# Logika gyakorlat – 02
# Következtetés, konjunktív normálforma (CNF)

**Recap:** Mod, $\vDash$

Emlékeztető a jelölésekről:

- $\mathrm{Mod}(F)$, ahol $F$ egy formula: az $F$ **modelljeinek a halmaza** (az összes olyan értékadás, ami mellett $F$ igaz)
- $\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}(F)$, ahol $\mathcal{A}$ egy értékadás, $F$ egy formula: az $\mathcal{A}$ az $F$-nek egy **modellje**, ugyanez még: $\mathcal{A} \vDash F$, $\mathcal{A}(F) = 1$
- az $F$ formula **tautológia**, ha minden $\mathcal{A}$ értékadás mellett igaz, jele: $\vDash F$
- $F \vDash G$, ahol $F$ és $G$ is formulák: az $F$-nek a $G$ egy **logikai következménye**, ami akkor teljesül, ha $\mathrm{Mod}(F) \subseteq \mathrm{Mod}(G)$ (azaz minden $\mathcal{A}$ értékadásra, melyre $\mathcal{A}(F) = 1$, igaz az is, hogy $\mathcal{A}(G) = 1$)
- $F \equiv G$, ahol $F$ és $G$ formulák: az $F$ és a $G$ formulák **ekvivalensek**, ami akkor teljesül, ha $\mathrm{Mod}(F) = \mathrm{Mod}(G)$ (azaz minden $\mathcal{A}$ értékadásra $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$)
- a fentiekben egy $F$ formula helyére írhatunk **formulahalmazt** is, melyeket általában $\Sigma, \Delta, \Gamma, \ldots$ fog jelölni a kurzuson
  - $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ szintén **értékadások egy halmaza**, $\Sigma$ modelljei vannak benne (az összes olyan $\mathcal{A}$ értékadás, melyek kielégítik $\Sigma$ **összes** elemét)
  - lényegében képzelhetjük úgy, mintha egy $\Sigma$ formulahalmaz a benne lévő formulák **éselése** lenne (amiért nem ezt csináljuk: ha $\Sigma$ végtelen, akkor végtelen sok formulát nem tudunk „összeéselni” úgy, hogy egy formulát kapjunk, mert a formulák végesek; azt viszont tudjuk mondani, hogy „emellett az $\mathcal{A}$ értékadás mellett az összes $\Sigma$-beli formula igaz”)
  - a többi jel és fogalom szemantikáját ebből kapjuk, pl. $\Sigma \vDash F$ akkor lesz igaz egy $\Sigma$ formulahalmazra és $F$ formulára, ha valahányszor $\mathcal{A}$ egy olyan értékadás, mely kielégíti $\Sigma$ összes elemét, mindannyiszor $\mathcal{A}$ kielégíti $F$-et is

Nézzünk néhány feladatot, hogy biztosan értjük-e ezeket a fogalmakat.

**1. feladat.**

Igaz-e, hogy $\{p, p \to q\} \vDash q$?

**2. feladat.**

Igaz-e, hogy $p \vee q \vDash \{p, q\}$?

**3. feladat.**

Mikor igaz egy $F$ formulára, hogy $F \vDash \downarrow$?

**4. feladat.**

Mikor igaz egy $F$ formulára, hogy $F \vDash \uparrow$?

**5. feladat.**

Mikor igaz egy $F$ formulára, hogy $\downarrow \vDash F$?

**6. feladat.**

Mikor igaz egy $F$ formulára, hogy $\uparrow \vDash F$?

**Recap: Az indirekt bizonyítás**

Tetszőleges $\Sigma$ formulahalmazra és $F$ formulára igaz, hogy

$$\Sigma \vDash F \quad \Leftrightarrow \quad \Sigma \cup \{\neg F\} \vDash \downarrow.$$

Pl. láttuk, hogy $\{\ p,\ p \to q\ \} \vDash q$, és ugyanígy igaz az is, hogy $\{\ p,\ p \to q,\ \neg q\} \vDash \downarrow$ (azaz, hogy a $\{\ p,\ p \to q,\ \neg q\}$ formulahalmaz kielégíthetetlen).

Ezt az összefüggést tudjuk használni, ha olyan „következtető motorunk” van, ami annyira képes, hogy megállapítsa egy input formulahalmazról annak kielégíthetetlenségét, és mi logikai következtetést szeretnénk használni: ha azt akarjuk belátni, hogy a $\Sigma$ axiómahalmazból következik az $F$ formula, akkor negáljuk $F$-et, hozzávesszük $\Sigma$ elemeihez pluszban, és erre az inputra futtatjuk a kielégíthetetlenséget ellenőrző motort.

A következtető motoraink rendszerint valamilyen „normálformákon” fognak dolgozni (hogy az algoritmusnak már ne kelljen azzal foglalkoznia egy nagy „`switch`”ben, hogy az aktuális formula, amivel dolgozik, az épp egy vagyolás, éselés, implikáció vagy micsoda). A leggyakrabban a CNF-et, konjunktív normálformát fogjuk használni:

**Recap: Konjunktív normálforma, CNF**

- egy **literál**: egy változó, vagy egy negált változó (pl. $p$, $\neg p$, $\neg q$ literálok, az első egy **pozitív**, a második kettő egy-egy **negatív** literál)
- egy **klóz**: literálok vagyolása (véges soké) (pl. $p \vee q$, $p \vee \neg q$, $\neg p \vee q \vee \neg r$) klózok
- egy **CNF**: klózok éselése (véges soké) (pl. $(p \vee q) \ \wedge\ (p \vee \neg q)\ \wedge\ (\neg p \vee q \vee \neg r)$ egy CNF)

Azért is hívjuk „normálformának”, mert minden formula vele ekvivalens CNF-re hozható. Ennek az algoritmusnak a lépései (a sorrend fontos, ha felcserélünk lépéseket, az eredmény nem biztos, hogy CNF-ben lesz!):

1. A $\to$ és $\leftrightarrow$ jelek eliminálása a formulából a következő ekvivalenciákkal:

$$F \to G \equiv \neg F \vee G \qquad\qquad F \leftrightarrow G \equiv (\neg F \vee G) \wedge (F \vee \neg G)$$

2. A $\neg$ jelek bevitele a változók mellé a deMorgan azonosságokkal:

$$\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G \qquad\qquad \neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G \qquad\qquad \neg\neg F \equiv F$$

3. Végül a „rossz sorrendben lévő” $\wedge$ és $\vee$ jelek helycseréje a disztributivitás alkalmazásával:

$$F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H) \qquad (F \wedge G) \vee H \equiv (F \vee H) \wedge (G \vee H)$$

   Ezt a lépést általában úgy alkalmazzuk, hogy két CNF vagyolásából akarunk egyetlen, ekvivalens CNF-et készíteni:

$$(C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_n) \;\vee\; (D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_k)$$
$$\equiv$$
$$(C_1 \vee D_1) \wedge (C_1 \vee D_2) \wedge \ldots \wedge (C_i \vee D_j) \wedge \ldots \wedge (C_n \vee D_k),$$

   azaz ahányféleképp csak lehet, veszünk egy klózt a bal és egyet a jobb oldali CNF-ből, az eredményként kapott formulába pedig betesszük ennek a két klóznak a vagyolását (ami szintén egy klóz lesz).

**7. feladat.**

Hozzuk CNF-re a következő formulát:

$$\Big(\neg(p \wedge q) \;\wedge\; \big((p \wedge \neg r) \to q\big)\Big)$$

**8. feladat.**

Hozzuk CNF-re a következő formulát:

$$\Big((r \wedge \neg q) \;\vee\; \neg(\neg p \vee \neg s)\Big) \;\wedge\; (\neg p \to \neg q) \;\wedge\; \neg(\neg r \vee \neg s)$$

**9. feladat.**

Hozzuk CNF-re a következő formulát:

$$\Big(\big((q \to p) \vee s\big) \;\to\; \big((p \vee q) \wedge \neg r\big)\Big) \;\to\; \neg\big((r \to q) \wedge \neg s\big)$$

**1. feladat megoldása.**

Igaz: ha $\mathcal{A}$ egy értékadás, melyre $\mathcal{A}(p) = 1$ és $\mathcal{A}(p \to q) = 1$, akkor mivel $1 = \mathcal{A}(p \to q) = \mathcal{A}(p) \to \mathcal{A}(q) = 1 \to \mathcal{A}(q)$, a $\to$ függvény definíciója szerint ez csak akkor teljesül, ha $\mathcal{A}(q) = 1$, tehát ekkor $\mathcal{A}$ tényleg modellje a jobb oldalon álló formulának is.

---

**2. feladat megoldása.**

Ez **nem igaz**. Azt, hogy egy logikai következmény **nem** áll fenn, úgy tudjuk megmutatni, hogy mutatunk egy $\mathcal{A}$ értékadást, ami **a bal oldalnak modellje, de a jobb oldalnak nem**. Pl most az a $\mathcal{A}$, amelyre $\mathcal{A}(p) = 1$ és $\mathcal{A}(q) = 0$, modellje a bal oldalnak, hiszen $\mathcal{A}(p \vee q) = 1 \vee 0 = 1$, de a jobb oldalnak nem, mert $\{p, q\}$-ban van olyan formula, aminek $\mathcal{A}$ nem modellje (konkrétan a $q$).

---

**3. feladat megoldása.**

Tudjuk, hogy minden $\mathcal{A}$ értékadásra $\mathcal{A}(\downarrow) = 0$, ezért $\mathrm{Mod}(\downarrow) = \emptyset$ (ez az üres halmaz jele), hiszen nincs egyetlen értékadás sem, mely modellje lenne $\downarrow$-nak.

Akkor mivel $F \vDash \downarrow$ definíció szerint akkor áll fenn, ha $\mathrm{Mod}(F) \subseteq \mathrm{Mod}(\downarrow)$, azt kapjuk, hogy $\mathrm{Mod}(F) \subseteq \emptyset$ (azaz $\mathrm{Mod}(F)$ részhalmaza az üres halmaznak).

Az üres halmaznak csak egyetlen részhalmaza van, önmaga: így ez azt jelenti, hogy $\mathrm{Mod}(F) = \emptyset$, vagyis azt, hogy $F$ **kielégíthetetlen**.

---

**4. feladat megoldása.**

Tudjuk, hogy minden $\mathcal{A}$ értékadásra $\mathcal{A}(\uparrow) = 1$, azaz $\mathrm{Mod}(\uparrow)$ tartalmazza az összes értékadást, ő maga az összes értékadás halmaza.

Akkor mivel $F \vDash \uparrow$ definíció szerint akkor áll fenn, ha $\mathrm{Mod}(F) \subseteq \mathrm{Mod}(\uparrow)$, azt kapjuk, hogy $\mathrm{Mod}(F)$ részhalmaza az összes értékadás halmazának, másképp mondva, azt kapjuk, hogy $\mathrm{Mod}(F)$-ben értékadások vannak.

Ez **minden $F$-re igaz** ($\mathrm{Mod}(F)$ mindig értékadásoknak egy halmaza).

---

**5. feladat megoldása.**

Itt abból, hogy $\mathrm{Mod}(\downarrow) = \emptyset$ és hogy $\downarrow \ \vDash \ F$ azt jelenti, hogy $\mathrm{Mod}(\downarrow) \subseteq \mathrm{Mod}(F)$, azt kapjuk, hogy ez annyit jelent, hogy $\emptyset \subseteq \mathrm{Mod}(F)$.

Mivel az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza, ez ismét csak **minden $F$-re igaz lesz**.

---

**6. feladat megoldása.**

Itt abból, hogy $\mathrm{Mod}(\uparrow)$ az összes értékadás halmaza és hogy $\uparrow \ \vDash \ F$ definíció szerint azt jelenti, hogy $\mathrm{Mod}(\uparrow) \subseteq \mathrm{Mod}(F)$, azt kapjuk, hogy az összes értékadás halmaza részhalmaza $\mathrm{Mod}(F)$-nek.

Persze mivel $\mathrm{Mod}(F)$ elemei mindig értékadások, ez azt jelenti, hogy $\mathrm{Mod}(F)$ maga is pontosan az összes értékadás halmaza, azaz $F$ **tautológia**.

---

**7. feladat megoldása.**

Input:

$$\Big(\neg(p \wedge q) \ \wedge \ \big((p \wedge \neg r) \to q\big)\Big)$$

1. A formulában egy nyíl szerepel. Itt annyi a dolgunk, hogy a $\to$ nyilat átírjuk $\vee$-ra, és a nyíl bal oldalát (most $(p \wedge \neg r)$) negáljuk. Amit eddig kaptunk (updatelt részek pirossal):

$$\Big(\neg(p \wedge q) \ \wedge \ \big(\neg(p \wedge \neg r) \vee q\big)\Big)$$

2. Két negálás van rossz pozícióban (azaz „nem változó mellett egyből”). Itt annyi a dolgunk, hogy megnézzük, mi a negálás alatti „legkülső” művelet (most mindkettő alatt egy-egy éselés van), azok milyen formulákon lettek alkalmazva (most az első egy $p$-n és egy $q$-n, a második pedig egy $p$-n és egy $\neg r$-en) és a megfelelő deMorgan azonosság szerint írjuk át (dupla negálást törlünk, egyébként a legkülső jelet megfordítjuk, és a két oldalán átváltjuk a negálást):

$$\Big((\neg p \vee \neg q) \ \wedge \ \big((\neg p \vee r) \vee q\big)\Big)$$

(Aki úgy szereti, a $\neg r$-ből készíthet persze $\neg\neg r$-t is, majd eztán törölheti a dupla negálást.)

Itt egy lépésben sikerült is bevinni minden negálást a változók mellé és mehetünk tovább, ez nem mindig lesz így.

3. A disztributivitás alkalmazásánál érdemes lehet bejelölni magunknak, hogy melyik szakaszokon vannak klózok (akár úgy, hogy mondjuk aláhúzva bejelöljük a literálokat, és amíg két aláhúzás közt vagyolást látunk, addig egyben húzzuk alá őket, ez most: )

$$\Big(\underline{(\neg p \vee \neg q)} \ \wedge \ \big(\underline{(\neg p \vee r) \vee q}\big)\Big)$$

ezek után a már valid CNF részeket pl. megkaphatjuk úgy, hogy (még egyszer) aláhúzzuk a klózokat, majd amíg két „alsó” aláhúzás között éselést látunk, addig egyben húzzuk alá őket, ez most:

$$\Big(\underline{\underline{(\neg p \vee \neg q)} \;\wedge\; \Big(\underline{(\neg p \vee r) \vee q}\Big)}\Big)$$

Tehát ez a formulánk már CNF, nem kell rajta disztributivitást alkalmazni. Elhagyva pár fölös zárójelet:

$$(\neg p \vee \neg q) \;\wedge\; (\neg p \vee r \vee q)$$

---

**8. feladat megoldása.**

Input:

$$\Big((r \wedge \neg q) \;\vee\; \neg(\neg p \vee \neg s)\Big) \;\wedge\; (\neg p \to \neg q) \;\wedge\; \neg(\neg r \vee \neg s)$$

1. Ebben is csak egy nyilat látunk. Átírjuk vagyolásra, a bal oldalán (ami most $\neg p$) átváltjuk a negálást:

   $$\Big((r \wedge \neg q) \;\vee\; \neg(\neg p \vee \neg s)\Big) \;\wedge\; ({\color{red}p \vee} \neg q) \;\wedge\; \neg(\neg r \vee \neg s)$$

2. Két negálás van rossz helyen, ezúttal mindkettő vagyolásokra vonatkozik. Megfordítjuk az alattuk lévő egy-egy jelet, és annak a jelnek a két oldalán váltjuk a negálást:

   $$\Big((r \wedge \neg q) \;\vee\; ({\color{red}p \wedge s})\Big) \;\wedge\; (p \vee \neg q) \;\wedge\; ({\color{red}r \wedge s})$$

   Megint minden negálás közvetlenül változó mellé került egyből, mehetünk tovább.

3. Bejelöljük a klózokat:

   $$\Big((\underline{r} \wedge \underline{\neg q}) \;\vee\; (\underline{p} \wedge \underline{s})\Big) \;\wedge\; (\underline{p \vee \neg q}) \;\wedge\; (\underline{r} \wedge \underline{s})$$

   (itt azért nem tudtuk az aláhúzásokat „tovább terjeszteni”, mert már nincs olyan rész, ahol két „aláhúzott” formula közvetlenül egy vagyolással lenne összekötve.)

   Bejelöljük most a CNF-eket:

   $$\Big(\underline{(\underline{r} \wedge \underline{\neg q})} \;\vee\; \underline{(\underline{p} \wedge \underline{s})}\Big) \;\wedge\; \underline{(\underline{p \vee \neg q}) \;\wedge\; (\underline{r} \wedge \underline{s})}$$

   Tehát most a formulánk „kintről nézve” CNF szintig: „(CNF vagy CNF) és CNF” alakú. Itt a két vagyolt CNF-en alkalmaznunk kell a disztributivitást. Most a két összevagyolt CNF-nek mindkettőnek két-két klóza van, tehát annak a résznek $2 \times 2 = 4$ klóza lesz, amikor disztributivitással egyetlen CNF-et kapunk belőle; ahányféleképp lehet, ennek a két CNF-nek a klózaiból veszünk egyet-egyet, és összevagyoljuk őket, az így kapott klózokat összeéseljük, így abból a részből biztosan CNF-et kapunk:

   $$\Big(\underline{(\underline{r \vee p}) \wedge (\underline{r \vee s}) \wedge (\underline{\neg q \vee p}) \wedge (\underline{\neg q \vee s})}\Big) \;\wedge\; \underline{(\underline{p \vee \neg q}) \;\wedge\; (\underline{r} \wedge \underline{s})}$$

   Azt látjuk, hogy most már „CNF és CNF” alakú, tehát az egész egy CNF, ez a vége:

   $$\underline{(\underline{r \vee p}) \wedge (\underline{r \vee s}) \wedge (\underline{\neg q \vee p}) \wedge (\underline{\neg q \vee s}) \;\wedge\; (\underline{p \vee \neg q}) \;\wedge\; (\underline{r} \wedge \underline{s})}$$

## 9. feladat megoldása.

Input:

$$\Big(\big((q \to p) \vee s\big) \;\to\; \big((p \vee q) \wedge \neg r\big)\Big) \;\to\; \neg\big((r \to q) \wedge \neg s\big)$$

1. Négy nyilat látunk a formulában (nincs $\leftrightarrow$), itt továbbra is csak annyi a dolgunk, hogy helyettük $\vee$ kerüljön be, a bal oldalukon pedig átváltsuk a negálást:

   $$\color{green}{\neg}\Big(\color{blue}{\neg}\big((\color{red}{\neg} q \color{red}{\vee} p) \vee s\big) \;\color{blue}{\vee}\; \big((p \vee q) \wedge \neg r\big)\Big) \;\color{green}{\vee}\; \neg\big((\color{red}{\neg} r \color{red}{\vee} q) \wedge \neg s\big)$$

   (Itt a zárójelek mérete segíthet abban, hogy megtaláljuk, hol is van a nyíl bal oldala, sima ascii input esetén számolgatnunk kell.)

2. Három negálás van rossz helyen. Nézzük meg (színekkel), hogy melyik mire vonatkozik közvetlenül:

   $$\color{red}{\neg}\Big(\color{green}{\neg}\big((\neg q \vee p) \color{green}{\vee} s\big) \;\color{red}{\vee}\; \big((p \vee q) \wedge \neg r\big)\Big) \;\vee\; \color{blue}{\neg}\big((\neg r \vee q) \color{blue}{\wedge} \neg s\big)$$

   Azt látjuk, hogy a **piros** negálás hatáskörében benne van a **zöld**. Ilyenkor érdemes lehet csak azokra a negálásokra alkalmazni a deMorgan azonosságokat, melyek nincsenek másiknak a hatáskörében (hátha kiütik egymást, ahogy a külső „lefelé” halad), azaz most csak a pirosat és a kéket írjuk át, mert őket nem tartalmazza nagyobb negálás:

   $$\Big(\color{red}{\neg}\color{green}{\neg}\big((\neg q \vee p) \color{green}{\vee} s\big) \;\color{red}{\wedge}\; \color{red}{\neg}\big((p \vee q) \wedge \neg r\big)\Big) \;\vee\; \big(\color{blue}{\neg}(\neg r \vee q) \color{blue}{\vee} \color{blue}{\neg}\neg s\big)$$

   Most csak azért írtuk ki a dupla negálásokat, hogy látsszon: a piros tényleg kiüti a zöldet. Most a formulánk, jelölve benne a még rossz helyen lévő negálásokat azzal együtt, hogy ők mire vonatkoznak közvetlenül, és törölve a duplákat:

   $$\Big(\big((\neg q \vee p) \vee s\big) \;\wedge\; \color{red}{\neg}\big((p \vee q) \color{red}{\wedge} \neg r\big)\Big) \;\vee\; \big(\color{blue}{\neg}(\neg r \color{blue}{\vee} q) \vee s\big)$$

   Mindketten „felső szintű” negálások, akiket már nem tartalmaz másik negálás, így mindkettőt át is írjuk:

   $$\Big(\big((\neg q \vee p) \vee s\big) \;\wedge\; \big(\color{red}{\neg}(p \vee q) \color{red}{\vee} \color{red}{\mathbf{r}}\big)\Big) \;\vee\; \big((\color{blue}{\mathbf{r}} \color{blue}{\wedge} \neg q) \vee s\big)$$

   Most már csak a pirosat kell eggyel lejjebb vinnünk és ez a fázis kész, az eredmény:

   $$\Big(\big((\neg q \vee p) \vee s\big) \;\wedge\; \big((\color{red}{\neg} p \color{red}{\wedge} \color{red}{\neg} q) \vee r\big)\Big) \;\vee\; \big((r \wedge \neg q) \vee s\big)$$

3. Húzzuk alá a klózokat (kiindulunk a literálokból, és amíg két egyben aláhúzott rész van összevagyolva, addig egybe húzzuk alá őket:)

   $$\Big(\underline{\big((\neg q \vee p) \vee s\big)} \;\wedge\; \big((\underline{\neg p} \wedge \underline{\neg q}) \vee \underline{r}\big)\Big) \;\vee\; \big((\underline{r} \wedge \underline{\neg q}) \vee \underline{s}\big)$$

   Jelöljük be a CNF-eket is:

   $$\Big(\underline{\underline{\big((\neg q \vee p) \vee s\big)}} \;\wedge\; \big(\underline{(\underline{\neg p} \wedge \underline{\neg q})} \vee \underline{\underline{r}}\big)\Big) \;\vee\; \big(\underline{(\underline{r} \wedge \underline{\neg q})} \vee \underline{\underline{s}}\big)$$

   Tehát most egy „(CNF és (CNF vagy CNF)) vagy (CNF vagy CNF)” alakú a formulánk „kintről nézve”. Két „CNF vagy CNF” alakú részt látunk benne, ezeken (mindig a legbelsőkön) érdemes alkalmazni a disztributivitást. Ezek most a következő részformulák:

- $(\neg p \wedge \neg q) \vee r$: a bal oldali CNF két klózos, a jobb oldali egy klózos, ezen alkalmazva a disztributivitást az eredményben $2 \times 1 = 2$ klózt fogunk kapni: $(\neg p \vee r) \ \wedge \ (\neg q \vee r)$
- $(r \wedge \neg q) \vee s$: ez is $2 \times 1 = 2$ klózos lesz: $(r \vee s) \ \wedge \ (\neg q \vee s)$

Ezeket beírva az eredeti „CNF vagy CNF” részek helyére:

$$\Big(\underline{\big(\underline{(\neg q \vee p) \vee s}\big) \wedge \big(\underline{(\neg p \vee r)} \ \wedge \ \underline{(\neg q \vee r)}\big)}\Big) \vee \Big(\underline{\underline{(r \vee s)} \ \wedge \ \underline{(\neg q \vee s)}}\Big)$$

Azt láttuk, hogy most már „(CNF és CNF) vagy CNF” alakú lett a formulánk, de a „CNF és CNF” rész összeolvad egyetlen CNF-fé, és így most végül is két CNF-ünk van vagyolva összesen, az első 3, a második 2 klózt tartalmaz, így a végeredményünkben $3 \times 2 = 6$ klóz lesz, őket most soronként írjuk ki, hogy látsszon, mi melyik két klóznak a vagyolása, egyben a fölös zárójeleket is elhagyjuk:

$$\begin{aligned}
&(\neg q \vee p \vee s \vee r \vee s) \\
\wedge\ &(\neg q \vee p \vee s \vee \neg q \vee s) \\
\wedge\ &(\neg p \vee r \vee r \vee s) \\
\wedge\ &(\neg p \vee r \vee \neg q \vee s) \\
\wedge\ &(\neg q \vee r \vee r \vee s) \\
\wedge\ &(\neg q \vee r \vee \neg q \vee s).
\end{aligned}$$

**Ez is egy teljesen jó végeredmény.** Persze lehet egyszerűsíteni, hiszen a vagyolás tulajdonságai (kommutativitás, asszociativitás, idempotencia) miatt egy klózban ha egy literál többször is előfordul, elég egyszer leírjuk – ha ezt az egyszerűsítést is alkalmazzuk, minden literálnak elhagyva a többedik előfordulását egy klózon belül:

$$\begin{aligned}
&(\neg q \vee p \vee s \vee r) \\
\wedge\ &(\neg q \vee p \vee s) \\
\wedge\ &(\neg p \vee r \vee s) \\
\wedge\ &(\neg p \vee r \vee \neg q \vee s) \\
\wedge\ &(\neg q \vee r \vee s) \\
\wedge\ &(\neg q \vee r \vee s).
\end{aligned}$$

Hasonló okokból az ismétlődő klózokat többedik ismétlődését is elhagyhatjuk (tehát pl. az utolsót, hiszen ugyanaz most már, mint az utolsó előtti) és még más egyszerűsítéseket is végezhetünk, de ez majd a **rezolúciós algoritmus**nál részletesebben előjön majd.