Logikai és funkcionális programozás matematikai alapjai vázlat

„logifun jegyzet”

Logikai programok szemantikája

Kezdjük egy kis gyorstalpaló emlékeztetővel a logikai programokról. Programklóznak nevezünk egy $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \rightarrow q$ alakú formulát, ahol $p_1, \ldots, p_n, q$ atomi formulák. Ítéletkalkulusban ez azt jelenti, hogy ítéletváltozók. A $p_1 \wedge \ldots \wedge p_n$ részt a klóz törzsének, a q-t pedig a klóz fejének nevezzük. A klóz feje sosem üres, a törzse lehet üres, ekkor csak $\rightarrow q$-t írunk. Vannak, akik ugyanezt a klózt $q \leftarrow p_1 \wedge \ldots \wedge p_n$-nek írják, vannak, akik $\wedge$ helyett vesszővel, `prolog`ban `q:-p1,...,pn` a szintaxis, ebben a jegyzetben $\wedge$ és $\rightarrow$ lesz a jelölés.

Egy példa logikai program:

$$\begin{aligned} &\rightarrow \mathsf{even}(0) \\ \mathsf{even}(x) &\rightarrow \mathsf{odd}(\mathsf{s}(x)) \\ \mathsf{odd}(x) &\rightarrow \mathsf{even}(\mathsf{s}(x)) \end{aligned}$$

A fenti példa ugyan elsőrendű logikát használ, de ez nem baj. Azt látjuk, hogy even és odd a két (egyváltozós) predikátumjelünk, a 0 az egy konstansjel, az s pedig egy (egyváltozós) függvényjel. Egy klózt úgy interpretálunk, mintha a benne szereplő elsőrendű változók (lö x) univerzális kvantorral lennének lekötve. Ha emlékszünk a Peano-aritmetikára, abban az s interpretációja a rákövetkezés függvény; ebben tehát a fenti klózok jelentése sorra „a 0 egy páros szám”, „ha x páros, akkor $x+1$ páratlan” és „ha x páratlan, akkor $x+1$ páros”, már ha az even predikátumjelet a „páros” predikátummal, az odd jelet pedig a „páratlan” predikátummal interpretáljuk.

Egy ilyen program Herbrand-kiterjesztését úgy kapjuk, hogy minden klózban a változókat az összes lehetséges módon alaptermmel helyettesítjük. Ahol is egy alapterm egy konstansokból és függvényjelekből (figyelve a változószámra) felépülő kifejezés.

A példában az alaptermek: 0, $\mathsf{s}(0)$, $\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))$, $\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ stb.

Ha ezeket az alaptermeket behelyettesítjük, egy (valószínűleg végtelen sok) klózból álló logikai programot kapunk, most épp ezt:

$$\begin{aligned} &\rightarrow \mathsf{even}(0) \\ \mathsf{even}(0) &\rightarrow \mathsf{odd}(\mathsf{s}(0)) \\ \mathsf{odd}(0) &\rightarrow \mathsf{even}(\mathsf{s}(0)) \\ \mathsf{even}(\mathsf{s}(0)) &\rightarrow \mathsf{odd}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \\ \mathsf{odd}(\mathsf{s}(0)) &\rightarrow \mathsf{even}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \\ \mathsf{even}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) &\rightarrow \mathsf{odd}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))) \\ &\ldots \end{aligned}$$

Tanultuk még BSc-n logikából, hogy az első alak modelljei és a második alak modelljei közt oda-vissza lehet transzformálni. Ez azért lesz (matematikailag) könnyebben kezelhető az előző formánál, mert ebben már tulajdonképpen csak ítéletváltozók vannak: az $\mathsf{even}(0)$ is, az $\mathsf{odd}(0)$ is, a $\mathsf{even}(\mathsf{s}(0))$ is, az $\mathsf{odd}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))))$ is, stb. mindegyikük egy logikai értéket kell felvegyen, egymástól függetlenül egy Herbrand-modellben.

A program egy modellje ezeknek az ítéletváltozóknak egy olyan értékadása, ami az összes klózt kielégíti.

A fenti példának pl. egy modellje az „intuitív" értékadás, amiben is $\mathsf{even}(0)$, $\mathsf{odd}(\mathsf{s}(0))$, $\mathsf{even}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$, $\mathsf{odd}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))))$, …igazak, $\mathsf{odd}(0)$, $\mathsf{even}(\mathsf{s}(0))$,…pedig hamisak. Tehát ha n páros, akkor $\mathsf{even}(\mathsf{s}^n(0))$ igaz és $\mathsf{odd}(\mathsf{s}^n(0))$ hamis, ha pedig n páratlan, akkor fordítva.

De a fenti példának van másik modellje is: amikor is minden változót igazra állítunk. (Ez az értékadás minden logikai programnak modellje, hiszen minden klóznak van egy feje).

A logikai programok szemantikája mint terület azt a kérdést feszegeti, hogy a program modelljei közül melyiket válasszuk? És hogyan számíthatjuk ki?

Tehát az alapfeladat:

Adott egy (ítéletkalkulus-beli, akár végtelen sok klózból álló) program.

Adjuk vissza egy „jó" modelljét.

Persze mint látni fogjuk, komplikáltabb esetekben (az általános logikai programoknál) nem mindig egyértelmű, mitől „jó" egy modell…

Horn-klózok halmazára mindenesetre még BSc-n tanultuk a Horn-algoritmust. Ezt az algoritmust (amit általában változók „jelölgetésével" tanítunk) a következőképp is definiálhatjuk: először is kiindulunk a konstans 0 értékadásból, ezek után iterálunk: egy iterációban kiértékeljük az összes törzset, és a következő iterációban a q változó értéke akkor lesz 1, ha van olyan klóz, melynek a törzse 1 értékű, a feje pedig q. Speciálisan az üres törzs értékét is 1-nek vettük.

Vissza az előző példánkra, az algoritmus az első klóz alapján (melynek törzse üres, tehát igaz) $\mathsf{even}(0)$-t 1-re állítja, a többi változó értéke marad 0. A következő iterációban így az első két klóz törzse lesz 1, tehát most már $\mathsf{even}(0)$ és $\mathsf{odd}(\mathsf{s}(0))$ lesz 1. A következő iterációban az első, a második és az ötödik klóz törzse 1, tehát $\mathsf{even}(0)$, $\mathsf{odd}(\mathsf{s}(0))$ és $\mathsf{even}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$ lesz 1, stb. Végül („végtelen sok" iteráció után[1]) megkapjuk az első modellt, ami a páros-páratlan intuitív jelentésének felel meg.

A Horn-algoritmus egy tulajdonsága, hogy csak azt állítja 1-re, amit muszáj.

Ezt a tulajdonságot el is várjuk egy „jó" szemantikától később is (a tapasztalat ezt mutatja):

Egy „jó" szemantika minimalizálja az igazságértéket.

Itt most egy kicsit álljunk meg, és ragadjuk meg matematikailag, hogy ez mit jelent. Ha minimalizálásról van szó, akkor kell hozzá egy halmaz és azon egy részbenrendezés.

Definíció

Egy P alaphalmazon a $\leq$ reláció részbenrendezés (partial order), ha reflexív: $x \leq x$, tranzitív: $x \leq y,\ y \leq z \ \Rightarrow\ x \leq z$ (ha egy reláció ezzel a két tulajdonsággal rendelkezik, akkor előrendezés, preorder) és antiszimmetrikus: $x \leq y,\ y \leq x \ \Rightarrow\ x = y$.

[1] ezt majd pontosítani fogjuk kicsit

Ekkor $(P, \leq)$ egy részbenrendezett halmaz, magyarul poset (partially ordered set).

Ha még a részbenrendezés dichotóm is, azaz minden x, y-ra $x \leq y$ vagy $y \leq x$ teljesül, akkor ez egy lineáris rendezés.

Ha a rendezés egyértelmű a kontextusból, akkor csak az alaphalmazt írjuk le.

Nézzünk pár példát:

Az $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$ és $(\mathbb{R}, \leq)$ számhalmazok a szokásos rendezésükkel lineárisan rendezettek.

Ha X egy halmaz, akkor $X_\perp$ az $(X \uplus \{\perp\}, \perp \leq x)$ poset (azaz az új $\perp$ elem mindenki másnál kisebb, a többiek közt nincs reláció). Ez nem lineárisan rendezett (hacsaknem $|X| \leq 1$).

Ha X egy halmaz, akkor $(P(X), \subseteq)$ az X hatványhalmaza, a ,,részhalmaz" relációval. Ez sem lineárisan rendezett (kivéve, amikor $|X| \leq 1$).

Két posetet gyakran fogunk használni: $\mathbf{2}$ jelöli a $(\{0, 1\}, 0 \leq 1)$ posetet; ez egy lineárisan rendezett poset. (0 lesz a hamis, 1 az igaz igazságérték, a hamis a kisebb)

A másik poset az értékadások posetje lesz. Legyen Z az ítéletváltozók (esetleg végtelen) halmaza (nincs rendezés!). Egy értékadás egy $Z \to \mathbf{2}$ függvény. Ezeknek a halmazát $\mathbf{2}^Z$ jelöli. Általában is, ha X és Y halmazok, akkor X^Y az $Y \to X$ függvények halmaza.

Ha P egy poset és X egy halmaz, akkor P^X is poset lesz a pontonkénti rendezéssel: $u \leq v \Leftrightarrow \forall x \in X\ u(x) \leq v(x)$. Azaz egy függvény akkor kisebb-egyenlő egy másiknál, ha minden koordinátán kisebb-egyenlő nála.

Például ha $Z = \{p, q, r\}$, akkor $\mathbf{2}^Z$ elemei a $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $\ldots$,$(1, 1, 1)$ (az első koordinátán p, a másodikon q, a harmadikon r értéke szerepel), és pl. $(0, 0, 1) \leq (1, 0, 1)$, de mondjuk $(0, 1, 0)$ és $(1, 0, 0)$ nem összehasonlíthatóak.

Ez azt is mutatja, hogy még ha P lineárisan rendezett is, P^X általában nem lesz az.

Na tehát az értékadások halmaza, $\mathbf{2}^Z$, egy poset a pontonkénti rendezéssel.

Ennél általánosabban: ha X egy halmaz és minden $x \in X$-re P_x egy poset, akkor direkt szorzatuk, $\prod_{x \in X} P_x$ szintén egy poset a pontonkénti rendezéssel: $u \leq v \Leftrightarrow \forall x \in X : u(x) \leq v(x)$. (Ennek P^X az a speciális esete, mikor $P_x = P$ minden $x \in X$-re.)

Definíció

Ha P poset és $X \subseteq P$, akkor $x \in X$

- az X-nek a legkisebb eleme, ha $\forall y \in X : x \leq y$.
- az X-nek egy minimális eleme, ha $\forall y \in X : y \leq x \Rightarrow y = x$.
- az X-nek a legnagyobb eleme, ha $\forall y \in X : y \leq x$.
- az X-nek egy maximális eleme, ha $\forall y \in x : x \leq y \Rightarrow y = x$.

Tehát a legkisebb elem mindenki másnál kisebb, a minimális elemnél pedig nincs kisebb. Névelőkre odafigyelni: az ,,a" határozott névelő arra utal, hogy ha van legkisebb elem, abból csak egy lehet. És tényleg: ha x és y az X legkisebb elemei, akkor $x \leq y$ (mert x legkisebb elem) és $y \leq x$ (mert y is legkisebb elem), így a $\leq$ antiszimmetriája miatt $x = y$.

Minimális elemből lehet több is, de persze a minimális elemek mindig összehasonlíthatatlanok. (Hiszen ha $x \leq y$ és y minimális, akkor $x = y$.)

Például a $p \vee q \vee r$ formula modelljei közül minimális: $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ és $(0,0,1)$. Nincs legkisebb modellje.

Ha van legkisebb elem, akkor az az egyetlen minimális elem is.

Visszatérve a logikai programok szemantikájához, az Első Szabályunk azt mondja, hogy

Egy ,,jó" szemantika a program modelljei közül egy minimálist ad vissza.

Ezt fogjuk úgy is mondani, hogy ,,minimalizálja az igazságértéket".

A $\mathcal{P}$ logikai programon végrehajtott Horn-algoritmust felfoghatjuk úgy, mintha a következő $T_{\mathcal{P}} : \mathbf{2}^Z \to \mathbf{2}^Z$ függvényt (azaz értékadásból értékadást készítő függvényt) iterálnánk:

Definíció

$$T_{\mathcal{P}}(u)(q) \ := \bigvee_{p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \to q \in \mathcal{P}} u(p_1) \wedge u(p_2) \wedge \ldots \wedge u(p_n).$$

Intuitíve tehát ha u az értékadás, akkor $T_{\mathcal{P}}(u)$-ban (ami szintén egy értékadás) a q változó értékét úgy kapjuk, hogy ,,vagyoljuk" az összes q fejű $\mathcal{P}$-beli klóz törzsének u szerinti értékét. De itt használtuk a $\bigvee$ és $\bigwedge$ jeleket, amik:

Definíció

Ha P poset, $X \subseteq P$, akkor az $y \in P$ elem...

- az X-nek egy alsó korlátja, ha $\forall x \in X: \ y \leq x$ (ezt $y \leq X$-nek is írjuk);
- az X-nek az infimuma, ha az alsó korlátok halmazának ő a legnagyobb eleme, ennek jele $y = \bigwedge X$;
- az X-nek egy felső korlátja, ha $\forall x \in X: \ x \leq y$ (amit pedig $X \leq y$-nak is írunk);
- az X-nek a szuprémuma, ha a felső korlátok halmazának ő a legkisebb eleme, ennek jele $y = \bigvee X$.

Ha az $X, Y \subseteq P$ halmazokra $\forall x \in X \forall y \in Y \ x \leq y$ teljesül, azt pedig $X \leq Y$-nal is írjuk. Ekkor ha $\bigvee X$ létezik, akkor $X \leq \bigvee X \leq Y$ (hiszen Y-ban X-nek felső korlátai szerepelnek, $\bigvee X$ pedig a felső korlátok közül a legkisebb), ha $\bigwedge Y$ létezik, akkor $X \leq \bigwedge Y \leq Y$ (hasonló okokból), ha pedig mindkettő létezik, akkor $X \leq \bigvee X \leq \bigwedge Y \leq Y$ (mert pl. $\bigvee X \leq Y$-t már láttuk, tehát $\bigvee X$ az Y-nak egy alsó korlátja, $\bigwedge Y$ pedig a legnagyobb alsó korlátja).

Például $\mathbf{2}$-n a $\bigvee$ a ,,vagyolás", $\bigwedge$ pedig az ,,éselés".

Az $X = \emptyset$ esetet érdemes megnézni külön: egyrészt, az üres halmaznak minden $x \in P$ elem felső korlátja (mindenkire igaz, hogy az üres halmaz összes eleménél nagyobb-egyenlő), tehát

$\bigvee\emptyset$ ezek közül a legkisebb kell legyen, tehát P legkisebb eleme. Vagyis $\bigvee\emptyset$ pontosan akkor létezik, ha P-nek van legkisebb eleme. Hasonlóképp $\bigwedge\emptyset$ a P legnagyobb eleme kell legyen.

Nem mindig léteznek a szuprémumok/infimumok, pl. az $\mathbb{N}_\perp$ posetben az $\{1,2\}$ halmaznak nincs felső korlátja, így szuprémuma sem (infimumuk pedig $\perp$).

Attól függően, hogy milyen részhalmazoknak van P-ben szuprémuma, osztályozzuk P-t:

Definíció

A P poset...

- teljes háló, ha minden $X \subseteq P$-re létezik $\bigvee X$;
- teljes poset vagy CPO (complete partial order), ha minden lineárisan rendezett $X \subseteq P$-re létezik $\bigvee X$;
- ω-teljes poset vagy ω-CPO, ha minden $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots$ sorozatra létezik $\bigvee_i x_i$ és P-nek van legkisebb eleme.

Mivel a $\emptyset$ is egy lineárisan rendezett részhalmaz, ezért teljes posetnek (és így teljes hálónak is) mindig van legkisebb eleme. A legkisebb elem jele általában $\perp$ lesz. (Ahogy $\mathbb{N}_\perp$ esetében is.)

Például $\mathbf{2}$ egy teljes háló, $\mathbb{N}_\perp$ nem teljes háló, viszont teljes poset (az üres halmaznak $\perp$ a szuprémuma, egy $\{x\}$ egyelemű halmaznak az x, egy $\{\perp, n\}$ kételemű halmaznak n, más lineárisan rendezett részhalmaza pedig nincs, tehát mindnek van szuprémuma). A természetes számok $\mathbb{N}$ halmaza a szokásos rendezéssel nem teljes poset (és még csak nem is ω-teljes poset), pl. $\bigvee\mathbb{N}$ nem létezik. Egy „végtelen” legnagyobb elemet hozzávéve teljes poset lesz.

Hogy miért csak szuprémumról beszélünk? Mert

Állítás

Teljes hálóban minden részhalmaznak van infimuma is.

Bizonyítás

Legyen P teljes háló és $X \subseteq P$. Jelölje Y az X összes alsó korlátjának halmazát, tehát $Y = \{y \in P : y \leq X\}$. Legyen $y := \bigvee Y$. (Létezik, mert P teljes háló.) Azt állítjuk, hogy $y = \bigwedge X$.

Először is $y \leq X$, hiszen $Y \leq X$ (mert Y az X-nek alsó korlátjaiból áll) és azt már láttuk, hogy ha $\bigvee Y$ létezik, akkor $Y \leq \bigvee Y \leq X$. Tehát $y = \bigvee Y$ is alsó korlátja X-nek. Így eleme is Y-nak. Ha pedig egy halmaznak eleme a szuprémuma, akkor az egyben a legnagyobb eleme is (hiszen minden eleménél nagyobb-egyenlő, mert felső korlát). Tehát y tényleg az X legnagyobb alsó korlátja.

Továbbá egy P teljes hálóban $\bigvee P$ is létezik, ez pedig a legnagyobb elem kell legyen. Tehát teljes hálóban mindig van legnagyobb elem, ennek jele pedig általában $\top$ lesz.

Mivel $\mathbf{2}$ teljes háló, így a $\mathcal{P}$ logikai programhoz rendelt $T_\mathcal{P}$ függvény (amiben infimumok és szuprémumok vannak) tényleg mindenhol értelmezett (így pl. nem baj az se, ha a jobb oldalon szereplő $\bigvee$-ban végtelen sok elem áll, és az sem, ha üres. Ha üres, akkor a „vagyolás” eredménye 0 lesz, a háló legkisebb eleme[2].)

Állítás

Ha minden $x \in X$-re P_x teljes háló / teljes poset / ω-teljes poset, akkor $P = \prod_{x \in X} P_x$ is az, a szuprémumot pedig pontonként vehetjük (azaz $\left(\bigvee U\right)(x) = \bigvee_{u \in U}(u(x))$).

Bizonyítás

Legyen $U \subseteq P$. Először is vegyük észre, hogy ha $u \leq v$, akkor minden $x \in X$-re $u(x) \leq v(x)$ (a P-beli pontonkénti rendezés def. szerint). Emiatt ha U lineárisan rendezett, akkor minden $x \in X$-re az $U(x) := \{u(x) : u \in U\}$ halmaz is az P_x-ben, és ha U egy ω-lánc (azaz egy $u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq \ldots$ sorozat), akkor $U(x)$ is az.

Így ha minden P_x teljes háló, akkor a jobb oldali $\bigvee U(x)$ szuprémum létezik (teljes hálóban minden szuprémum létezik); ha minden P_x teljes poset, és U lineárisan rendezett, akkor minden $U(x)$ is lineárisan rendezett és így $\bigvee U(x)$ megint csak létezik; végül, ha minden P_x ω-teljes poset, és U ω-lánc, akkor minden $U(x)$ is ω-lánc, és így $\bigvee U(x)$ ilyenkor is létezik. Tehát mindhárom esetben az $u := \bigvee(U(x))$ képlet jobb oldala létezik.

Továbbá, u felső korlát is: ehhez azt kell látnunk, hogy minden $u' \in U$-ra $u' \leq u$, ami azzal ekvivalens, hogy minden $x \in X$-re $u'(x) \leq u(x)$, ami teljesül, hiszen $u(x) = \bigvee_{v \in U} v(x)$ és $u' \in U$.

Végül, u a legkisebb felső korlát: ehhez pedig legyen v is felső korlát, $U \leq v$. Azt kell lássuk, hogy ekkor $u \leq v$, azaz minden $x \in X$-re $u(x) \leq v(x)$. Ez azért teljesül, mert ha $U \leq v$, akkor $U(x) \leq v(x)$, tehát $v(x)$ egy felső korlátja $U(x)$-nek, míg $u(x)$ a legkisebb felső korlát.

Ezért például miven $\mathbf{2}$ egy teljes háló, így az értékadások $\mathbf{2}^Z$ posetje is teljes háló.

Nézzük most a $\mathcal{P}$ logikai programhoz rendelt $T_{\mathcal{P}} : \mathbf{2}^Z \to \mathbf{2}^Z$ függvényt, és próbáljunk összefüggést keresni $\mathcal{P}$ modelljei és $T_{\mathcal{P}}$ közt! Íme:

Állítás

Az $u \in \mathbf{2}^Z$ értékadás pontosan akkor modellje $\mathcal{P}$-nek, ha $T_{\mathcal{P}}(u) \leq u$.

Bizonyítás

[2] hát ezért volt anno az üres klóz hamis, a 0-klózú CNF meg igaz.

$$\begin{aligned}
u \text{ modellje } \mathcal{P}\text{-nek} \quad &\Leftrightarrow \quad u \text{ minden } \mathcal{P}\text{-beli klózt kielégít} \\
&\Leftrightarrow \quad \text{minden } u \text{ szerint 1 értékű törzsű klóz feje is 1 értékű } u \text{ szerint} \\
&\Leftrightarrow \quad \text{amelyik } q\text{-ra van } p_1 \wedge \ldots \wedge p_n \to q \in \mathcal{P}\text{, melyre} \\
&\qquad\ \ u(p_1) = \ldots = u(p_n) = 1, \text{ arra } u(q) = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \text{amelyik } q\text{-ra } T_{\mathcal{P}}(u)(q) = 1, \text{ arra } u(q) = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad T_{\mathcal{P}}(u) \leq u.
\end{aligned}$$

Az $f(x) \leq x$ (és hasonló) tulajdonságú elemeket el is nevezzük most:

Definíció

Ha P poset és $f : P \to P$ függvény, akkor $x \in P \ldots$

- az f prefixpontja, ha $f(x) \leq x$;
- az f posztfixpontja, ha $x \leq f(x)$;
- az f fixpontja, ha $x = f(x)$.

Tehát az előző állításból és az Első Szabályból:

Ha $\mathcal{P}$ logikai program, akkor szemantikája a $T_{\mathcal{P}}$ függvénynek egy minimális prefixpontja.

Ez a $T_{\mathcal{P}}$ függvény azért ad nekünk egy jó szemantikát, mert ez egy úgynevezett monoton függvény, $\mathbf{2}^Z$ pedig egy teljes poset, és teljes posetben monoton függvénynek mindig van legkisebb fixpontja. Ami az egyetlen minimális prefixpontja lesz, így ha ,,jó" szemantikát akarunk, akkor azt kell válasszuk.

Lássuk ezeket a fogalmakat:

Definíció

Ha P, Q posetek és az $f : P \to Q$ függvényre teljesül, hogy $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$, akkor azt mondjuk, hogy f monoton.

Ha esetleg a P posetnek csak az alaphalmazáról beszélünk és többféle rendezés is szóba kerülhet, akkor a ,,monoton" szó elé magát a rendezést is beszúrjuk, amelyikre nézve monoton. Tehát ha pl. $(P, \leq_t)$ is poset és $(P, \leq_p)$ is poset, akkor a $x \leq_p y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ összefüggést úgy fogjuk hívni, hogy f ,,$\leq_p$-monoton".

Tehát, most azt szeretnénk belátni, hogy $T_{\mathcal{P}}$ monoton. Ennél többet fogunk belátni: azt, hogy $T_{\mathcal{P}}$ folytonos.

Definíció

Legyenek P, Q posetek és $f : P \to Q$ függvény. Ha tetszőleges nemüres $X \subseteq P$ lineárisan rendezett részhalmazra, melyre $\bigvee X$ létezik, igaz, hogy $f(\bigvee X) = \bigvee_{x \in X} f(x)$ (tehát pl ez a jobb oldali szuprémum létezik is), akkor azt mondjuk, hogy f folytonos.

Amiért azt mondjuk, hogy többet, az azért van, mert

Állítás

Minden folytonos függvény monoton.

Bizonyítás

Legyen $f : P \to Q$ folytonos függvény és $x \leq y$. Érdemes észrevenni, hogy $x \leq y$ pontosan azt jelenti, hogy $\vee\{x, y\} = y$, hiszen a jobb oldalból következik, hogy y felső korlátja x-nek, azaz $x \leq y$; a bal oldalból pedig következik, hogy y felső korlátja az $\{x, y\}$ halmaznak, és mivel ha $\{x, y\} \leq z$, akkor $y \leq z$, így legkisebb felső korlát.

Tehát ha $x \leq y$, akkor $\{x, y\}$ egy nemüres lineárisan rendezett halmaz, melynek szuprémuma létezik, így a folytosság definíciója szerint $f(y) = f(\vee\{x, y\}) = \vee\{f(x), f(y)\}$, tehát $f(y)$ (a legkisebb) felső korlátja $f(x)$-nek és $f(y)$-nak, így például $f(x) \leq f(y)$, tehát f tényleg monoton.

Folytonos függvény minimális prefixpontjait keresni ,,könnyű”, mert:

Állítás

Ha P egy ω-CPO és $f : P \to P$ folytonos, akkor f-nek van legkisebb prefixpontja, mégpedig $\bigvee\limits_{n \in \mathbb{N}} f^n(\perp)$.

(Ez a Tarski-féle fixponttétel.)

Bizonyítás

Először teljes indukcióval belátjuk, hogy minden n-re $f^n(\perp) \leq f^{n+1}(\perp)$. Az $n = 0$ esetben ez világos: $f^0(\perp) = \perp$ és $\perp \leq f(\perp)$, hiszen $\perp$ a P legkisebb eleme.

Ha pedig igaz n-re, akkor igaz $n + 1$-re is: ha $f^n(\perp) \leq f^{n+1}(\perp)$, akkor alkalmazzuk f-et mindkét oldalon, és hogy f monoton, kapjuk, hogy $f^{n+1}(\perp) \leq f^{n+2}(\perp)$.

Tehát $\perp \leq f(\perp) \leq f^2(\perp) \leq f^3(\perp) \leq \ldots$ egy ω-lánc, P pedig ω-CPO, így létezik az $x = \bigvee\limits_{n \in \mathbb{N}} f^n(\perp)$ szuprémuma.

Ez az x prefixpont is: $f(x) = f(\vee_n f^n(\perp)) = \vee_n f(f^n(\perp))$ (a folytonosság miatt) $= \vee_n f^{n+1}(\perp)$. Ha megnézzük ezt a halmazt, ez az $\{f(\perp), f^2(\perp), \ldots\}$ halmaz; tetszőleges X-re $\vee X = \vee(X \cup \{\perp\})$ (hiszen ha a felső korlátja X-nek, akkor mivel $\perp \leq a$ garantáltan teljesül, ekkor a felső korlátja $X \cup \{\perp\}$-nak is, ha pedig a felső korlátja $X \cup \{\perp\}$-nak, akkor X-nek is, mert $X \subseteq X \cup \{\perp\}$), ezért ez tovább egyenlő $\bigvee\{\perp, f(\perp), f^2(\perp), \ldots\}$-al, ami épp x.

Tehát ez a bizonyos x nem csak hogy prefixpont, de fixpont is.

Be kell lássuk még azt, hogy a legkisebb prefixpont. Ehhez legyen y egy prefixpont. Elég azt megmutassuk, hogy minden n-re $f^n(\perp) \leq y$, hiszen akkor azt kapjuk, hogy y ezen elemeknek egy felső korlátja, x pedig a legkisebb felső korlátja és ebből $x \leq y$.

Ezt megint teljes indukcióval tesszük: $n = 0$-ra igaz, hiszen $f^0(\perp) = \perp \leq y$ minden y-ra. Ha pedig igaz n-re, hogy $f^n(\perp) \leq y$, akkor mindkét oldalon alkalmazva f-et és a monotonitást kapjuk, hogy $f^{n+1}(\perp) \leq f(y) \leq y$, ahol az $f(y) \leq y$ onnan jött, hogy y prefixpont. Tehát tényleg, $f^{n+1}(\perp) \leq y$ és az állítást bebizonyítottuk.

Tehát ha belátjuk, hogy $T_{\mathcal{P}}$ folytonos, akkor (mivel $\mathbf{2}^Z$ teljes háló, ezért ω-CPO is) a $T_{\mathcal{P}}$ függénynek lesz egy legkisebb prefixpontja, ha legkisebb, akkor ő lesz az egyetlen minimális prefixpontja, ami pedig azt jelenti, hogy a $\mathcal{P}$ szemantikája konkrétan ez a legkisebb (pre)fixpont kell legyen, nincs más lehetőség, ha be akarjuk tartani az Első Szabályt az igazságérték minimalizálásáról.

Egyébként az előbb láttuk, hogy ez a prefixpont egyben fixpont is lesz (és akkor nyilván a legkisebb fixpont is, hiszen ha legkisebb prefixpont, akkor minden prefixpontnak alsó korlátja, a fixpontok pedig prefixpontok is). Ez nem véletlen:

Állítás

Ha $f : P \to P$ monoton függvény, és x egy prefixpontja, akkor $f(x)$ is prefixpontja.

Bizonyítás

Ha $f(x) \leq x$, akkor f monotonitását alkalmazva $f(f(x)) \leq f(x)$, azaz $f(x)$ is egy prefixpont.

Állítás

Ha $f : P \to P$ monoton függvény, akkor f minden minimális prefixpontja minimális fixpont is.

Bizonyítás

Legyen $x \in P$ minimális prefixpont. Akkor $f(x) \leq x$ is prefixpont, ami nála kisebb vagy egyenlő; ha x minimális, akkor kisebb nem lehet, tehát $f(x) = x$, fixpont. Továbbá ha $y \leq x$ is fixpont, akkor y prefixpont is, és ekkor a minimalitás miatt megint csak $x = y$.

Ezért

Állítás

Ha $f : P \to P$ monoton függvény és van legkisebb prefixpontja, akkor ez egyben a legkisebb fixpontja is.

Bizonyítás

A legkisebb prefixpont minimális prefixpont is, így az előző szerint fixpont; mivel minden fixpont prefixpont is, a legkisebb prefixpont minden fixpontnak is alsó korlátja, tehát ő a legkisebb fixpont is.

Visszatérve a logikai programokra, azt láttuk, hogy $T_\mathcal{P}$ prefixpontjai a $\mathcal{P}$ modelljei. Közülük a fixpontok milyen modellek? Olyanok, melyekben „minden változó okkal lesz igaz": csak akkor lesz igaz egy q változó, ha van is olyan q fejű klóz, akinek igaz a törzse is (különben $T_\mathcal{P}(u)(q)$ hamis lenne, hiszen nincs igaz törzse, és akkor $u \neq T_\mathcal{P}(u)$, mert q-n eltérés van). Ezt el is nevezzük

Definíció

A $\mathcal{P}$ program alátámasztott modelljei (supported model) a $T_\mathcal{P}$ függvény fixpontjai.

Na tehát ha végre megmutatjuk, hogy $T_\mathcal{P}$ folytonos, akkor a logikai programok szemantikájával készen is vagyunk, mert más nem lehet, csak a $T_\mathcal{P}$ legkisebb fixpontja.

Ehhez bevezetünk pár műveletet függvényeken, melyekből előáll $T_\mathcal{P}$ és megmutatjuk, hogy megőrzik a folytonosságot. Az első a target tupling, ami lényegében arról szól, hogy sok függvény eredményét egyetlen „vektorba" rendezzük.

Definíció

Ha $f_i : P \to Q_i$, $i \in I$ függvények, akkor target tuplingjuk az az $f = \langle f_i \rangle_{i\in I} : P \to \prod\limits_{i\in I} Q_i$ függvény, melyre $f(x)(i) = f_i(x)$ minden $i \in I$, $x \in P$-re.

Ha csak két függvény van, $f : P \to Q$ és $g : P \to R$, akkor egyszerűen $\langle f, g\rangle$-vel jelöljük a fenti $P \to Q \times R$ függvényt.

Például $T_\mathcal{P}$ a következő $T_{\mathcal{P},q} : \mathbf{2}^Z \to \mathbf{2}$, $q \in Z$ függvények target tuplingja:

$$T_{\mathcal{P},q}(u) = \bigvee_{p_1\wedge\ldots\wedge p_n\to q\in\mathcal{P}} u(p_1) \wedge \ldots \wedge u(p_n),$$

hiszen épp azt csináljuk, hogy minden q-ra kiszámoljuk az új értéket (a q fejű törzsek értékeinek szuprémumaként), majd ezeket egy „Z-vel indexelt" vektorba rendezzük.

Állítás

Ha $f_i : P \to Q_i$, $i \in I$ folytonos függvények, akkor target tuplingjuk is folytonos.

Bizonyítás

Legyen $X \subseteq P$ a P-nek egy nemüres, lineárisan rendezett részhalmaza, melyre $x^* = \bigvee X$ létezik. Ekkor minden $i \in I$-re $f_i(x^*) = \bigvee\limits_{x\in X} f_i(x)$, mert f_i folytonos. Tehát a szuprémum képe az $i \in I$ koordinátán $f(x^*)(i) = \bigvee\limits_{x\in X} f_i(x)$. Ez pedig ugyanaz, mint a képek szuprémuma, hiszen $\prod\limits_{i\in I} Q_i$-ben a szuprémumot pontonként vesszük.

Később használni fogjuk azt is, hogy monoton függvények target tuplingja is monoton: ha minden $f_i : P \to Q_i$ monoton, és $x \leq y$, akkor minden $i \in I$ koordinátára $f(x)(i) = f_i(x) \leq f_i(y) = f(y)(i)$, ahol $f = \langle f_i \rangle_{i\in I}$, ami épp $f(x) \leq f(y)$-t jelenti a pontonkénti rendezésben.

Emiatt már ha megmutatjuk, hogy mindegyik $T_{\mathcal{P},q}$ folytonos, kapjuk, hogy $T_\mathcal{P}$ is az. A $T_{\mathcal{P},q}$ függvény egy szuprémumképzés, erről is hasonlókat tudunk mondani:

Ha $f_i : P \to Q$, $i \in I$ függvények és Q teljes háló, akkor az f_i-k szuprémuma is létezik (a függvények szokásos, pontonkénti rendezésében), $f = \bigvee_{i\in I} f_i : P \to Q$ az a függvény, melyre $f(x) = \bigvee_{i\in I} f_i(x)$.

Hasonló módon ha Q teljes poset és az $\{f_i : i \in I\}$ halmaz a függvényeknek egy lineárisan rendezett halmaza, akkor – mivel ebben az esetben minden x-re az $\{f_i(x) : i \in I\}$ halmaz a Q-nak egy lineárisan rendezett halmaza lesz – a szuprémum megint csak létezik.

Állítás

Ha $f_i : P \to Q$, $i \in I$ folytonos függvények és szuprémumuk létezik, akkor az is folytonos.

Bizonyítás

Legyen $f = \bigvee_{i\in I} f_i$ a függvények szuprémuma és $X \subseteq P$ a P-nek egy nemüres, lineárisan rendezett részhalmaza, melyre $x^* = \bigvee X$ létezik. Meg kell mutassuk, hogy $f(x^*) = \bigvee_{x\in X} f(x)$. A bal oldalt kifejtve: $f(x^*) = \bigvee_{i\in I} f_i(x^*) = \bigvee_{i\in I}\bigvee_{x\in X} f_i(x)$. A jobb oldalt kifejtve: $\bigvee_{x\in X} f(x) = \bigvee_{x\in X}\bigvee_{i\in I} f_i(x)$.

Ez a két érték megegyezik, egybeesik $\bigvee_{x\in X, i\in I} f_i(x)$-szel. Hogy ezt belássuk, legyen $y = \bigvee_{i\in I}\bigvee_{x\in X} f_i(x)$. Akkor $\bigvee_{x\in X} f_i(x) \leq y$ minden $i \in I$-re, aminek következménye, hogy $f_i(x) \leq y$ minden $i \in I$-re és $x \in X$-re, tehát y felső korlátja az $\{f_i(x) : i \in I, x \in X\}$ halmaznak. Most megmutatjuk, hogy a legkisebb felső korlátja: legyen z is egy felső korlátja ennek a halmaznak. Akkor z felső korlátja minden rögzített $i \in I$-re a $\{f_i(x) : x \in X\}$ halmaznak is (mert ez részhalmaza az előzőnek). Tehát minden $i \in I$-re $\bigvee_{x\in X} f_i(x) \leq z$. Így szuprémumuk, ami épp y, is alsó korlátja z-nek, tehát $y \leq z$. Annak igazolását, hogy $\bigvee_{x\in X}\bigvee_{i\in I} f_i(x)$ is egybeesik $\bigvee_{x\in X, i\in I} f_i(x)$-szel, X és I szerepének felcserélésével kapjuk.

Így tehát most már csak annyit kell belátnunk, hogy az $u \mapsto u(p_1) \wedge u(p_2) \wedge \ldots u(p_n)$ alakú függvények folytonosak (mert a $T_{\mathcal{P},q}$ függvények ilyenek szuprémumaként állnak elő).

Itt most fontos, hogy ez egy véges konjunkció, nem pedig egy esetleg végtelen infimumképzés, az nem folytonos.

Az ilyen alakú függvények úgy állnak elő, hogy vesszük először az $u \mapsto (u(p_1), u(p_2), \ldots, u(p_n))$, $\mathbf{2}^Z \to \mathbf{2}^n$ függvényt, majd ennek az eredményre alkalmazzuk az $\wedge_n : \mathbf{2}^n \to \mathbf{2}$ n-tényezős konjunkciót. Ezekről ha megmutatjuk, hogy folytonosak, és még hogy két folytonos függvény kompozíciója is folytonos, akkor készen vagyunk.

Definíció

Ha $f : P \to Q$ és $g : Q \to R$ függvények, akkor kompozíciójuk, $g \circ f : P \to R$ az $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ függvény.

Állítás

Folytonos függvények kompozíciója is folytonos.

Bizonyítás

Legyen $f : P \to Q$ folytonos, $g : Q \to R$ folytonos és $X \subseteq P$ egy nemüres, lineárisan rendezett részhalmaza P-nek, melyre $x^* = \bigvee X$ létezik. Meg kell mutassuk, hogy $(g \circ f)(x^*) = \bigvee\limits_{x \in X} (g \circ f)(x)$.

Mivel f folytonos, így monoton is, tehát az $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ részhalmaza R-nek is egy nemüres lineárisan rendezett halmaz. Az f folytonossága miatt $f(x^*) = \bigvee f(X)$. Mivel eszerint $f(X)$ is nemüres lineárisan rendezett halmaz, létező szuprémummal, így g folytonossága miatt $g(f(x^*)) = g(\bigvee f(X)) = \bigvee_{x \in X} g(f(x))$.

Később még használni fogjuk azt is, hogy monoton függvények kompozíciója is monoton: hiszen ha $f : P \to Q$ és $g : Q \to R$ monotonok és $x \leq y$ P-ben, akkor f monotonitása miatt $f(x) \leq f(y)$, így g monotonitása miatt $g(f(x)) \leq g(f(y))$.

Állítás

Tetszőleges véges $n \geq 0$-ra az $\wedge_n : \mathbf{2}^n \to \mathbf{2}$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$ függvény folytonos.

Bizonyítás

Legyen $U \subseteq \mathbf{2}^n$ egy nemüres, lineárisan rendezett részhalmaza $\mathbf{2}^n$-nek, melyre $u^* = \bigvee U$ létezik. Mivel $\mathbf{2}^n$ véges, így U is véges, egy véges lineárisan rendezett részhalmaz pedig felírható $U = \{u_1, \ldots, u_k\}$, $u_1 \leq u_2 \leq \ldots \leq u_k$ alakban. Ekkor $\bigvee U = u_k$.

Két eset lehetséges: ha $u_k = (1, 1, \ldots, 1)$, akkor $\wedge_n(u_k) = 1$, és ekkor persze $\bigvee\limits_{u \in U} \wedge_n(u) = 1$, hiszen $u_k \in U$ és 1 a $\mathbf{2}$ legnagyobb eleme.

Ha pedig u_k tartalmaz nullát, mondjuk $u_k(i) = 0$, akkor mivel minden j-re $u_j \leq u_k$, így minden j-re $u_j(i) = 0$. Ekkor $\wedge_n(u_k) = 0$, és mivel minden egyes u_j-re $\wedge_n(u_j)$ szintén 0 ($u_j(i) = 0$ miatt), így szuprémumuk is 0.

Tehát mindkét esetben megegyezik a képek szuprémuma a szuprémum képével.

Már csak az $u \mapsto (u(p_1), \ldots u(p_n))$ alakú függvényekről kell megmutassuk, hogy még az is folytonos, és már be is láttuk, hogy $T_{\mathcal{P}}$ is egy folytonos függvény. Az ilyen alakú függvények pedig az $u \mapsto u(p_i)$ alakú függvények target tuplingjai, amiről már láttuk, hogy megőrzi a folytonosságot. Tehát már csak az $u \mapsto u(p)$ alakú függvények folytonosságát kell igazoljuk.

Definíció

Ha P_i, $i \in I$ posetek és $j \in I$, akkor a j. projekció a $\pi_j : \prod\limits_{i \in I} P_i \to P_j$, $\pi_j(u) = u(j)$ függvény.

Állítás

A projekciók folytonosak.

Bizonyítás

Legyenek P_i, $i \in I$ posetek és $j \in I$. Legyen továbbá U a $P = \prod_{i\in I} P_i$ posetnek egy nemüres, lineárisan rendezett részhalmaza, melyre $\bigvee U$ létezik. Ekkor az $U(j) = \{u(j) : u \in U\})$ halmaz is lineárisan rendezett (P_j-ben), és tudjuk, hogy a direkt szorzatban a szuprémumot pontonként vesszük, azaz $\pi_j(\bigvee U) = (\bigvee U)(j) = \bigvee(U(j)) = \bigvee_{u\in U} \pi_j(u)$.

Ezzel beláttuk, hogy $T_{\mathcal{P}}$ folytonos, hiszen target tuplingja olyan függvényeknek, melyek folytonos függvények (projekciók) target tuplingjának és folytonos függvénynek (a $\wedge_n$ véges konjunkciónak) kompozíciójaként állnak elő, így a fenti állítások összessége szerint ő is folytonos.

Mivel pedig $T_{\mathcal{P}}$ folytonos, így van egy legkisebb (pre)fixpontja, mely előáll $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} T^n_{\mathcal{P}}(\perp)$ alakban ($\perp$ a $\mathbf{2}^Z$-ben az az értékadás, melyre minden változó értéke 0).

Azt kaptuk tehát, hogy

Egy $\mathcal{P}$ logikai program egyetlen ,,jó" szemantikája az, melyet a Horn-algoritmus előállít: a $T_{\mathcal{P}}$ függvény legkisebb fixpontja.

(azzal, hogy ez az ,,előállítás" esetleg végtelen sok lépésen keresztül zajlik, ha Z végtelen, mint pl. az első példánkban is.)

Definíció

A $\mathcal{P}$ program kanonikus szemantikája a $T_{\mathcal{P}}$ függvény legkisebb fixpontja.

Általános logikai programok szemantikája

Az előző részben ún. negációmentes logikai programokról volt szó végig, és a folytonosságnál ki is használtuk, hogy negálás sehol nincs. Ebben a részben szemantikát fogunk rendelni általános logikai programokhoz (pl. a `prolog` támogat ilyet), melyeknek a törzsében negálhatjuk is a változókat:

Definíció

Általános logikai program $\ell_1 \wedge \ell_2 \wedge \ldots \ell_n \to p$ alakú klózok (esetleg végtelen) halmaza, ahol az ℓ_i-k literálok, p pedig változó.

A páros-páratlan példánk itt pl. lehet ez:

$$\rightarrow \mathsf{even}(0)$$
$$\neg\mathsf{even}(x) \rightarrow \mathsf{even}(\mathsf{s}(x))$$

Ennek is elkészíthetjük a Herbrand-kiterjesztését, x helyébe behelyettesítve az összes $\mathsf{s}^n(0)$ alaptermet. Egy modell itt is lehet ugyanaz, mint korábban: $\mathsf{even}(\mathsf{s}^n(0))$ pontosan akkor igaz, ha n páros. De ennek a programnak is (mint mindnek) modellje a konstans igaz értékadás is (megint azért, mert minden klóznak van egy feje, ami egy változó).

Továbbra is értelmezhetjük a $\mathcal{P}$ programhoz rendelt $T_\mathcal{P} : \mathbf{2}^Z \rightarrow \mathbf{2}^Z$ függvényt úgy, hogy „kiértékeljük u szerint a törzseket és $T_\mathcal{P}(u)$-ban q akkor lesz igaz, ha van q fejű, u szerint igaz törzsű programklóz”, azaz

$$T_\mathcal{P}(u)(r) := \bigvee_{p_1\wedge\ldots\wedge p_n\wedge\neg q_1\wedge\ldots\wedge\neg q_k\rightarrow r\in\mathcal{P}} u(p_1)\wedge\ldots u(p_n)\wedge\neg u(q_1)\wedge\ldots\neg u(q_k),$$

és ez a függvény persze azért okosság, mert továbbra is $T_\mathcal{P}$ prefixpontjai a $\mathcal{P}$ modelljei. Így kereshetünk modellt, alátámasztott modellt, minimális alátámasztott mode

NEM

…nem? nem. Azért nem, mert ez a $T_\mathcal{P}$ függvény még csak nem is monoton. Pl. ha a programunk annyi, hogy $\neg p \rightarrow p$, akkor $T_\mathcal{P}(0) = 1$ és $T_\mathcal{P}(1) = 0$, nincs fixpontja, nincs kétértékű alátámasztott modellje!

Valamit tenni kell. A kétértékű logika nem lesz elég, ez látszik.

Ahhoz, hogy mégiscsak tudjunk „alátámasztott” modellről beszélni, három-, és négyértékű logikát fogunk használni[3]. Ezekben a logikákban igazságértékintervallumokkal fogunk dolgozni: pl. $(0,0)$ lesz a csak a 0-t tartalmazó intervallum, $(1,1)$ a csak az 1-et, $(0,1)$ a mindkettőt, $(1,0)$ pedig az üres intervallum.

Folytassuk egy kis matekkal, általánosabban.

Ha L egy poset, akkor az $L \times L = L^2$ halmazt felfoghatjuk mint az intervallumok halmazát.

Definíció

Az $(x,y) \in L^2$ intervallumot konzisztensnek hívjuk, ha $x \leq y$.

Az L^2 poseten két rendezést is bevezetünk: a $\leq_t$ „igazságérték szerinti” rendezést és a $\leq_p$ „precíziós rendezést”. Mégpedig így:

Definíció

[3]Vannak, akik nem ezt csinálják; az általános logikai programok szemantikája terén nem mindig világos, hogy mi a „jó” szemantika…

$$(x,y) \leq_t (x',y') \Leftrightarrow x \leq x', y \leq y'$$
$$(x,y) \leq_p (x',y') \Leftrightarrow x \leq x', y' \leq y$$

Tehát a $\leq_t$ két intervallum közt akkor áll fenn, ha az egyik intervallum mindkét végpontja legalább akkora, mint a másik intervallum megfelelő végpontja; a $\leq_p$ pedig akkor, ha az egyik intervallum tartalmazza a másikat.

Mindkét rendezés szerint elő fog fordulni, hogy infimumot vagy szuprémumot veszünk; a $\vee$ és $\wedge$ jeleket a $\leq_t$ rendezés szerinti szuprémumra és infimumra használjuk, a $\oplus$ és $\otimes$ jeleket pedig a $\leq_p$ rendezés szerinti szuprémumra és infimumra.

Ha L teljes háló, akkor $L \times L$ is az mindkét rendezéssel: $\bigvee(x_i,y_i) = (\vee x_i, \vee y_i)$ és $\oplus(x_i,y_i) = (\vee x_i, \wedge y_i)$. Ebből az $\oplus$-t megnézzük: egyrészt $(\vee x_i, \wedge y_i)$ létezik, mert L teljes háló, melyben minden szuprémum és infimum is létezik. Másrészt $\oplus$-ra nézve felső korlátja az (x_i,y_i) elemeknek, hiszen $x_j \leq \vee_i x_i$ és $\wedge_i y_i \leq y_j$ minden $j \in I$-re fennáll, tehát $(x_i,y_i) \leq_p (\vee_i x_i, \wedge_i y_i)$. Harmadrészt, ha (x,y) szintén felső korlát, akkor $(x_i,y_i) \leq_p (x,y)$ minden i-re, azaz $x_i \leq x$ minden i-re (tehát $\vee_i x_i \leq x$) és $y \leq y_i$ is minden i-re (tehát $y \leq \wedge_i y_i$), azaz $(\vee_i x_i, \wedge_i y_i) \leq_p (x,y)$. Például, ha $L = \mathbf{2}$, akkor L^2 elemeinek a szokásos jelölése $\mathsf{t} = (1,1)$ (ebben az intervallumban csak az 1 van, tehát ez az „igaz” érték), $\mathsf{f} = (0,0)$ (ebben csak a 0, „hamis”), $\perp = (0,1)$ (ebben a 0 és az 1 is, „unknown”) és $\top = (1,0)$ (ez üres, „inkonzisztens” érték, a másik három konzisztens).

Ebben a hálóban a két rendezés: $\mathsf{f} \leq_t \perp, \top \leq_t \mathsf{t}$ és $\perp \leq_p \mathsf{f}, \mathsf{t} \leq_p \top$. (Ez utóbbi megmagyarázza azt is, hogy miért épp a $\perp$ és $\top$ jeleket választottuk.)

Ha $L = \mathbf{2}^Z$, akkor $w = (u,v) \in \mathbf{2}^Z \times \mathbf{2}^Z$ minden q változóhoz egy ilyen intervallumot rendel: $u(q)$ adja meg az intervallum bal végpontját, $v(q)$ pedig a jobb végpontját. Azaz q-hoz az $(u(q), v(q))$ intervallumot.

Egy $f : L_1^2 \to L_2^2$ függvény mindig felírható $f = \langle f_1, f_2 \rangle$ alakban, $f_1, f_2 : L_1^2 \to L_2$, az f_1 számítja ki az $f(x,y)$ függvény eredményének első koordinátáját, az f_2 pedig a másodikat.

A $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$ halmazon a negálás műveletét definiálhatjuk a következőképpen:

Definíció

$$\neg(x,y) := (\neg y, \neg x).$$

Ez azért „jó” definíció, mert $\neg\mathsf{t} = \neg(1,1) = (\neg 1, \neg 1) = (0,0) = \mathsf{f}$ és $\neg\mathsf{f} = \neg(0,0) = (\neg 0, \neg 0) = (1,1) = \mathsf{t}$, tehát az igaz-hamis értékeket cseréli, továbbá $\neg\perp = \neg(0,1) = (\neg 1, \neg 0) = (0,1) = \perp$ és hasonlóan $\neg\top = \top$, ami egyezik azzal az intuícióval, hogy ismeretlen érték negáltjáról továbbra sem tudunk semmit, lehetetlen érték negáltja pedig szintén lehetetlen.

Számunkra fontos tulajdonsága, hogy

Állítás

A negálás $\leq_p$-monoton,

vagyis ha $(x,y) \leq_p (x',y')$, akkor $\neg(x,y) \leq_p \neg(x',y')$.

Bizonyítás

Ha $(x,y) \leq_p (x',y')$, akkor $x \leq x'$ és $y' \leq y$, ekkor pedig $\neg y \leq \neg y'$ és $\neg x' \leq \neg x$, tehát $\neg(x,y) = (\neg y, \neg x) \leq_p (\neg y', \neg x') = \neg(x',y')$.

Megpróbálhatjuk vizsgálni a $\mathcal{P}$ programhoz rendelt $T_{\mathcal{P}}$ függvényhez analóg módon bevezetni azt a $\Phi_{\mathcal{P}} : (\mathbf{2}\times\mathbf{2})^Z \to (\mathbf{2}\times\mathbf{2})^Z$ függvényt, melyben „az r változó új értéke az r fejű klózok törzseinek értékének szuprémuma", mint ahogy $T_{\mathcal{P}}$-ben is tettük:

Definíció

$$\Phi_{\mathcal{P}}(w)(r) \ := \bigvee_{p_1\wedge\ldots\wedge p_n\wedge\neg q_1\wedge\ldots\wedge\neg q_k\to r\in\mathcal{P}} w(p_1)\wedge\ldots\wedge w(p_n)\wedge\neg w(q_1)\wedge\ldots\neg w(q_k).$$

Tehát, w megad minden változónak egy intervallum-értéket, ezeket a negatív literálok esetében a most bevezetett negálással negáljuk, majd $\leq_t$ szerint vesszük ezeknek az értékeknek az infimumát, így kapjuk meg egy törzs értékét, és az r fejű törzsek igazságértékeinek a $\leq_t$ szerinti szuprémumát kapja meg új értéknek a változó.

Matematikailag könnyebben lesz vizsgálható ez a $\Phi_{\mathcal{P}}$ függvény, ha nem $(\mathbf{2}\times\mathbf{2})^Z \to (\mathbf{2}\times\mathbf{2})^Z$ függvényként, hanem egy $\Psi_{\mathcal{P}} : (\mathbf{2}^Z\times\mathbf{2}^Z) \to (\mathbf{2}^Z\times\mathbf{2}^Z)$ függvényként kezeljük. Láttuk, hogy $\mathbf{2}^Z\times\mathbf{2}^Z$ halmazt úgy képzeljük el, melynek egy $w=(u,v)$ eleme szintén minden Z-beli változónak ad egy intervallumértéket, mégpedig úgy, hogy u adja meg az intervallum bal, v pedig a jobb végpontját. Azaz a q változó értéke ekkor $(u(q),v(q))$ lesz.

Mivel ez a $\Psi_{\mathcal{P}}$ függvény két háló direkt szorzatába képez, így felírható $\Psi_{\mathcal{P}} = \langle f_{\mathcal{P}}, g_{\mathcal{P}}\rangle$ alakban (tehát $f_{\mathcal{P}}$ számolja minden változónak az új intervallum bal végpontját, $g_{\mathcal{P}}$ pedig a jobb végpontját).

Ha a p változó értéke az $(u(p),v(p))$ intervallum, akkor ennek bal végpontja $u(p)$; a $\neg q$ literál értéke pedig az $(\neg v(q), \neg u(q))$ intervallum, melynek bal végpontja pedig $\neg v(q)$. Ezért a fenti $\Phi_{\mathcal{P}}$ függvénynek a bal végpontjait kiszámoló $f_{\mathcal{P}}$ függvényt így tudjuk felírni:

Definíció

$$f_{\mathcal{P}}(u,v)(r) := \bigvee_{p_1\wedge\ldots\wedge p_n\wedge\neg q_1\wedge\ldots\wedge\neg q_k\to r\in\mathcal{P}} u(p_1)\wedge\ldots\wedge u(p_n)\wedge\neg v(q_1)\wedge\ldots\wedge\neg v(q_k).$$

Teljesen hasonló gondolatmenettel az intervallumok jobb oldalát kiszámító $g_{\mathcal{P}}$ függvény:

$$g_{\mathcal{P}}(u,v)(r) := \bigvee_{p_1\wedge\ldots\wedge p_n\wedge\neg q_1\wedge\ldots\wedge\neg q_k\to r\in\mathcal{P}} v(p_1)\wedge\ldots\wedge v(p_n)\wedge\neg u(q_1)\wedge\ldots\wedge\neg u(q_k).$$

Amiért pedig könnyebb lesz kezelni ezt a függvényt ebben a $\Psi_{\mathcal{P}}$ alakban: vegyük észre, hogy f-ben és g-ben u és v szerepe felcserélődik, azaz

$$f_{\mathcal{P}}(u,v) = g_{\mathcal{P}}(v,u).$$

Ez egy nagyon fontos tulajdonsága $\Psi_{\mathcal{P}}$-nek, el is nevezzük:

Definíció

Az $f = \langle f_1, f_2 \rangle : L_1^2 \to L_2^2$ függvény szimmetrikus, ha $f_1(x,y) = f_2(y,x)$ minden $x, y \in L_1$-re.

Most a célunk belátni, hogy a $\Psi_{\mathcal{P}}$ függvény $\leq_p$-monoton is. (Azaz azt, hogy ha $(u,v) \leq_p (u',v')$, akkor $\Psi_{\mathcal{P}}(u,v) \leq_p \Psi_{\mathcal{P}}(u',v')$. Itt $u, v \in \mathbf{2}^Z$; ahogy eddig is, a $\leq_p$ a pontonkénti rendezést jelenti, tehát $(u,v) \leq_p (u',v')$ akkor áll fenn, ha $u \leq u'$ és $v' \leq v$ igaz $\mathbf{2}^Z$-ben, az pedig akkor, ha tetszőleges $q \in Z$ változóra $u(q) \leq u'(q)$ és $v'(q) \leq v(q)$.) Ehhez az $f_{\mathcal{P}}$ függvényt fogjuk nézegetni.

Szimmetrikus függvények $\leq_p$-monotonitásáról a következőt tudjuk mondani:

Állítás

Egy $f = \langle f_1, f_2 \rangle : L_1^2 \to L_2^2$ szimmetrikus függvény pontosan akkor $\leq_p$-monoton, ha az f_1 függvény $\leq_p$-monoton,

azaz ha $x \leq x'$ és $y' \leq y$ (vagyis ha $(x,y) \leq_p (x',y')$), akkor $f_1(x,y) \leq f_1(x',y')$ (az L_2-beli rendezés szerint).

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy $(x,y) \leq_p (x',y')$. Ekkor a következők ekvivalensek:

$$\begin{aligned} f(x,y) \leq_p f(x',y') \quad &\Leftrightarrow \quad f_1(x,y) \leq f_1(x',y') \ \wedge \ f_2(x',y') \leq f_2(x,y) \quad (\leq_p \text{ def}) \\ &\Leftrightarrow \quad f_1(x,y) \leq f_1(x',y') \ \wedge \ f_1(y',x') \leq f_1(y,x) \quad (\text{szimmetria}), \end{aligned}$$

tehát a $\leq_p$-monotonitásból valóban következik az f_1 függvény $\leq_p$-monotonitása is, és visszafelé is, ha $f_1(x,y) \leq f_1(x',y')$ mindig teljesül, ahányszor $x \leq x'$, $y' \leq y$, akkor az x és y, valamint a vesszők szerepének felcserélésével kapjuk, hogy $f_1(y',x') \leq f_1(y,x)$ szintén igaz, ami együtt implikálja az f függvény $\leq_p$-monotonitását.

Mivel tehát azt már láttuk, hogy $\Psi_{\mathcal{P}}$ egy szimmetrikus függvény, így ha azt is belátjuk, hogy $f_{\mathcal{P}}$ egy $\leq_p$-monoton függvény, akkor kapjuk, hogy $\Psi_{\mathcal{P}}$ is $\leq_p$-monoton.

Állítás

Az $f_{\mathcal{P}}$ függvény (így a $\Psi_{\mathcal{P}}$ függvény is) $\leq_p$-monoton.

Bizonyítás

Egy p pozitív literál kiértékelése, az $(u,v) \mapsto u(p)$ függvény $\leq_p$-monoton, hiszen ha $(u,v) \leq_p (u',v')$, akkor $u \leq u'$, ami def. szerint azt mondja, hogy $u(p) \leq u'(p)$.

Egy q negatív literál kiértékelése, az $(u,v) \mapsto \neg v(q)$ függvény szintén $\leq_p$-monoton, hiszen ha $(u,v) \leq_p (u',v')$, akkor $v' \leq v$, ami def. szerint azt mondja, hogy $v'(q) \leq v(q)$, ekkor pedig $\neg v(q) \leq \neg v'(q)$.

Azt pedig már láttuk, hogy monoton függvények szuprémuma/infimuma szintén monoton lesz (az infimumot használjuk egy-egy törzs kiértékelésénél, a szuprémumot pedig a törzsek eredményei szuprémumának képzésénél), így minden r változó esetén az r változó új értékét előállító $\mathbf{2}^Z \times \mathbf{2}^Z \to \mathbf{2}$ függvény $\leq_p$-monoton, az egész $f_\mathcal{P}$ függvény pedig ezek szerint $\leq_p$-monoton függvények target tuplingja, tehát szintén $\leq_p$-monoton.

Sajnos a $\Psi_\mathcal{P}$ függvény nem $\leq_p$-folytonos, így nem tudjuk alkalmazni a korábbi tételünket, miszerint ω-CPO-ban folytonos függvénynek mindig van legkisebb (pre)fixpontja. Célunk most bebizonyítani azt, hogy teljes posetben monoton függvénynek is mindig van legkisebb (pre)fixpontja.

Ehhez először nézzünk egy példát. Legyen a posetünk az $L = \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ nemnegatív valós számok halmaza a szokásos rendezéssel, kibővítve egy ∞ legnagyobb elemmel. Ez egy teljes poset, sőt egy teljes háló, minden részhalmazának van szuprémuma. Legyen az $f : L \to L$ függvény a következő: az $r = n - a$ valós számhoz, ahol n egész, a pedig egy $(0,1]$-be eső valós szám, rendelje az $f(r) = n - a/2$ valóst. Tehát: vegyük az r-nél első nagyobb n egész számot, és felezzük meg a távolságot r és n közt. Azaz pl. $f(1/2) = 3/4$, $f(0.9) = 0.95$, $f(0) = 1/2$, $f(5) = 5.5$. Legyen továbbá $f(\infty) = \infty$. (Igen, ez az egy fixpontja van.)

Ez a függvény ellenőrizhetően monoton, viszont nem folytonos: pl. ha $X = [0,1)$ az 1-nél kisebb nemnegatív valósak halmaza, akkor $f(X) = [0.5, 1)$ lesz, ennek a halmaznak a szuprémuma 1; azonban, X szuprémumának (1-nek) az f melletti képe 1.5, tehát a szuprémum képe nem ugyanaz, mint a képek szuprémuma.

A (legkisebb) fixpontot mégis ,,el tudjuk érni" a folytonos esethez hasonló iterációval: kiindulunk a 0 (legkisebb) elemből, alkalmazzuk az f-et: $1/2, 3/4, 7/8, \ldots$. Majd a ,,végtelenedik" iterációban megkapjuk az $f^n(0)$ értékek szuprémumát, 1-et. (Ez eddig pontosan ugyanaz, mint amit a folytonos esetben csináltunk, ott ez automatikusan egy fixpont lett.) Most az 1 nem fixpont, iterálunk tovább: $3/2, 7/4, 15/8, \ldots$. Ismét a következő ,,végtelenedik" iterációban elérjük a 2-t, de ez sem fixpont, ha tovább alkalmazzuk az f-et, kapjuk a $2.5, 2.75, \ldots$ értéket, újabb végtelen sok lépés után az előzőek szuprémumát, 3-at, újabb végtelen sok lépés után a 4-et, és ,,végtelenszer végtelen" iterációban egyszer csak elérjük a ∞ elemet, ami már fixpont lesz.

Ez a módszer általában is működik. Ahogy pedig hívják: transzfinit indukció.

Érzékelhetően az történik, hogy a sorozatot nem ,,csak" a természetes számokkal, hanem ,,valami mással" indexelünk. Amivel indexeljük a sorozatunkat, azt úgy hívják, rendszám.

A rendszámok matematikájának a megalapozása önmagában egy fél féléves anyag lenne. Amit alkalmazni fogunk belőle, azokat bizonyítás nélkül felsoroljuk itt:

1. A 0 egy rendszám.
2. A rendszámok közt van definiálva egy részbenrendezés. A 0 a legkisebb rendszám.
3. Rendszámok bármilyen nemüres halmazának van legkisebb eleme[4].
4. Ez azt is jelenti, hogy ha α és β rendszámok, akkor az $\{\alpha, \beta\}$ halmaznak van legkisebb eleme, tehát vagy $\alpha \leq \beta$, vagy $\beta \leq \alpha$. Azaz rendszámok bármilyen halmaza lineárisan rendezett.
5. Rendszámok tetszőleges halmazának van szuprémuma (ami szintén egy rendszám).
6. Tetszőleges α rendszámra az α-nál kisebb rendszámok mindig halmazt alkotnak[5].

[4] Ezt úgy hívják, hogy ,,jólrendezve" vannak.

[5] Ahogy az összes halmazok együtt nem alkotnak halmazt, mert ahhoz túl sokan vannak – ezt tanultuk logikából – , úgy az összes rendszám sem alkot halmazt, ahhoz ők is túl sokan vannak. Ez az állítás viszont azt mondja, hogy ha van egy ,,felső korlát" rendszám, akkor az annál kisebb rendszámok még halmazt alkotnak, tehát pl. van szuprémumuk is.

7. Ha α egy rendszám, akkor van egy olyan $\alpha+1$-gyel jelölt rendszám, amire $\alpha < \alpha+1$, és minden β rendszámra ha $\alpha < \beta$, akkor $\alpha+1 \leq \beta$. Tehát $\alpha+1$ az α után következő első rendszám[6]. Az ilyen, $\alpha+1$ alakban előálló rendszámokat rákövetkező rendszámnak hívják.

8. Azok az α rendszámok, amik nem a nulla és nem rákövetkező rendszámok, azok ún. limesz rendszámok, és előállnak $\alpha = \bigvee_{\beta<\alpha} \beta$ alakban, tehát a náluk kisebb összes rendszám szuprémumaként.

9. Rendszámokra lehet transzfinit indukciót csinálni: ha a $\mathcal{P}$ tulajdonság

   - igaz a 0 rendszámra,
   - ha igaz az α rendszámra, akkor igaz az $\alpha+1$ rendszámra is,
   - és ha igaz az α (limesz) rendszámnál összes kisebb β rendszámra, akkor igaz α-ra is,

   akkor $\mathcal{P}$ igaz az összes rendszámra[7]. (A teljes indukció módszere az első két pontot használja, ekkor az összes természetes számra igaz $\mathcal{P}$; ez nem véletlen, mert a természetes számok éppen a 0, 1, $1+1$, $1+1+1$,... rendszámok: mindnél van eggyel nagyobb.

10. Tetszőleges X halmazra igaz, hogy létezik akkora α_X rendszám, melyre az α_X-nél kisebb rendszámok halmaza nagyobb számosságú[8], mint X[9].

Nézzünk példákat pár relatíve kicsi rendszámra. A 0 egy rendszám, azt mondtuk. Akkor a 0 utáni első rendszám a $0+1$, jelölhetjük 1-gyel. Az azt követő az $1+1$, jelölhetjük 2-vel. Az azt követő a 3-mal jelölt $2+1$ (vagy aki hardcore, annak $0+1+1+1$). Így tovább, minden természetes szám egy rendszám is.

Viszont a természetes számok halmaza ezek szerint rendszámok egy halmaza, és a fenti ötödik pont szerint akkor van az ő szuprémumuk, ami szintén rendszám. A szuprémumuk nyilván nem lehet egy természetes szám sem (mert annál lenne nagyobb természetes szám), hanem ,,valami új”: ezt jelölik ω-val. (Tehát ω az első végtelen rendszám, és az első limesz rendszám egyben.) Az előző függvényes példában pl. az ω. lépésben értünk el az 1-ig.

Mivel pedig az ω egy rendszám, ezért van nála is eggyel nagyobb, ezt $\omega+1$ jelöli, az annál 1-gyel nagyobbat $\omega+2$, majd $\omega+3$, stb. A sorozatunk ennyiedik indexeinél jártunk, amikor az $1.5, 1.75, 1.875, \ldots$ számokon haladtunk végig. Viszont az $\{\omega, \omega+1, \omega+2, \omega+3, \ldots\}$ halmaz az megint rendszámok egy halmaza, tehát van szuprémuma, ami megint egy ,,új” dolog kell legyen, mert ebben a halmazban nincs legnagyobb elem, tehát a szuprémum ezeken kívül esik, jelölje mondjuk $\omega+\omega$[10]. Jelölhetjük ezt épp $\omega \times 2$-vel is. Persze ezután jönnek az $\omega \times 2+1$, $\omega \times 2+2$,... rendszámok, majd ezek limesze az $\omega \times 3$, és így tovább, megkapjuk az $\omega \times 4$, $\omega \times 5$, ... rendszámokat is, majd ezek limeszeként rendszám lesz az $\omega \times \omega$, amit az előbb úgy hívtunk, hogy ,,végtelenszer elszámoltunk végtelenig”, és ekkor kaptuk meg a ∞-t mint fixpontot.

Az $\omega \times \omega$, avagy ω^2 még mindig egy relatív kicsi rendszám, ha egymás után teszünk belőle ω sokat, kapjuk az ω^3, ω^4,... rendszámokat, majd limeszként megint az ω^ω-val jelöltet, nagyon

[6]Ezt mondhatnánk úgy is, hogy ,,az α-nál nagyobb rendszámok közt van legkisebb elem, jelöljük $\alpha+1$-gyel”. Ez kicsit veszélyes, mert az α-nál nagyobb rendszámok viszont nem alkotnak halmazt...

[7]Ez egyébként pont azért van, mert jólrendezve vannak.

[8]ebbe most ne menjünk bele

[9]Na pont ez az a tulajdonság, ami miatt rendszámokkal indexelünk: akár kontinuumig vagy sokkal tovább is tudunk számolni velük.

[10]jelezném, most tartunk ott, mint Chuck Norris

sokáig el lehet számolni így és még mindig nagyon az elején tartunk. Akit érdekel ennél mélyebben, nézzen wikit.

És akkor most bebizonyítjuk, hogy

Állítás

Ha P egy teljes poset, $f : P \to P$ pedig egy monoton függvény, akkor f-nek van legkisebb (pre)fixpontja.

Jelölje őt $k(f)$.

Bizonyítás

Minden α rendszámhoz fogunk rendelni egy $x_\alpha \in P$ elemet a következő szabályokkal:

- $x_0 = \bot$, a poset legkisebb eleme. (Van neki, mert teljes.)
- Ha $\alpha = \beta + 1$ rákövetkező rendszám, akkor legyen $x_\alpha = f(x_\beta)$. (Ezt csináltuk a folytonos függvények esetén is.)
- Ha α limesz rendszám, akkor legyen $x_\alpha = \bigvee_{\beta<\alpha} x_\beta$. (Ezt nemsokára látni fogjuk, hogy mindig létezik, mert az $\{x_\beta : \beta < \alpha\}$ halmaz lineárisan rendezett.)

Először is be akarjuk bizonyítani azt, hogy ha $\alpha \leq \beta$, akkor $x_\alpha \leq x_\beta$. Ez a $\beta = 0$ esetre világos, mert ha $\alpha \leq 0$, akkor $\alpha = 0$ és $x_\alpha = x_\beta$. Tegyük fel, hogy az állítás igaz az összes β-nál kisebb rendszámra (tehát ha $\alpha \leq \gamma < \beta$, akkor $x_\alpha \leq x_\gamma$), ebből bebizonyítjuk, hogy igaz β-ra is.

Ha β limesz rendszám, akkor a β-nál kisebb rendszámokra az indukciós feltevés igaz, azaz ha $\alpha < \gamma < \beta$, akkor $x_\alpha \leq x_\gamma$. Ez azt is jelenti, hogy az $\{x_\alpha : \alpha < \beta\}$ halmaz lineárisan rendezett (mert rendszámok tetszőleges halmaza az és a β-nál kisebb rendszámok halmazt alkotnak, így az x_α-k is), tehát a szuprémum az $x_\beta = \bigvee_{\alpha<\beta} x_\alpha$ képletben tényleg létezik, mert P teljes poset. Továbbá, tetszőleges $\alpha < \beta$ rendszámra nyilván $x_\alpha \leq \bigvee_{\gamma<\beta} x_\gamma$, hiszen x_α eleme a halmaznak, melynek szuprémumát vesszük.

Most legyen $\beta = \gamma + 1$ rákövetkező rendszám. Ekkor a β-nál kisebb rendszámok: a γ-nál is kisebb rendszámok és maga γ. Ha $\alpha < \gamma$, akkor az indukciós feltevés szerint $x_\alpha \leq x_\gamma$, tehát elég azt belátnunk, hogy $x_\gamma \leq x_\beta = f(x_\gamma)$. Három eset lehetséges: γ vagy a nulla, vagy egy rákövetkező rendszám, vagy egy limesz rendszám.

Ha $\gamma = 0$, akkor $x_\gamma = \bot$ és persze $\bot \leq f(\bot)$, mert $\bot$ a poset legkisebb eleme.

Ha $\gamma = \delta + 1$ rákövetkező rendszám, akkor az indukciós feltevés szerint $x_\delta \leq x_\gamma$. Alkalmazva f monotonitását azt kapjuk, hogy $f(x_\delta) \leq f(x_\gamma)$, ami, mivel $\delta + 1 = \gamma$ és $\gamma + 1 = \beta$, épp azt jelenti, hogy $x_\gamma \leq x_\beta$.

Végül, ha $\gamma = \bigvee_{\delta<\gamma} \delta$ limesz rendszám, akkor a definíció szerint $x_\gamma = \bigvee_{\delta<\gamma} x_\delta$. Továbbá, mivel $x_{\delta+1} \leq x_\gamma$ is igaz minden $\delta < \gamma$-ra (továbbra is mert γ limesz, így $\delta + 1$ is kisebb γ-nál, és itt alkalmazhatjuk az indukciós feltevést), ezért $\bigvee_{\delta<\gamma} x_{\delta+1} \leq x_\gamma$ is igaz, tehát $x_\gamma = \bigvee_{\delta<\gamma} x_{\delta+1}$.

Ha $\delta < \gamma$, akkor alkalmazva az indukciós feltevést kapjuk, hogy $x_\delta \leq x_\gamma$, ebből f monotonitása miatt kapjuk, hogy $f(x_\delta) \leq f(x_\gamma)$, azaz a sorozat definíciója szerint $x_{\delta+1} \leq x_{\gamma+1} = x_\beta$. Tehát x_β egy felső korlátja az $\{x_{\delta+1} : \delta < \beta\}$ halmaznak, x_γ pedig a legkisebb felsőkorlátja, így $x_\gamma \leq x_\beta$ tényleg fennáll.

Vagyis igazoltuk, hogy a sorozat jóldefiniált és ha $\alpha \leq \beta$, akkor $x_\alpha \leq x_\beta$.

Most pedig alkalmazzuk, hogy rendszámból mindig van elég: legyen α egy olyan nagy rendszám, melyre az α-nál kisebb rendszámok halmaza nagyobb számosságú, mint L! Akkor az $\alpha \mapsto x_\alpha$ függvény nem lehet injektív (erről szól a nagyobb számosság egyébként: egy halmaz nagyobb számosságú, mint egy másik, ha nem lehet injektíven beleképezni), tehát vannak különböző, mondjuk $\beta < \gamma < \alpha$ rendszámok, amikre $x_\beta = x_\gamma$. Akkor $\beta + 1$-re is igaz, hogy $x_\beta = x_{\beta+1}$ (hiszen $\beta \leq \beta + 1 \leq \gamma$ miatt $x_\beta \leq x_{\beta+1} \leq x_\gamma$, de a két szélső egyenlő). Vegyük a legkisebb ilyen β rendszámot (tehát az α-nál kisebb olyan γ rendszámok közül, melyekre $x_\gamma = x_{\gamma+1}$, ilyen ezek szerint van, vegyük a legkisebbet).

Erre a β-ra $x_\beta = x_{\beta+1} = f(x_\beta)$, tehát x_β egy fixpont.

Most még megmutatjuk azt is, hogy x_β a legkisebb prefixpont. Ezt megint transzfinit indukcióval tesszük: megmutatjuk, hogy ha x prefixpont, akkor minden x_α rendszámra $x_\alpha \leq x$.

Az $\alpha = 0$ rendszámra ez igaz, mert $x_0 = \bot \leq x$ minden x-re.

Ha $\alpha = \gamma + 1$ rákövetkező rendszám, akkor indukció szerint $x_\gamma \leq x$, alkalmazva f monotonitását kapjuk, hogy $x_\alpha = f(x_\gamma) \leq f(x) \leq x$, mert x prefixpont.

Ha $\alpha = \bigvee_{\gamma<\alpha} \gamma$ limesz rendszám, akkor $x_\alpha = \bigvee_{\gamma<\alpha} x_\gamma$. Indukció szerint ezen x_γ-k mindegyikére $x_\gamma \leq x$, tehát x egy felső korlátjuk, x_α pedig a legkisebb felső korlátjuk, így $x_\alpha \leq x$ ekkor is igaz.

Tehát az x_α sorozat tetszőleges elemének bármelyik prefixpont felső korlátja, így az x_α (pre)fixpont, amit kaptunk, valóban a legkisebb prefixpont, és így a legkisebb fixpont kell legyen.

A bizonyításban definiált x_α sorozatot Kripke-Kleene fixpontiterációnak, az ezzel kapott legkisebb fixpontot pedig Kripke-Kleene fixpontnak hívják. (Ezért jelöli $k(f)$.)

Mindezt azért csináltuk, hogy az általános logikai programoknak szemantikát rendeljünk, a Kripke-Kleene szemantika éppen ez: a $\mathcal{P}$ általános logikai program szemantikája legyen a $\Psi_\mathcal{P}$ függvény legkisebb (pre)fixpontja a $\leq_p$ rendezés szerint (ami van, mert $\Psi_\mathcal{P}$-ről már láttuk, hogy $\leq_p$-monoton, a $\mathbf{2}^Z \times \mathbf{2}^Z$ halmaz pedig teljes háló, tehát teljes poset is).

Hogy a $\Psi_\mathcal{P}$ függvény egyszerre szimmetrikus és $\leq_p$-monoton is, annak van pár hasznos következménye, pl. hogy ebben a legkisebb fixpontban nem fog szerepelni a $\top$ inkonzisztens érték. Ezeket a függvényeket el is nevezzük:

Definíció

Az $f : L^2 \to L^2$ függvény approximációs függvény, ha szimmetrikus és $\leq_p$-monoton.

Azt már láttuk, hogy minden $\leq_p$-monoton függvénynek van legkisebb fixpontja (a $\leq_p$ rendezésre nézve), de ennél több is igaz:

Állítás

Legyen L teljes háló, $f : L^2 \to L^2$ pedig approximációs függvény. Ekkor f legkisebb fixpontja konzisztens.

Bizonyítás

Láttuk, hogy a legkisebb fixpont előáll x_α alakban valamilyen α rendszámra az $x_0 = \bot$, rákövetkező rendszámra $x_{\alpha+1} = f(x_\alpha)$, limesz rendszámra pedig $x_\alpha = \bigvee_{\beta<\alpha} x_\beta$ iterációt alkalmazva.

Belátjuk, hogy ennek a sorozatnak minden tagja konzisztens.

A $\leq_p$ szerinti rendezésben L^2 legkisebb eleme $x_0 = (\bot, \top)$, ami konzisztens.

Ha $x_\alpha = (x, y)$ konzisztens, azaz $x \leq y$, akkor $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) = (f_1(x, y), f_1(y, x))$ a szimmetria miatt. Tudjuk, hogy ha f approximációs függvény, akkor f_1 pedig $\leq_p$-monoton, így (mivel $x \leq y$, így $(x, y) \leq_p (y, x)$) kapjuk, hogy $f_1(x, y) \leq f_1(y, x)$, tehát $f(x, y)$ tényleg konzisztens.

Ha pedig minden α-nál kisebb β rendszámra x_β konzisztens, akkor $x_\alpha = \bigoplus_{\beta<\alpha} x_\beta$ alakban (vegyük észre, hogy a $\leq_p$-monoton függvény iterációjakor a $\leq_p$ szerinti $\oplus$ szuprémummal kell dolgozzunk). Így, ha $x_\beta = (y_\beta, z_\beta)$ alakban írjuk fel a sorozat elemeit, akkor $\oplus$-szuprémumuk $x_\alpha = (\vee_\beta y_\beta, \wedge_\beta z_\beta)$-ról kell belássuk, hogy konzisztens. Ehhez elég megmutatnunk, hogy tetszőleges $\beta_1, \beta_2 < \alpha$-ra $y_{\beta_1} \leq z_{\beta_2}$ (hiszen ha $Y \leq Z$, akkor $\vee Y \leq \wedge Z$, ha az infimum és a szuprémum létezik).

Tudjuk, hogy ha $\beta_1 \leq \beta_2$, akkor $x_{\beta_1} \leq_p x_{\beta_2}$, tehát az $\{x_\beta : \beta < \alpha\}$ egy lineárisan rendezett részhalmaz. Legyen $\beta_1 \leq \beta_2$. Ekkor tehát $(y_{\beta_1}, z_{\beta_1}) \leq_p (y_{\beta_2}, z_{\beta_2})$, azaz $y_{\beta_1} \leq y_{\beta_2}$ és $z_{\beta_2} \leq z_{\beta_1}$. Mivel x_{β_1} és x_{β_2} konzisztensek is az indukciós hipotézis szerint, így $y_{\beta_1} \leq z_{\beta_1}$ és $y_{\beta_2} \leq z_{\beta_2}$ is igaz, tehát $y_{\beta_1} \leq y_{\beta_2} \leq z_{\beta_2}$ és $y_{\beta_2} \leq z_{\beta_2} \leq z_{\beta_1}$ is valóban teljesül, ezzel kész vagyunk.

Tehát azt kaptuk, hogy a $\Psi_\mathcal{P}$ függvény $\leq_p$ szerinti legkisebb fixpontja létezik, megkapjuk Kleene-Kripke fixpontiterációval, és az iteráció közben végig konzisztens elemeket kapunk. Mivel a $\Psi_\mathcal{P}$ függvény egy másik reprezentációja a $\Phi_\mathcal{P} : (\mathbf{2} \times \mathbf{2})^Z \to (\mathbf{2} \times \mathbf{2})^Z$ függvénynek:

$$\Phi_\mathcal{P}(w)(r) \ := \bigvee_{p_1 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge \neg q_1 \wedge \ldots \wedge \neg q_k \to r \in \mathcal{P}} w(p_1) \wedge \ldots \wedge w(p_n) \wedge \neg w(q_1) \wedge \ldots \neg w(q_k),$$

ezért azt kaptuk, hogy ennek a függvénynek (ahol tehát a változók értékei a $\mathsf{f} <_t \bot <_t \mathsf{t}$ három érték egyikét vehetik fel, a $\vee$ és a $\wedge$ műveleteket eszerint a rendezés szerint vesszük, az iterációt pedig a $\bot^Z$ elemből indítjuk) a legkisebb fixpontja szintén előáll ugyanezzel a Kripke-Kleene iterációval: a $\top$ érték nem fog előállni közben. Ezért nevezzük 3-értékű modellnek a $\Phi_\mathcal{P}$ függvény prefixpontjait, alátámasztott 3-értékű modellnek a $\Phi_\mathcal{P}$ függvény fixpontjait és Kripke-Kleene modellnek a $\leq_p$ szerinti legkisebb fixpontját. (ami, a $\mathbf{2}^Z \times \mathbf{2}^Z \approx (\mathbf{2} \times \mathbf{2})^Z$ izomorfizmus mellett ugyanaz, mint a $\Psi_\mathcal{P}$ függvény $\leq_p$ szerinti legkisebb fixpontja.)

Tehát, általános logikai programoknak is sikerült adjunk egy szemantikát, a Kripke-Kleene szemantikát.

Örülünk, Vincent?

NEM

mert közben elfeledkeztünk az Első Szabályról, amit a szemantika körüli gondolkodáskor tettünk,

Egy „jó” szemantika minimalizálja az igazságértéket.

tehát a $\leq_t$ szerint is minimális prefixpontot kellene keresnünk!

És ha ez még nem lenne elég, nézzük a $p \to p$ (nem túl komplikált) programot. Ennek a Kripke-Kleene szemantika szerinti legkisebb fixpontja a $p = \bot$: ebből indulunk ki az iteráció során és az új értéke is pont ez lesz (az egyetlen törzset kiértékeljük, lesz $\bot$, ezt adjuk értékül a fejnek, p-nek, marad $\bot$, fixpont). Viszont ha a „szokásos” kanonikus megoldását vesszük (ennek van, mert nincs a törzsben negálás, tehát alkalmazhatjuk pl a Horn-algoritust, azaz a Kleene-iterációt), akkor az a $p = 0$ (vagy $p = \mathsf{f}$) értékből indul ki, és ez lesz a fixpontja.

Tehát

Közönséges logikai programokon a Kripke-Kleene szemantika nem ugyanaz, mint a kanonikus szemantika,

ami már nagyobb probléma, mert azt hallgatólagosan elfogadtuk, hogy közönséges (=negációmentes) logikai programoknak márpedig a kanonikus szemantika „a” jó szemantika. Tehát valami „gond” van a Kripke-Kleene szemantikával.

Most egy olyan másik szemantikát fogunk megadni általános logikai programokra, kiindulva a Φ függvényből, mely minimalizálja az igazságértéket is és a kanonikus szemantikának is kiterjesztése lesz. Ehhez ismét definiálunk egy jelölést, majd egy általánosabb fogalmat.

Definíció

Legyen $f : P \to P$ egy monoton függvény a P teljes poseten. Ekkor $\mu x.f(x)$ jelöli az f legkisebb fixpontját.

Definíció

Legyen L teljes háló és $f = \langle f_1, f_2 \rangle : L^2 \to L^2$ approximációs függvény. Az f stabilizációs függvénye az az $s : L^2 \to L^2$ függvény, melyre $s(x, y) = (s_1(y), s_1(x))$, ahol az $s_1 : L \to L$ függvény az $s_1(z) := \mu x.f_1(x, z)$.

Vagyis, ha $s_1(y)$-t akarjuk kiszámítani input y-ra, akkor az $z \mapsto f_1(z, y)$ függvény legkisebb fixpontját kell kiszámítsuk. Ez létezik, hiszen ha f approximációs függvény, akkor f_1 pedig $\leq_p$-monoton, tehát ha $z_1 \leq z_2$, akkor $(z_1, y) \leq_p (z_2, y)$, így $f_1(z_1, y) \leq f_1(z_2, y)$, vagyis ez a $z \mapsto f_1(z, y)$ függvény tetszőleges rögzített y paraméterre egy monoton függvény (az L hálón).

Továbbá,

Állítás

Approximációs függvény s stabilizációs függvénye $\leq_t$-antimonoton approximációs függvény: ha $(x, y) \leq_t (x', y')$, akkor $s(x', y') \leq_t s(x, y)$.

(tehát, tulajdonságok szempontjából a stabilizálás egy eleve ,,jó” – approximációs – függvényből készít egy ,,még jobbat”, ami pluszban még $\leq_t$-antimonoton is. Ennek a hasznát mindjárt látni fogjuk.)

Bizonyítás

Legyen $f = \langle f_1, f_2 \rangle : L^2 \to L^2$ approximációs függvény, $s = \langle s_1, s_2 \rangle : L^2 \to L^2$ pedig a stabilizációs függvénye, tehát $s(x,y) = (s_1(y), s_1(x))$, ahol $s_1(y) = \mu x.f_1(x,y)$.

Először is, s_1 antimonoton: ha $y_1 \leq y_2$, akkor tetszőleges x-re $(x, y_2) \leq_p (x, y_1)$, így – mivel f approximációs függvény, ezért f_1 $\leq_p$-monoton – $f_1(x, y_2) \leq f_1(x, y_1)$. Speciálisan ha $x = s_1(y_1)$, akkor s_1 definíciója szerint $x = f_1(x, y_1)$, tehát $f_1(x, y_2) \leq f_1(x, y_1) = x$, azaz x az $x \mapsto f_1(x, y_2)$ függvénynek egy prefixpontja. Tudjuk, hogy a legkisebb fixpont, $s_1(y_2)$ pedig s_1 definíciója szerint pedig a legkisebb prefixpontja, tehát $s_1(y_2) \leq s_1(y_1)$, és így s_1 tényleg antimonoton.

Másodszor, s szimmetrikus, hiszen $s(y,x) = (s_1(x), s_1(y))$, az argumentumokat felcserélve a függvényértékben is felcserélődnek a koordináták.

Harmadszor, s egy $\leq_p$-monoton függvény, hiszen ha $(x,y) \leq_p (x', y')$, akkor $x \leq x'$ és $y' \leq y$, alkalmazva s_1 antimonotonitását kapjuk, hogy $s_1(x') \leq s_1(x)$ és $s_1(y) \leq s_1(y')$, tehát $s(x,y) = (s_1(y), s_1(x)) \leq_p (s_1(y'), s_1(x')) = s(x', y')$. (Eddig tehát megvan az, hogy s approximációs függvény.)

Végül, s egy $\leq_t$-antimonoton függvény is, hiszen ha $(x,y) \leq_t (x', y')$ akkor $x \leq x'$ és $y \leq y'$, itt alkalmazva s_1 antimonotonitását kapjuk, hogy $s_1(x') \leq s_1(x)$ és $s_1(y') \leq s_1(y)$, tehát $s(x', y') = (s_1(y'), s_1(x')) \leq_t (s_1(y), s_1(x)) = s(x,y)$.

Amiért pedig a stabilizációs függvényt ,,jobb”nak hívjuk az eredeti approximációs függvénynél, annak az oka, hogy a stabilizációs függvény fixpontjai az eredeti függvény $\leq_t$-minimális fixpontjai lesznek (és így ,,minimalizáljuk az igazságértékeket”, ha ennek keressük a (mondjuk $\leq_p$-legkisebb) fixpontjait):

Állítás

Ha s az f stabilizációs függvénye, akkor s-nek minden fixpontja egyben az f-nek $\leq_t$-minimális fixpontja is.

Bizonyítás

Legyen (x,y) az s fixpontja: $(x,y) = s(x,y) = (s_1(y), s_1(x))$. Az s_1 definíciója szerint akkor $x = s_1(y)$-ból $x = f_1(x,y)$ és $y = s_1(x)$-ból $y = f_1(y,x)$-et kapjuk, azaz $(x,y) = (f_1(x,y), f_1(y,x)) = f(x,y)$. Tehát s fixpontja egyben f-nek is fixpontja.

Most megmutatjuk, hogy $\leq_t$-minimális. Legyen $(x', y') \leq_t (x,y)$ az f-nek egy fixpontja. Tehát $x' \leq x$ és $y' \leq y$, továbbá $f_1(x', y') = x'$ és $f_1(y', x') = y'$.

Akkor az f_1 $\leq_p$-monotonitásból kapjuk, hogy $f_1(y', x) \leq f_1(y', x') = y'$, tehát y' az $y' \mapsto f_1(y', x')$ függvénynek egy prefixpontja, az s_1 definíciója szerint pedig $s_1(x') = y$ a legkisebb (pre)fixpontja, így $y \leq y'$ is igaz, tehát $y' \leq y$ miatt $y = y'$.

Hasonlóan, $f_1(x', y) \leq f_1(x', y') = x'$ miatt x' az $x' \mapsto f_1(x', y)$ függvénynek egy prefixpontja, amik közül $x = s_1(y)$ a legkisebb, tehát $x = x'$. Tehát (x, y) tényleg $\leq_t$-minimális fixpontja az f-nek.

A stabilizációs függvény fixpontjait tehát azért szeretjük, mert fixpontjai az eredeti approximációs függvénynek is, és minimalizálják az igazságértéket is, el is nevezzük őket:

Definíció

Az f approximációs függvénynek azokat a fixpontjait, melyek a stabilizációs függvényének is fixpontjai, az f stabil fixpontjainak nevezzük.

Mivel pedig a stabilizációs függvény is egy approximációs függvény, így $\leq_p$-monoton és van neki $\leq_p$-re nézve egy legkisebb fixpontja. Ami ezek szerint az eredeti approximációs függvénynek a $\leq_p$ szerinti legkisebb stabil fixpontja. Ő lesz, akit keresünk!

Definíció

Egy f approximációs függvény jól megalapozott[a] fixpontja a $\leq_p$ szerinti legkisebb stabil fixpontja.

Jelölje őt $w(f)$.

[a] well-founded

Nyilván mivel ha f egy approximációs függvény, $k(f)$ a $\leq_p$ szerinti legkisebb fixpontja, $w(f)$ pedig a $\leq_p$ szerinti legkisebb stabil fixpontja, így $k(f) \leq_p w(f)$: a jól megalapozott fixpont „precízebb", „szűkebb" intervallumokat ad értékül, mint a Kripke-Kleene fixpont. Sőt, mivel az s stabilizációs függvény is approximációs függvény, és $w(f)$ ennek az s-nek a Kripke-Kleene fixpontja (azaz $w(f) = k(s)$), ami mindig konzisztens, így összefoglalva

Állítás

Egy f approximációs függvény jól megalapozott fixpontja mindig konzisztens, $\leq_t$-minimális, és legalább olyan precíz fixpontja f-nek, mint a Kripke-Kleene fixpontja.

Azt tehát már látjuk, hogy az Első Szabály teljesül a jól megalapozott fixpontra: minimalizálja az igazságértéket. Még azt is szeretnénk belátni, hogy közönséges logikai programokon ugyanaz a kanonikus és a jól megalapozott szemantika (ez volt a második problémánk a Kripke-Kleene szemantikával).

Egyúttal fény derül arra is, hogy miért hívjuk az szimmetrikus, $\leq_p$-monoton függvényeket épp „approximációs" függvénynek.

Definíció

Legyen $f = \langle f_1, f_2 \rangle : L^2 \to L^2$ approximációs függvény. Azt mondjuk, hogy az f függvény az $x \mapsto f_1(x, x)$, $L \to L$ függvénynek egy közelítése.

Vagyis, az f approximációs függvény, mely intervallumokhoz rendel intervallumokat, „közelít" egy olyan függvényt valamilyen értelemben, mely az eredeti hálón egy transzformáció. Nos, abban az értelemben „közelíti", hogy pontszerű intervallumokon a két függvény értéke ugyanaz (mármint, ha az $x \in L$ elemet azonosítjuk az $(x, x) \in L^2$ intervallummal):

Állítás

Ha az $f : L^2 \to L^2$ approximációs függvény a $g : L \to L$ függvény közelítése, akkor minden $x \in L$-re $f(x, x) = (g(x), g(x))$.

Így például (x, x) pontosan akkor fixpontja f-nek, ha x fixpontja g-nek.

Bizonyítás

$f(x, x) = (f_1(x, x), f_1(x, x)) = (g(x), g(x))$.

Továbbá, a stabil fixpontok, ha pontszerűek, akkor az eredeti függvénynek is „szép fixpontjai":

Állítás

Ha (x, x) az f approximációs függvénynek egy stabil fixpontja, és f a g közelítése, akkor x a g-nek egy minimális fixpontja.

Bizonyítás

Ha (x, x) az f-nek egy stabil fixpontja, akkor egyben $\leq_t$-minimális fixpontja is f-nek. Továbbá, mivel (x, x) fixpontja f-nek, így x fixpontja g-nek. Ha $y \leq x$ is fixpontja g-nek, akkor (y, y) is fixpontja f-nek; mivel $y \leq x$, így $(y, y) \leq_t (x, x)$, a $\leq_t$-minimalitás szerint tehát $(y, y) = (x, x)$, vagyis $y = x$ és x tényleg minimális fixpontja f-nek.

Kérdés, hogy a $\Psi_{\mathcal{P}}$ approximációs függvény vajon melyik függvénynek a közelítése? Mivel $\Psi_{\mathcal{P}}(u, v) = \langle f_{\mathcal{P}}(u, v), f_{\mathcal{P}}(v, u)\rangle$, így Ψ az $u \mapsto f_{\mathcal{P}}(u, u)$ függvényt (ami egy $\mathbf{2}^Z \to \mathbf{2}^Z$ függvény) közelíti. Lássuk azt az $f_{\mathcal{P}}$-t még egyszer:

$$f_{\mathcal{P}}(u, v)(r) := \bigvee_{p_1 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge \neg q_1 \wedge \ldots q_k \to r \in \mathcal{P}} u(p_1) \wedge \ldots \wedge u(p_n) \wedge \neg v(q_1) \wedge \ldots \wedge \neg v(q_k).$$

tehát a közelített függvény a

$$g_{\mathcal{P}}(u)(r) := \bigvee_{p_1 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge \neg q_1 \wedge \ldots q_k \to r \in \mathcal{P}} u(p_1) \wedge \ldots \wedge u(p_n) \wedge \neg u(q_1) \wedge \ldots \wedge \neg u(q_k),$$

ami pontosan az „új értékadás szerint akkor lesz egy változó igaz, ha a régi értékadás szerint van igaz törzse" függvény!

Tehát,

Negációmentes logikai programokon a $\Psi_{\mathcal{P}}$ függvény a $T_{\mathcal{P}}$ függvénynek a közelítése.

és ezért

Állítás

Negációmentes logikai programok jól megalapozott és kanonikus szemantikája megegyezik.

Bizonyítás

Negációmentes programokban mivel nincsenek negatív literálok, azt kapjuk, hogy $\Psi_{\mathcal{P}}(u,v) = \langle f_{\mathcal{P}}(u,v), f_{\mathcal{P}}(v,u)\rangle$, ahol

$$f_{\mathcal{P}}(u,v)(r) := \bigvee_{p_1\wedge\ldots\wedge p_n\to r\in\mathcal{P}} u(p_1)\wedge\ldots\wedge u(p_n).$$

Vagyis $f_{\mathcal{P}}(u,v)$ nem függ v-től, csak u-tól. Ha v-t töröljük az argumentumlistájából, és így egy $\mathbf{2}^Z\times\mathbf{2}^Z\to\mathbf{2}^Z$ helyett $\mathbf{2}^Z\to\mathbf{2}^Z$ függvényként kezeljük, akkor ez a függvény éppen $T_{\mathcal{P}}$! Ekkor a stabilizációs függvényéhez az $s_1(v)=\mu x.f_{\mathcal{P}}(u,v)$ képlet szerint („rögzítjük v-t, erre mi a legkisebb fixpont”) $s_1(v)$ értéke mindig a $T_{\mathcal{P}}$ függvény legkisebb fixpontja lesz, azaz s_1 konstans függvény, melynek értéke épp a program kanonikus szemantikája. Tehát ebben az esetben az $s(x,y)=(s_1(y),s_1(x))$ függvény is konstans, értéke szintén a program kanonikus szemantikája (azzal, hogy (x,x)-et mint pontszerű intervallumot x-szel azonosítjuk), így legkisebb fixpontja (azaz az egyetlen stabil fixpont) maga a kanonikus szemantika.

na most…

örülünk, Vincent?

örülünk.

Megadtuk általános logikai programoknak egy „jó” szemantikáját, mégpedig a jól megalapozott szemantikát, ami minimalizálja az igazságértéket, és kiterjeszti a kanonikus szemantikát.

Most pedig jöjjön valami egészen más.

Funkcionális programozási nyelvek szemantikája