Bonyolultságelmélet gyakorlat – 08
Formulás visszavezetések I.

Recap: SAT

- **Input:** egy φ konjunktív normálformájú formula (CNF), pl. $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge \neg q$, **nincs az inputban üres klóz**
- **Output:** kielégíthető-e φ?

A SAT egy **NP**-teljes probléma.

1 Híján SAT

- **I**nput: φ CNF
- **O**utput: van-e olyan értékadás, ami kielégíti φ klózait, **legfeljebb egy kivételével**?

Pl. a $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge \neg q$ a SATnak egy „nem” példánya, de az 1 Híján SATnak egy „igen” példánya, pl. a $q = 1$, $p = 0$ értékadás kielégíti három klózából kettőt.

1. feladat.

Mutassuk meg, hogy 1 Híján SAT **NP**-nehéz!

2. feladat.

Mutassuk meg, hogy a 2 Híján SAT is **NP**-nehéz!

Nem csak úgy tudjuk „gyengíteni” formailag a SATtal kapcsolatos elvárásainkat, hogy egy konstans számmal csökkentjük az egyszerre elvárt kielégített klózok számát, hanem akár egy arányát is kérhetjük (pl. 2/3-SATnak az inputjai szintén CNF-ek, és akkor „igen” példány egy φ CNF, ha van olyan értékadás, mely φ klózainak legalább a 2/3-át kielégíti). Ez konkrétan a 2/3 választás esetén nem segít sokat:

3. feladat.

Mutassuk meg, hogy a 2/3 SAT is **NP**-nehéz!

4. feladat.

Mutassuk meg, hogy a 3/5-SAT probléma is **NP**-nehéz!

5. feladat.

Milyen bonyolult az 1/2-SAT probléma?

3x3SAT

A 3x3SAT a következő probléma:

- **Input:** egy CNF, melyben minden klózban legfeljebb 3 literál szerepel és melyben minden változó legfeljebb 3-szor fordul elő
- **Output:** kielégíthető-e?

6. feladat.

Mutassuk meg, hogy a 3x3SAT is **NP**-teljes!

1. feladat megoldása.

Egyrészt, a feladat hasonlít a SAT problémára, ezért érdemes lehet talán a SATot megpróbálni visszavezetni rá. Tehát kéne egy olyan polinomidejű inputkonverzió, mely

- egy φ CNF-ből egy φ' CNF-et készít,
- úgy, hogy φ kielégíthető $\Leftrightarrow$ φ' „max egy híján” kielégíthető.

Hasonló probléma-módosítást láttunk már: a Hamilton-körnek az „$n/100$” stb. variánsait. Ott az a módszer működött, hogy az input gráfot „felfújtuk” olyan részekkel, melyek nem játszhattak szerepet egy Hamilton-kör kialakulásában.

Ennek a mintájára pl. ha lehetne üres klózt is használni, a következő visszavezetés juthat eszünkbe:

$$\varphi \ \mapsto \ \varphi \wedge \square$$

Hiszen ha φ kielégíthető, akkor egy kielégítő értékadás az összes φ-beli klózt kielégítené, $\square$-ot pedig nyilván nem, így a jobb oldalon generált formulából egy híján elégítene ki minden klózt (tanúból tanút tudunk készíteni balról jobbra); ha pedig a jobb oldalon max egy klóz hamis egy értékadás mellett, akkor az az egy klóz csak az $\square$ lehet, és így az az értékadás φ összes klózát kielégítené (tanúból tanú készíthető jobbról balra).

Itt viszont az volt a kikötés, hogy nem használhatunk üres klózt. A második konstrukció, ami ez alapján eszünkbe juthat:

$$\varphi \ \mapsto \ \varphi \ \wedge \ p \ \wedge \ \neg p$$

ahol p egy változó (valójában nem számít, hogy új vagy sem).

Ez a konstrukció nyilván polinomidejű, csak hozzá kell éseljünk még két literált φ-hez; és a választ is tartja, hiszen

- (tanúból tanút balról jobbra) ha φ-nek $\mathcal{A}$ egy kielégítő értékadása, akkor $\mathcal{A}$ vagy p-t, vagy $\neg p$-t is ki fogja elégíteni (ha $\mathcal{A}(p) = 1$, akkor p-t, ha 0, akkor $\neg p$-t), így $\mathcal{A}$ kielégíti φ minden klózát, és még p és $\neg p$ közül is egyet, így maximum egy klóz lesz hamis a generált φ'-ben;
- (tanúból tanút jobbról balra) ha a generált formulának max egy híján minden klózát kielégíti egy $\mathcal{A}$ értékadás, akkor (mivel nem elégítheti ki egyszerre p-t és $\neg p$-t) a két új egységklóz közül az egyik lesz a hamis; emiatt $\mathcal{A}$ a φ eredeti klózait mindet kielégíti, és ezért φ tényleg kielégíthető lesz.

2. feladat megoldása.

Az előző feladathoz hasonlóan gondolkodva, ha megint a SATot próbáljuk meg visszavezetni erre a problémára és „felfújni” az inputot „kielégíthetetlen” klózokkal, akkor bár a következő konstrukció működne:

$$\varphi \;\mapsto\; \varphi \wedge \square \wedge \square,$$

hiszen így a jobb oldalon beraktunk két klózt, melyeket semmilyen értékadás nem tudna kielégíteni, azonban továbbra sem használhatunk üres klózt a feladat szövegezése szerint. A két $\square$ alapján jöhet a következő ötletünk:

$$\varphi \;\mapsto\; \varphi \;\wedge\; p_1 \;\wedge\; \neg p_1 \;\wedge\; p_2 \;\wedge\; \neg p_2,$$

ami nyilván egy polinomidejű transzformáció (itt p_1 és p_2 alapvetően mindegy, hogy milyen változók, lehetnek újak is, de nem feltétlen kell azok legyenek), és választartó is:

- (tanú balról jobbra) ha $\mathcal{A}$ kielégíti φ-t, akkor a jobb oldalon a p_1 és a $\neg p_1$ egységklózok közül is, meg a p_2 és $\neg p_2$ egységklózok közül is egyet-egyet elégít ki, a másikat hamisra állítja – ezért $\mathcal{A}$ a generált φ' formulának pontosan két klózát nem elégíti ki, tehát „igen” példányból valóban „igen” példány készül,

- (tanú jobbról balra) ha pedig a generált φ' formulában $\mathcal{A}$ legfeljebb kettőt elégít ki, akkor az a két klóz a $p_1 \wedge \neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_2$ klózok közül kell legyen kettő, mert ezek közül egyszerre csak kettő elégíthető ki egyszerre, a másik kettő hamis lesz. Emiatt, mivel az egész formulában max két klóz lesz hamis $\mathcal{A}$ mellett, így a φ eredeti klózát $\mathcal{A}$ igazzá kell tegye, tehát ha valamiből „igen” példány készül, akkor az eredeti formulánk a SATnak kellett „igen” példánya legyen.

3. feladat megoldása.

Ismét a SAT problémát látszik legkönnyebbnek visszavezetni erre a problémára, és ez ismét egy „az input méretéhez képest az elméletileg elvárhatónál valamivel kisebbet teljesítő tanú van-e" alakú feladat.

Az előző két feladat sémájához hasonlóan eszünkbe juthat egy ilyen konstrukció (miután az $n/2$-ről rájövünk, hogy az kevés lesz, mert az a 3/4-SATra lenne egy választartó visszavezetés):

$$C_1 \wedge \ldots \wedge C_k \;\mapsto\; C_1 \wedge \ldots \wedge C_k \wedge p_1 \wedge \neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_2 \wedge \ldots \wedge p_k \wedge \neg p_k,$$

ahol $p_1, \ldots, p_k$ változók. (Nem feltétlen kell hozzá az sem, hogy újak legyenek, sőt az sem, hogy különbözzenek.)

Ez a konstrukció polinomidejű, hiszen először megszámoljuk a klózokat, majd for ciklusban kiírunk ennyi darab pozitív és ugyanannyi negatív egységklózt az eredeti φ input klózai mellé; ez megy lineáris időben.

A választartásról pedig szintén a korábbi „felfújós" érvelés működik:

- (tanúból tanút, balról jobbra) Ha φ kielégíthető, pl. kielégíti az $\mathcal{A}$ értékadás, akkor ugyanez az értékadás a generált φ'-ben (mivel p_i és $\neg p_i$ valamelyikét mindenképp hamisra állítja, $\mathcal{A}(p_i)$-tól függően), így a hátsó $2n$ darab újonnan generált klózból $\mathcal{A}$ pontosan k darabot hamisra állít. Mivel a generált φ'-nek összesen $3k$ klóza van, ennek 2/3-a $2k$, amit pont ki is elégít ugyanez az értékadás (φ-nek mind a k eredeti klózát, plusz a hozzáadott $2k$ egységklóznak a felét, ami szintén k, összesen $k + k = 2k$ klózt).
- (tanúból tanút, jobbról balra) Ha az $\mathcal{A}$ értékadás kielégíti a generált φ'-beli összesen $3k$ klóznak a 2/3-át, azaz $2k$ klózát, akkor – mivel tetszőleges $\mathcal{A}$ értékadás a pluszban hozzárakott $2k$ darab klóznak pontosan a felét elégíti ki, és emiatt k klóz abban a részben mindenképp hamis lesz – $\mathcal{A}$ ki kell elégítse φ-nek mind a k klózát (különben $2k$-nál kevesebb klóz lenne kielégítve). Ez pedig azt vonja maga után, hogy φ kielégíthető, hiszen $\mathcal{A}$ igazzá teszi minden klózát egyszerre.

Tehát sikerült adjunk egy polinomidejű választartó visszavezetést az ismerten **NP**-teljes SATról a 2/3 SATra, ami emiatt szintén **NP**-nehéz kell legyen.

(Egyébként **NP**-beli, tehát **NP**-teljes is.)

4. feladat megoldása.

Ezt az előzőek mintájára, ezúttal csak röviden és egy kicsit általánosabban: ha a SATot szeretnénk rá visszavezetni, és kérdés, hogy egy $\varphi = C_1 \wedge \dots C_k$ CNF-hez mennyi $p_i \wedge \neg p_i$ alakú klózpárt szeretnénk „pluszban hozzáírni", hogy kijöjjön, akkor ezt gondoljuk meg:

- ha m klózpárt írunk hozzá, akkor lesz összesen $k + 2m$ klózunk,
- amiből egyszerre maximum $k + m$ kielégíthető, annyi pedig pontosan akkor, ha φ kielégíthető.

Tehát, most ezt az egyenletet kapjuk a 3/5 SAT esetén:

$$\frac{k+m}{k+2m} \;=\; \frac{3}{5},$$

amit ha átszorzunk:

$$5k + 5m \;= 3k + 6m,$$

azaz (kivonások)

$$2k \;=\; m,$$

ami azt mutatja, hogy a

$$C_1 \wedge \dots \wedge C_k \;\mapsto\; C_1 \wedge \dots \wedge C_k \wedge p_1 \wedge \neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_2 \wedge \dots \wedge p_{2k} \wedge \neg p_{2k}$$

inputkonverzió (hasonlóan a két korábbi feladat indoklásához) egy polinomidejű, választartó visszavezetés lesz SATról 3/5-SATra.

Megjegyzés.

Bármilyen racionális $\alpha \;= p/q \;>\; 1/2$ hányadosra elő tudunk állítani hasonlót: itt az ötlet, hogy bármilyen tört kijöhessen, ami több, mint 1/2, annyi, hogy az eredeti $C_1, \dots, C_k$ klózok mindegyikéből felveszünk x (pozitív egész) darabot, a p_i, $\neg p_i$ klózpárokból pedig $k \cdot y$ (y pozitív egész) darabot.

Ekkor lesz $kx + 2ky$ klózunk, melyből $kx + ky$ az, ami legfeljebb egyszerre kielégíthető; ha úgy állítjuk be x-et és y-t, hogy teljesüljön a

$$\frac{kx+ky-1}{kx+2ky} \;<\; p/q \;\leq\; \frac{kx+ky}{kx+2ky} = \frac{x+y}{x+2y} = 1 - \frac{y}{x+2y}$$

egenlőtlenség-sorozat, akkor kész is vagyunk. Ármost ha vesszük a $p = x + y$, $q = x + 2y$ egyenletrendszer megoldását, azaz $y = q - p$, $x = 2p - q$ jó lesz (mivel $1 \geq p/q > 1/2$, így $q \geq p$ és $2p > q$, tehát ezek pozitív egészek lesznek), ahogy történt a 2/3 és a 3/5-SAT esetében is.

5. feladat megoldása.

Itt ismét fontos, hogy az inputban nem szerepelhet üres klóz, hiszen ha szerepelhetne, akkor a

$$C_1 \wedge \ldots \wedge C_k \ \mapsto \ C_1 \wedge \ldots \wedge C_k \wedge \Box \wedge \ldots \wedge \Box$$

inputkonverzió, azzal, hogy k példányban vesszük fel az üres klózt, adna egy SAT≤1/2-SAT visszavezetést.

Viszont így, hogy az input CNF-ben nem szerepelhet üres klóz, így háromféle klóz lehet benne:

- melyekben van pozitív és negatív literál is: ezeket a konstans 0 és a konstans 1 értékadás is kielégíti;
- melyekben csak negatív literálok vannak (és legalább egy kell legyen belőlük): ezeket a konstans 0 értékadás kielégíti;
- melyekben csak pozitív literálok vannak (és legalább egy kell legyen belőlük): ezeket a konstans 1 értékadás kielégíti.

Ezért, ha a második két kategóriából a csak negatív literálokat tartalmazó klózokból van több a formulában, akkor a konstans 0 értékadás kielégíti a CNF klózainak felét; ha pedig a csak pozitívakból (vagy egyforma sok van belőlük, vegyes pedig nincs), akkor pedig a konstans 1 értékadás elégíti ki a klózok felét.

Tehát azt kaptuk, hogy ez a probléma **triviális**: minden (nemüres) CNF-re van olyan értékadás (pl. vagy a konstans 0, vagy a konstans 1), ami kielégíti a klózainak legalább a felét, meg se kell néznünk az inputot és visszaadhatunk egy `true` értéket.

6. feladat megoldása.

Ami itt eszünkbe juthat:

- vezessük vissza rá a 3SAT problémát
- úgy, hogy ha egy x változó 3-nál többször fordul elő, akkor helyette vezessünk be új, mondjuk x_1, x_2,..., x_n változókat, mindegyiket egyszer használjuk,
- és valahogy „kényszerítsük ki”, hogy ezek a változók ugyanazt az értéket vegyék fel.

Arra, hogy „x_1, x_2, ..., x_n értéke ugyanaz” persze jó lenne felírni azt a formulát pl, hogy

$$(x_1 \leftrightarrow x_2) \wedge (x_2 \leftrightarrow x_3) \wedge \ldots \wedge (x_{n-1} \leftrightarrow x_n),$$

de ennek a CNF-jében (majdnem) mindegyik változó már négyszer szerepel, kicsit ennél jobban kell csináljuk.

Ahogy biztos láttunk már matematikai bizonyításokat arra, hogy „i) ekvivalens ii) ekvivalens iii)”, azok sokszor úgy működnek, hogy „i)-ből következik ii), ii)-ből következik iii) és iii)-ból következik i)”, ez a módszer viszont már működik:

$$(x_1 \rightarrow x_2) \ \wedge \ (x_2 \rightarrow x_3) \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ (x_{n-1} \rightarrow x_n) \ \wedge \ (x_n \rightarrow x_1).$$

Ennek a CNF-jében:

$$(\neg x_1 \vee x_2) \ \wedge (\neg x_2 \vee x_3) \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ (\neg x_{n-1} \vee x_n) \ \wedge \ (\neg x_n \vee x_1)$$

már mindegyik x_i csak (pontosan) kétszer szerepel, így az eredeti formulában szereplő példányaikkal együtt már mindegyik csak pontosan háromszor fog.

Egy példa a visszavezetésre: ha az eredeti, 3SAT input formulánk

$$(x \vee y \vee z) \ \wedge \ (\neg x \vee y \vee \neg z) \ \wedge \ (x \vee \neg y \vee z) \ \wedge \ (\neg x \vee \neg y \vee \neg z),$$

akkor a generált 3x3SAT formulánk:

$$\begin{aligned}
&(x_1 \vee y_1 \vee z_1) \ \wedge \ (\neg x_2 \vee y_2 \vee \neg z_2) \ \wedge \ (x_3 \vee \neg y_3 \vee z_3) \ \wedge \ (\neg x_4 \vee \neg y_4 \vee \neg z_4) \ \wedge \\
&(\neg x_1 \vee x_2) \ \wedge \ (\neg x_2 \vee x_3) \ \wedge \ (\neg x_3 \vee x_4) \ \wedge \ (\neg x_4 \vee x_1) \ \wedge \\
&(\neg y_1 \vee y_2) \ \wedge \ (\neg y_2 \vee y_3) \ \wedge \ (\neg y_3 \vee y_4) \ \wedge \ (\neg y_4 \vee y_1) \ \wedge \\
&(\neg z_1 \vee z_2) \ \wedge \ (\neg z_2 \vee z_3) \ \wedge \ (\neg z_3 \vee z_4) \ \wedge \ (\neg z_4 \vee z_1)
\end{aligned}$$

Megjegyzés.

Gondolkodjunk el rajta, hogy mennyiben változik a feladat, ha minden generált klózban **pontosan** három literált követelnénk meg!