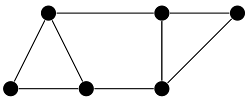
Bonyolultságelmélet gyakorlat – 07
Gráfos visszavezetések II.

Recap: HAMILTON-KÖR / HAMILTON-ÚT

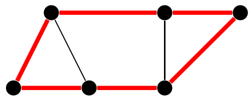
- **Input:** egy G gráf
- **Output:** van-e G-ben olyan kör / út, mely minden csúcson pontosan egyszer halad át?

A HAMILTON-KÖR és a HAMILTON-ÚT **NP**-teljes problémák, irányított és irányítatlan gráfokra is.

Pl. ez a lenti gráf egy „igen” példány…



…mert benne a **piros** élek egy Hamilton-kört alkotnak



Ha a gráfból elvennénk a felső „hosszú vízszintes” élt, úgy már „nem” példány lenne, pl. azért, mert a két „háromszög” közt csak egy élen tudnánk „átjárni” és vissza már nem tudnánk menni.

$\frac{n}{2}$ HOSSZÚ KÖR

- **Input:** egy G gráf
- **Output:** van-e G-ben olyan kör, mely a csúcsoknak pontosan a felén halad át?

1. feladat.

Mutassuk meg, hogy az $\frac{n}{2}$ HOSSZÚ KÖR probléma **NP**-nehéz!

Hasonlóan az $\frac{n}{2}$ HOSSZÚ KÖR problémához, lehet definiálni pl. az $\frac{n}{100}$ HOSSZÚ KÖR vagy a $\sqrt{n}$ HOSSZÚ KÖR problémákat is.

2. feladat.

Mutassuk meg, hogy az $\frac{n}{100}$ HOSSZÚ KÖR és a $\sqrt{n}$ HOSSZÚ KÖR problémák is **NP**-nehezek!

Másképp is megpróbálhatjuk „könnyíteni” a Hamilton-típusú problémákat, például rögzíthetjük az útnak a két végpontját:

s-t HAMILTON-ÚT

- **Input:** egy G gráf és két kijelölt csúcsa, s és t
- **Output:** van-e G-ben olyan Hamilton-út, mely s-ből indul és t-ben végződik?

3. feladat.

Mutassuk meg, hogy s-t Hamilton-Út is **NP**-nehéz!

Recap: Részgráf, feszített részgráf

Egy G gráfnak úgy kapjuk ...

- a **részgráfjait**, hogy G-ből csúcsokat és/vagy éleket elhagyhatunk (a csúcsokat persze a rájuk illeszkedő élekkel együtt),
- a **feszített részgráfjait**, hogy G-ből csúcsokat elhagyhatunk (a rájuk illeszkedő élekkel együtt).

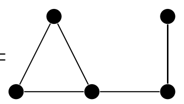
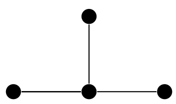
(nem muszáj elhagyni semmit, egy gráf önmagának mindig (feszített) részgráfja.)

(Feszített) Részgráf Izomorfizmus

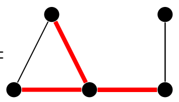
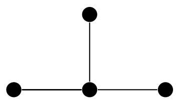
- **Input**: egy G és egy H gráf
- **Output**: izomorf-e a H gráf G-nek valamely (feszített) részgráfjával?

(azaz: van-e olyan H' (feszített) részgráfja G-nek, ami csak annyiban különbözik H-tól, hogy mások a csúcsok „nevei”?)

pl. ha az input gráfok...

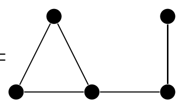
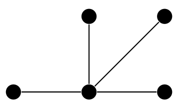
$G =$  és $H =$ 

... akkor ez a részgráf izomorfizmusnak egy „igen” példánya, mert H „megjelenik” G-ben (pirossal):

$G =$  és $H =$ 

Viszont ugyanez az input a Feszített Részgráf Izomorfizmusnak egy „nem” példánya: csak csúcsok elhagyásával nem tudjuk megkapni G-ből H-t (el kell ahhoz hagynunk a háromszögnek a „bal oldali ferde” élét is).

ha pedig az input gráfok...

$G =$  és $H =$ 

... akkor ez egy „nem” példány, pl. mert H-ban van egy 4 fokszámú csúcs, G-ben pedig minden csúcs maximum 3 fokú, amit növelni persze nem lehet úgy, hogy csúcsokat/éleket elhagyunk.

4. feladat.

Mutassuk meg, hogy a Részgráf Izomorfizmus **NP**-nehéz probléma!

5. feladat.

Mutassuk meg, hogy a Feszített Részgráf Izomorfizmus **NP**-nehéz probléma!

1. feladat megoldása.

Itt a legcélszerűbbnek az tűnik, hogy a Hamilton-Kör problémát próbáljuk meg visszavezetni az $\frac{n}{2}$ Hosszú Kör problémára.

Azaz adnunk kell egy polinomidejű inputkonverziót, mely

- egy G gráfból (Hamilton-Kör inputjából) készít egy G' gráfot ($\frac{n}{2}$ Hosszú Kör inputja)
- úgy, hogy ha G-ben van Hamilton-kör, akkor G'-ben legyen olyan kör, mely a G'-beli csúcsok felén áthalad,
- és ha G'-ben lett ekkora kör, G-ben is kellett legyen Hamilton-kör.

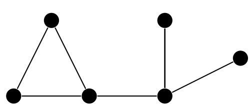
Ha a „tanúból tanút/tanúkezdeményt kapjunk” megközelítéssel próbálunk egy megoldást keresni, akkor egy olyan konverzióra lenne pl. szükségünk, melyben egy eredeti G gráfban lévő Hamilton-körből az új G' gráfban egy G' csúcsainak felén átmenő kör készül.

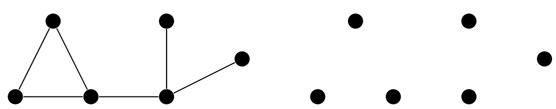
A legkézenfekvőbb mód annak látszik, hogy érjük el azt, hogy G részgráfja legyen G'-nek, és G'-ben kétszer annyi csúcs legyen, mint G-ben: így a G-beli eredeti Hamilton-kör a G' csúcsainak pont a felén fog áthaladni.

A választartáshoz még annyira van szükségünk, hogy G'-ben ne „jelenhessen meg” új (nagy) kör azokhoz képest, amik G-ben már eleve ott vannak: tehát úgy kéne megduplázni a csúcsok számát, hogy új kör ne keletkezzen egyáltalán, az már egy helyes visszavezetés lenne.

Erre egy jó módszer pl. (mivel a feladat nem kéri, hogy összefüggő legyen a G' gráf) az, hogy G't úgy készítsük el, hogy G mellé felveszünk még annyi izolált csúcsot, ahány csúcsa G-nek van,

pl. ebből a G gráfból… …ez a G' gráf készül:





(itt épp „nem” példányból készül „nem” példány.)

Ez a konverzió jó lesz visszavezetésnek, hiszen lineáris időben hozzá tudunk adni a gráfunkhoz ennyi csúcsot, és tartja a választ, hiszen ha G-ben van Hamilton-kör, akkor G'-ben ugyanaz a kör a G'-beli csúcsok pont felén halad át, ha pedig G'-ben van csúcsai felén áthaladó kör, akkor az nyilván nem érintheti az újonnan generált csúcsokat, hiszen azok izoláltak, így az a kör csak a G'-ben lévő eredeti G-példány csúcsait érintheti, annak pedig minden csúcsán át kell haladjon, hogy a G' csúcsainak felét érintse, tehát ekkor ez egy Hamilton-kör lesz G'-ben.

Ez egy gyakori technika **NP**-nehézség bizonyítására: ha egy ismerten **NP**-teljes probléma specifikációját annyiban változtatjuk meg, hogy egy ugyanolyan struktúrájú, de „kisebb” tanút keresünk az input méretéhez képest, akkor sok esetben „felfújhatjuk” az eredeti probléma inputját akkorára, hogy az új problémában egy (ahhoz képest) kis tanú egyben az eredetire legyen tanú; ennél a módszernél arra kell figyelnünk, hogy amikor megnöveljük az inputot, akkor ezt úgy tegyük, hogy a pluszban hozzágenerált rész ne tudjon segíteni a tanú generálásában és kénytelenek legyünk az eredeti részt használni.

2. feladat megoldása.

Ismét célszerűnek látszik a HAMILTON-KÖR problémából elindulni és azt visszavezetni az új problémákra. Mindkettő annyiban tér el a HAMILTON-KÖR problémától, hogy az input méretéhez képest „kisebb” tanút keresünk: itt ha használjuk az előző feladat „input felfújó” módszerét, akkor:

- az $\frac{n}{100}$ HOSSZÚ KÖR problémánál azt kell elérjük, hogy a G-ből generált G' gráfban egy ahhoz képest századakkora kör az pont egy Hamilton-kört adjon az eredeti gráfban;
- a $\sqrt{n}$ HOSSZÚ KÖR problémánál pedig azt, hogy ha G'-ben összesen m csúcs lesz, akkor abban egy $\sqrt{m}$ hosszú kör garantáltan egy G-beli Hamilton-kör legyen.

Mindezt elérjük akkor, ha

- az $\frac{n}{100}$ HOSSZÚ KÖR probléma esetén ha az eredeti G gráfunkban N darab csúcs van, akkor ebből kapjuk úgy G'-t, hogy G mellé még felveszünk $99N$ darab izolált csúcsot;
- a $\sqrt{n}$ HOSSZÚ KÖR problémánál pedig (mivel ha G'-ben m csúcs lesz, akkor egy $\sqrt{m}$ hosszú kör kellene legyen N hosszú, így $m = N^2$ csúcsú G'-t kéne generáljunk) vegyünk fel az N-csúcsú eredeti G gráf mellé $N^2 - N$ darab izolált csúcsot!

Mindkét esetben polinomidejű az inputkonverzió és tartja a választ: egy G-beli eredeti Hamilton-kör pont megfelelő méretű lesz G'-ben, és G'-ben ha van egy előírt méretű kör, akkor az nem érintheti az izolált csúcsokat és emiatt ő egy G-beli Hamilton-kör kell legyen.

Megjegyzés.

A $\log n$ HOSSZÚ KÖR problémával már nem lenne ez a módszer működőképes: ehhez egy N-csúcsú gráfból egy 2^N-csúcsút kéne készítenünk, azaz hozzávenni az eredeti gráfhoz $2^N - N$ darab izolált csúcsot, ami viszont nem megy polinomidőben (mert az input mérete ha mondjuk szomszédsági mátrixszal van ábrázolva az input, akkor $n = N^2$, amihez képest a $2^N - N$ nem polinom.)

3. feladat megoldása.

Mivel a két probléma (nevében is) hasonlít egymáshoz, célszerűnek látszik megpróbálni visszavezetni a Hamilton-Út problémát az s-t Hamilton-Út problémára.

Azaz, kell adjunk egy olyan polinomidejű inputkonverziót, mely egy G gráfból elkészít egy G' gráfot, és annak kijelöli egy s és egy t csúcsát, úgy, hogy G-ben pontosan akkor legyen Hamilton-út, ha G'-ben van s-ből t-be menő Hamilton-út.

Ismét végiggondolva az **NP** osztályon belül általában működő „tanúból tanút vagy lehetséges tanúkezdeményt kéne készíteni" módszert, az tűnik jó ötletnek, hogy a G-beli eredeti Hamilton-utak valahogy megjelenjenek G'-ben (tehát G legyen részgráfja G'-nek), mégpedig úgy, hogy minden eredeti G-beli Hamilton-utat „be lehessen fejezni" G'-ben úgy, hogy G'-ben váljanak Hamilton-úttá, melyek ráadásul G'-nek az s csúcsából mennek a t csúcsába.

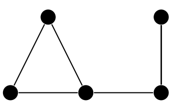
Ebből az látszik, hogy ha ezzel a módszerrel készítjük a visszavezetést, akkor

- G'-nek a G részgráfja kéne legyen,
- s és t új csúcsok kellenének legyenek (mert különben nem tudjuk „befejezni" a G-beli Hamilton-utakat úgy, hogy s-ből menjenek t-be, hiszen lehet, hogy pont a közepén van s vagy t a G-beli útnak),
- és bárhol is van G-ben egy Hamilton-út, annak egyik végét s felé, másik végét t felé meg lehessen hosszabbítani.

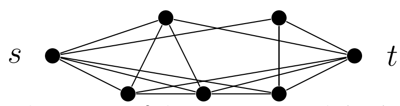
Persze mindezt anélkül kell megtegyük, hogy tudjuk, „hol" is van G-ben Hamilton-út, ha van benne egyáltalán, mert egy Hamilton-út megkeresésére nem ismert polinomidejű algoritmus, így ha a konverzióba beírunk egy „keressünk Hamilton-utat G-ben és a két végére kössünk egy s és egy t csúcsot", az ugyan tartaná a választ, de nem lenne polinomidejű konverzió.

Viszont, ha G **minden csúcsához** hozzákötjük a pluszban generált s és t csúcsokat:

pl. ebből a G gráfból…

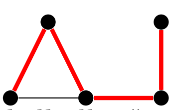


…ez a G' gráf készül:

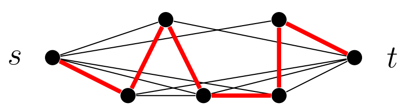


akkor az már biztosítva is van, hogy polinomidejű (lineáris ideig tart felvenni ezt a két új csúcsot G-hez és felvenni minden élt s-ből és t-ből G eredeti csúcsaihoz), és hogy „igen" példányból „igen" példány készül,

pl. ebből a G-beli tanúból…



…ez a G'-beli tanú készíthető:



és már csak azt kell ellenőriznünk a választartáshoz, hogy ha a generált G'-ben van s-ből t-be Hamilton-út, akkor G-ben kellett legyen Hamilton-út. Ez is teljesül, hiszen egy Hamilton-út G'-ben, mely s-ből indul és t-ben végez, a két csúcs között pont egy G-beli Hamilton-utat kell bejárjon, hiszen közben nem érintheti sem s-t, sem t-t még egyszer, így G eredeti csúcsai mindegyikét pont egyszer fogja bejárni, kizárólag G eredeti éleit felhasználva, így a G'-beli s-t Hamilton-útnak a két végpontját „levágva" garantáltan egy G-beli Hamilton-utat kapunk.

4. feladat megoldása.

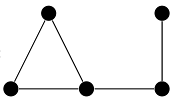
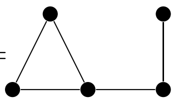
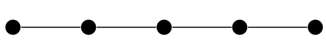
Ismét azzal érdemes kezdeni, hogy keresünk egy ismerten **NP**-teljes problémát, ami „hasonlít” ehhez az új problémánkhoz.

Messziről ránézve itt a feladat „egy gráfban keresni egy másikat” – pont ilyen feladat a Hamilton-Út is (amikor is egy N-csúcsú utat keresünk az N-csúcs G-ben), a Hamilton-Kör is (amikor is egy N-csúcsú kört), és a Klikk is (amikor pedig egy k-csúcsú teljes gráfot).

Ezek alapján egyből adja magát három visszavezetés is, melyek mind polinomidejűek és tartják a választ:

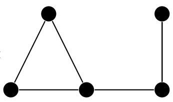
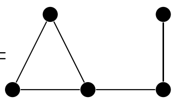
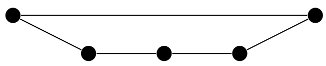
- a Hamilton-Út $\leq$ Részgráf Izomorfizmus: az input N-csúcsú G gráfban keressük azt a H gráfot, mely egy N csúcsból álló „útgráf”:

  pl. ha az input G gráf... akkor a generált G' és H' gráfok...

  $G =$  $G' =$  és $H' =$ 

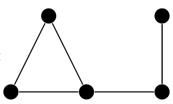
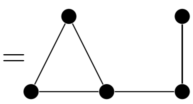
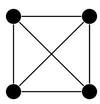
- a Hamilton-Kör $\leq$ Részgráf Izomorfizmus: az input N-csúcsú G gráfban keressük azt a H gráfot, mely egy N csúcsból álló „körgráf”:

  pl. ha az input G gráf... akkor a generált G' és H' gráfok...

  $G =$  $G' =$  és $H' =$ 

- a Klikk $\leq$ Részgráf Izomorfizmus: ha a Klikk inputja a G gráf és a k szám, akkor G-ben keressük azt a H gráfot, mely egy k csúcsból álló teljes gráf:

  pl. ha az input G gráf és k szám... akkor a generált G' és H' gráfok...

  $G =$  és $k = 4$ $G' =$  és $H' =$ 

Ha esetleg a Független Csúcshalmaz jutott eszünkbe, ott nem lesz jó megoldás az, hogy k darab független csúcsot vegyünk fel, mert az mindenképp részgráf lesz G-ben (ha G legalább k-csúcsú); viszont, ha pl. előbb végrehajtjuk a Független Csúcshalmaz $\leq$ Klikk visszavezetést, majd az eredményen a Klikk $\leq$ Részgráf Izomorfizmus visszavezetést, akkor a kapott (összetett) inputkonverzió egy Független Csúcshalmaz $\leq$ Részgráf Izomorfizmus visszavezetés lesz.

5. feladat megoldása.

Itt érdemes lehet abból kiindulni, hogy van már visszavezetésünk egy nagyon hasonló problémára, a Részgráf Izomorfizmusra több is; hátha valamelyik jó lesz egyben visszavezetésnek a Feszített Részgráf Izomorfizmusra is!

- A Hamilton-Út $\leq$ Részgráf Izomorfizmus visszavezetés, amit láttunk az előző feladatban, **nem lesz jó** visszavezetésnek: a generált G' és H' gráfok azonos csúcsszámúak lesznek, így pont akkor lesz a Feszített Részgráf Izomorfizmusnak egy „igen” példánya a (G', H') pár, ha G', azaz G is konkrétan az N-csúcsú „útgráf”, azaz ez a konverzió erre a problémára nem tartja a választ.
- Ugyanez a helyzet a Hamilton-Kör esetében is: az N-csúcsú kör pont akkor lesz feszített részgráfja az N-csúcs G-nek, ha G maga is egy kör (ami nem ugyanaz, mint hogy G-ben van Hamilton-kör).
- Viszont a Klikk $\leq$ Részgráf Izomorfizmus visszavezetés megfelelő lesz: ha G-ben van egy k-csúcsú klikk, akkor G-ből elhagyva a nem ebbe a klikkbe tartozó csúcsokat pont egy k-csúcsú teljes gráfot kapunk feszített részgráfként (tehát tanúból tanút tudunk készíteni balról jobbra, „igen” példányból „igen” példány lesz), ha pedig G-nek feszített részgráfja a k csúcsú teljes gráf, akkor nyilván részgráfja is, azaz van G-ben k darab páronként szomszédos csúcs.

Tehát a probléma tényleg **NP**-nehéz, az előző feladat Klikk $\leq$ Részgráf Izomorfizmus visszavezetése egyben egy Klikk $\leq$ Feszített Részgráf Izomorfizmus visszavezetés is lesz.