elemű csúcshalmaz, melyből minden más csúcs elérhető egy lépésben?

(azaz $X \subseteq V$ domináns, ha $\forall u \notin X \exists v \in X : (v,u) \in E$)

Pl. ez a lenti gráf $k = 3$-mal egy „igen” példány...



...mert benne a **piros** csúcsok egy 3-elemű független csúcshalmazt alkotnak, **zölddel** jelezve a többi csúcs elérését belőlük



3. feladat.

Mutassuk meg, hogy a Domináns Csúcshalmaz probléma **NP**-nehéz!

4. feladat.

Milyen bonyolult problémát kapunk akkor, ha a Domináns Csúcshalmaz problémában az „egy lépésben” kitételt elhagyjuk, és csak „elérhető”-t hagyunk?

1. feladat megoldása.

Mivel Független Csúcshalmaz egy **NP**-teljes probléma és „hasonlít” a Klikkre, így megpróbálhatjuk visszavezetni a Független Csúcshalmazt a Klikkre.

Azaz adnunk kell egy polinomidejű inputkonverziót, mely

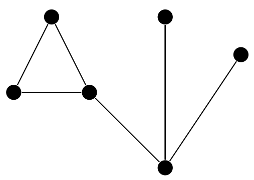
- egy G gráfból és egy k számból (Független Csúcshalmaz inputjából) készít egy G' gráfot és egy k' számot (Klikk inputja)
- úgy, hogy ha G-ben van k-elemű független csúcshalmaz, akkor G'-ben legyen k'-elemű klikk,
- és ha G'-ben lett k'-elemű klikk, akkor G-ben is kellett legyen k-elemű független csúcshalmaz.

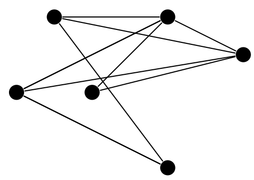
Ha ismét a „tanúból tanút” megközelítéssel nézzük a feladatot, akkor az inputkonverzió páronként nem szomszédos csúcsokból kéne valami egyszerű módon páronként szomszédosokat készítsen és viszont – erre adja magát az ötlet, hogy **vegyük a gráf komplementerét** (ahol volt él, ne legyen, ahol nem volt, legyen), és ne változtassuk meg a célszámot, azaz $G' := \overline{G}$ és $k' := k$, ez nyilván polinomidőben elvégezhető konverzió (a szomszédsági mátrix összes elemét, kivéve a főátlót, negálnunk kell, a számot meg csak lemásolni), és tartja a választ, hiszen

- ha G-ben X egy k-elemű független csúcshalmaz, akkor $\overline{G}$-ben ugyanez az X egy k-elemű klikk lesz ($\Rightarrow$ tanút a bal oldalon „be tudunk fejezni” tanúvá a jobb oldalon – most nincs is mit rajta befejezni, tehát „igen” példányból „igen” példány lesz),
- ha pedig $\overline{G}$-ben lett egy X k-elemű klikk (tanú a jobb oldali problémához), akkor ugyanaz az X az eredeti G-ben egy független csúcshalmaz volt (tehát a jobb oldali probléma tanúi az eredeti példányban „átalakíthatóak” a bal oldali probléma tanúivá, emiatt „nem” példányból „nem” példány lesz)

Egy példa a visszavezetésre, hogy biztos egy lapon legyünk:

Pl. ebből a gráfból $k = 3$ célszámmal… …ez a gráf készül, szintén $k = 3$ célszámmal:





(itt épp „igen” példányból készül „igen” példány.)

2. feladat megoldása.

Keresnünk kéne egy olyan ismerten **NP**-teljes problémát, ami „hasonlít” erre eléggé ahhoz, hogy könnyen lehessen konstruálni arról a Csúcslefedésre egy hatékony visszavezetést.

Visszanézve a Független Csúcshalmazra és a Csúcslefedésre adott két (egy) példa gráfot és a megadott tanúkat azt látjuk, hogy (ha a gráf csúcshalmazát V-vel jelöljük) az egyik problémára X volt a példa tanú, a másikra pedig épp $V - X$ (a második példában épp azok a piros csúcsok, melyek az első példában feketék maradtak).

Ez vajon mindig működik? Igen:

- ha X egy független csúcshalmaz $G = (V, E)$-ben, az azt jelenti, hogy X-ből X-be nem megy él, ami azt jelenti, hogy minden élnek legalább az egyik végpontja $(V - X)$-ben kell legyen, tehát $(V - X)$ ilyenkor lefogó csúcshalmaz,
- és hasonlóan, ha X egy lefogó csúcshalmaz G-ben, az azt jelenti, hogy minden élnek legalább az egyik végpontja X-beli, ami azt jelenti, hogy nincs él $(V - X)$-ből $(V - X)$-be, tehát $(V - X)$ független csúcshalmaz.

Tehát $X \subseteq V$ pontosan akkor független csúcshalmaz $G = (V, E)$-ben, ha $V - X$ lefogó csúcshalmaz ugyanebben a G-ben. Ez már ad is egy módszert a „tanúból tanú készítése” részre, magát a gráfot nem is kell megváltoztatnunk, csak a célszámot: ha X egy k-elemű független csúcshalmaz, akkor $V - X$ egy $(|V| - k)$-elemű lefogó ponthalmaz lesz.

Ezek miatt a következő (nyilván gyors) inputkonverzió egy hatékony visszavezetés Független Csúcshalmazról Csúcslefedésre:

- ha (G, k) a Független Csúcshalmaz egy inputja,
- akkor készítsük belőle a Csúcslefedés $(G, n - k)$ inputját, ahol n a G gráf csúcsainak száma.

(A választartás jön az előbbiekből: ha (G, k)-hoz X egy k-elemű tanú, azaz egy független csúcshalmaz, akkor $V(G) - X$ egy $(n - k)$-elemű tanú lesz lefogó csúcshalmazra, visszafelé ugyanígy működik.)

3. feladat megoldása.

Hasonló **NP**-teljes problémát keresve esetleg eszünkbe juthat a Csúcslefedés, legalábbis ott is „dominálni” akartunk egy halmazzal egy másikat: ott a kiválasztott csúcsokkal az éleket, itt meg a kiválasztott csúcsokkal akarjuk az összes többi csúcsot.

Próbáljuk akkor meg visszavezetni a Csúcslefedést a Domináns Csúcshalmazra! Azaz most egy olyan inputkonverziót kell adnunk, mely

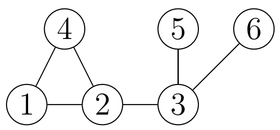
- egy G gráfból és egy k számból (a Csúcslefedés inputja) készít egy $\vec{G}$ (irányított!) gráfot és egy k' számot,
- úgy, hogy ha G-ben van k-elemű lefogó csúcshalmaz, akkor $\vec{G}$ben van k'-elemű domináns csúcshalmaz,
- és ha $\vec{G}$-ben lett k'-elemű domináns csúcshalmaz, akkor G-ben volt k-elemű lefogó csúcshalmaz.

Első közelítésben eszünkbe juthat egy ilyen konstrukció:

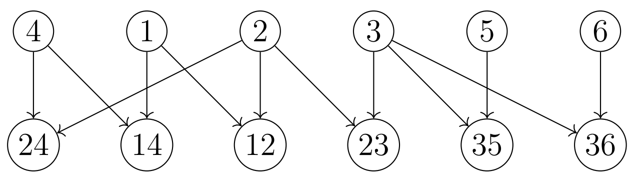
- legyenek $\vec{G}$ csúcsai a G csúcsai **és** a G élei (elvégre eredetileg csúcsokkal fedtünk éleket, most csúcsokkal akarunk más csúcsokat dominálni – mi lenne, ha az eredeti élekből **is** csúcsokat készítenénk),
- és akkor menjen él egy u eredeti csúcsból egy e eredeti élbe, ha u az e egyik végpontja (végül is eredetileg egy csúccsal fedtük a rá illeszkedő éleket, most meg dominálni akarjuk őket)

Eddig itt tartunk (a jobb oldalon azért vannak csak megkeverve a számok, hogy átlátható legyen a rajz, kevés keresztező éllel):

Pl. ebből a Csúcslefedés input gráfból…

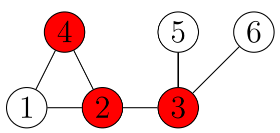


…ez a Domináns Csúcshalmaz input gráf készülne:

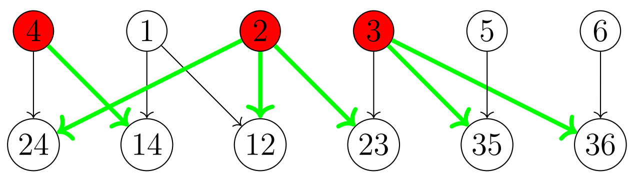


Ez abból a szempontból haladás, hogy (tanúból tanút próbálunk készíteni) a bal oldalon egy lefogó csúcshalmazt ha a jobb oldalon kiválasztunk, ők dominálni fogják az egész alsó sort:

Pl. ez a Csúcslefedés tanú…



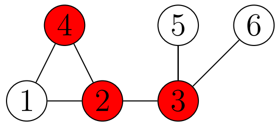
…dominálja a zöld élekkel az alsó sort:



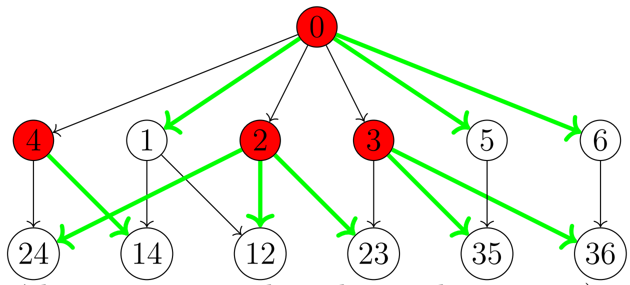
De ez még nem lesz teljes értékű tanú a jobb oldalon, hiszen a példában az eredeti 1, 5 és 6 csúcsok nincsenek dominálva. Általában is, a kiválasztott „felső sor-beli” csúcsok csak az alsó sort tudják dominálni, kellene egy módszer arra, hogy a felső sor kimaradt csúcsait is dominálhassuk.

Erre egy megoldás lehet **még egy csúcs** felvétele a generált példányba, ami dominálja az összes **eredeti csúcsot**:

Pl. ez a Csúcslefedés tanú…



…plusz az új csúcs dominálja a zöld élekkel az összes többit:



Azaz az eddigi konstrukciónk (ami vagy választartó lesz, vagy nem, de az biztos, hogy gyors):

- az új $\vec{G}$ gráf csúcsai legyenek az eredeti G gráf csúcsai, **plusz** G élei, **plusz** egy új v csúcs,
- az új v csúcsból vezessen él G minden eredeti csúcsába, azokból pedig G azon éleire, melyeknek ők végpontjai,
- ha pedig az eredeti Csúcslefedés problémában k volt a célszám, akkor legyen a generált Domináns Csúcshalmaz problémában $k+1$ a célszám.

Meg kéne még mutassuk, hogy a konstrukció választartó.

- Hogy „igen” példányból „igen” példány lesz, az könnyebb: ha G-ben X egy k-elemű lefogó csúcshalmaz, akkor $\vec{G}$-ben $X \cup \{v\}$ (ahol v az új „felső” csúcs) egy $(k+1)$-elemű csúcshalmaz, ami domináns, mert
  - v benne van,
  - az eredeti csúcsok mindegyikét dominálja v,
  - az eredeti éleket pedig pont azért dominálják X csúcsai, mert eredetileg X egy lefogó csúcshalmaz volt.
- Hogy „nem” példányból „nem” példány lesz, az nehezebb: itt induljunk ki egy $(k+1)$-elemű domináns csúcshalmazból a generált $\vec{G}$ gráfban.
  - Mivel v-t senki más nem dominálja (mert nincs belevezető él), ezért ő biztosan benne van a domináns csúcshalmazban.
  - Az is lehet, hogy olyan csúcsok is benne vannak a domináns csúcshalmazban, amik eredetileg G-ben **élek** voltak. Viszont ezek nem dominálnak más csúcsot! (nincs belőlük kivezető él) Ez azt jelenti, hogy ha egy (u, v) eredeti él szerepel a domináns csúcshalmazban, akkor őt kivéve belőle és helyére betenni akár u-t, akár v-t (mindegy), **továbbra is domináns csúcshalmazt kapunk** (ami lehet, hogy kisebb lesz, mint az eredeti volt, ha pl. u már eleve benne volt a domináns csúcshalmazunkban). (Hiszen eredetileg (u, v) benne volt és nem dominált senkit, ehelyett most u van benne, aki dominálja (u, v)-t biztosan és még esetleg másokat is, ezzel nem veszít - hetjük el a dominanciát)

– Tehát: ezzel a módszerrel $\vec{G}$-nek egy tetszőleges $(k+1)$-elemű domináns csúcshalmazából tudunk készíteni egy **legfeljebb** $(k+1)$-elemű olyan domináns csúcshalmazt szintén $\vec{G}$-ben, melynek elemei az új v csúcs, és rajta kívül még csupa olyan (legfeljebb k darab) eredeti csúcsa G-nek, amik dominálják az eredeti éleket – vagyis amik tényleg egy tanút, egy legfeljebb k-elemű lefogó csúcshalmazt alkotnak G-ben.

Tehát ez az inputkonverzió tényleg egy választartó, polinomidejű inputkonverzió.

Itt azt láttuk, hogy a jobb oldalon egy tanút nem feltétlenül tudunk egy-az-egyben átalakítani a bal oldalon egy tanúvá (pl. ha ki van választva egy eredeti él is a domináns halmazba, akkor abból nem tudunk csúcslefedés tanút készíteni), viszont egy tanút a jobb oldalon át tudtunk alakítani egy olyan tanúvá még mindig a jobb oldalon, amit már át tudunk konvertálni egy tanúvá a bal oldalhoz – ez is gyakori, és sokszor azért nem jó egy visszavezetés, mert „hamis találatok" jönnek be, amikor is igaz, hogy a bal oldal egy tanújához tudunk készíteni a jobb oldali generált példány egy tanúját, viszont a jobb oldal tanúi kinézhetnek egész másképp is, és nem mindig lehet ilyen módon egy „nem visszaalakítható" tanúhoz találni egy „visszaalakítható" tanút, ekkor egy „nem" példányból készülhet „igen" példány és az azt mutatja, hogy az az inputkonverzió nem tartja a választ.

Megjegyzés.

Egy új csúcs felvétele helyett azt is meghetetjük, hogy minden eredeti csúcsot összekötünk egymással a generált gráfban, a célszám pedig ugyanaz marad, mint az eredeti Csúcslefedés inputban volt, az is jó visszavezetés lesz, mert az eredeti csúcsok mind dominálják egymást.

---

4. feladat megoldása.

Úgy a feladat már sokkal könnyebb: nyilván ha a gráf egy erősen összefüggő komponensének egy csúcsát elérjük, akkor az összes többit. Ezért egyszerűsíthetjük a feladatot arra, hogy az eredeti $\vec{G}$ input gráf helyett annak a **komponensgráfját** nézzük és ebben keresünk „domináns" csúcshalmazt.

Nyilván ebben a gráfban ki kell válasszuk azokat a csúcsokat, amikbe nem vezet él (források), hiszen őket nem tudja más dominálni.

Ha viszont kiválasztjuk őket, akkor belőlük az összes többi csúcs elérhető lesz (ez pl belátható úgy, hogy topologikusan rendezzük a komponensgráf csúcsait, aztán indukcióval megmutatjuk eszerint a sorrend szerint, hogy mindegyik vagy 0 befokú, vagy dominálja valaki).

Tehát az így módosított feladatot meg tudjuk oldani úgy, hogy az input $\vec{G}$ gráf komponensgráfjában megszámoljuk a forrás csúcsokat, és ezt összehasonlítjuk a kapott k célszámmal; erre implementálható egy **lineáris** futásidejű algoritmus, tehát ez a probléma **P**-beli (és emiatt elég kétséges, hogy **NP**-nehéz is lenne egyben, hiszen akkor $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$).