Logika gyakorlat – 03
Rezolúció

Recap: Rezolúciós algoritmus

- **Input:** egy Σ CNF, halmazos reprezentációban (egy klózt a benne lévő literálok halmazaként, az egész CNF-et az őt alkotó klózok halmazaként írjuk fel)
- **Output:** kielégíthetetlen-e?
- **Módszer:**
  - Listát vezetünk klózokról. Egy C klózt felvehetünk, ha:
    - C eleme az input Σ-nak, **vagy**
    - C két, a listán már szereplő klóz **rezolvense**:
      ha $p \in C_1$ és $\neg p \in C_2$, akkor az ő p menti rezolvensük
      $$(C_1 - \{p\}) \ \cup \ (C_2 - \{\neg p\})$$
  - Ha az üres klóz (jele $\square$) rákerül a listára, akkor **Σ kielégíthetetlen**
  - Ha nem tudunk új klózt felvenni a listára, és nincs köztük $\square$, akkor **Σ kielégíthető**

1. feladat.

Igazoljuk rezolúcióval, hogy kielégíthetetlen:

$$\Big(\big((p \to q) \wedge \neg q\big) \vee \big((r \to \neg p) \wedge r\big)\Big) \ \wedge \ s \ \wedge \ (s \to p)$$

Recap: Rezolúcióval következtetés

Mivel $\Sigma \vDash F$ pont akkor igaz, ha $\Sigma \cup \{\neg F\} \vDash \downarrow$, ezért rezolúcióval logikai következményt is tudunk igazolni:

- **Input:** formulák egy Σ halmaza és egy F formula
- **Output:** igaz-e, hogy $\Sigma \vDash F$?
- **Módszer:**
  - CNF-re hozzuk Σ összes elemét és $\neg F$-et is. Az összes megkapott klóz halmazát jelölje Σ'.
  - Hajtsuk végre Σ'-n a rezolúciós algoritmust. Ha Σ' kielégíthetetlen, akkor $\Sigma \vDash F$, különben $\Sigma \nvDash F$.

2. feladat.

Igazoljuk rezolúcióval, hogy

$$\{\ s,\ (p \vee s) \to (p \wedge r)\ \}\ \vDash\ p \wedge (q \to q)$$

Gyakorlás céljára további rezolválós következtetős feladatot pl. itt találunk.

1. feladat megoldása.

Először CNF-re hozzuk az input formulánkat:

- nyilak eliminálása után:

$$\Big(\big((\neg p \lor q) \land \neg q\big) \lor \big((\neg r \lor \neg p) \land r\big)\Big) \;\land\; s \;\land\; (\neg s \lor p)$$

- NNF: már eleve azt kaptunk, OK
- Disztributivitás:
  - a nagy zárójelben két, egyenként kétklózos CNF van vagyolva. Itt alkalmazzuk a disztributivitást és kapjuk:

$$\begin{aligned}&\Big(\big((\neg p \lor q) \land \neg q\big) \lor \big((\neg r \lor \neg p) \land r\big)\Big) \;\land\; s \;\land\; (\neg s \lor p)\\ \equiv\, &\Big((\neg p \lor q \lor \neg r \lor \neg p) \land (\neg p \lor q \lor r) \land (\neg q \lor \neg r \lor \neg p) \land (\neg q \lor r)\Big) \;\land\; s \;\land\; (\neg s \lor p)\end{aligned}$$

    Ez már egy (hat klózból álló) CNF, most már kezdhetjük a rezolúciót.

A klózok a halmazos reprezentációban:

$$\Big\{\ \{\neg p, q, \neg r\ \},\ \{\neg p, q, r\},\ \{\neg p, \neg q, \neg r\},\ \{\neg q, r\},\ \{s\},\ \{p, \neg s\}\ \Big\}$$

(Általában ebben a reprezentációban megpróbáljuk pl. ábécébe rakni a literálokat a klózokon belül. Ha egy literál ismétlődik egy klózban még a formula alakban, a halmazba akkor is csak „egyszer kerül bele”.)

Indíthatjuk a rezolúciós levezetést, ezt rengeteg módon megtehetjük, egy lehetséges lefutás:

Észrevesszük, hogy az első és a második Σ-beli klóz összesen r-en különbözik, ilyenkor rendszerint jó ötlet rezolválni őket:

1. $\{\neg p, q, \neg r\}$ $\in \Sigma$
2. $\{\neg p, q, r\}$ $\in \Sigma$
3. $\{\neg p, q\}$ $\mathrm{Res}(1,2)$

(az 1-ben szerepelt $\neg r$, a 2-ben pedig r, tehát lehet őket rezolválni, a rezolvensük: elsőből kivesszük $\neg r$-t, kapjuk a $\{\neg p, q\}$ klózt, másodikból kivesszük r-t, kapjuk a $\{\neg p, q\}$ klózt, a kettő uniója még mindig a $\{p, q\}$ klóz lesz, ez a rezolvens)

Ha már megkaptuk ezt a $\{\neg p, q\}$ klózt, megpróbálhatunk ezzel továbbmenni, keresünk olyan klózt, melyben vagy p, vagy $\neg q$ szerepel. Megtalálhatjuk például a Σ utolsó klózát:

4. $\{p, \neg s\}$ $\in \Sigma$
5. $\{q, \neg s\}$ $\mathrm{Res}(3,4)$

(a 3-ban szerepelt $\neg p$, a 4-ben p, kivesszük $\neg p$-t 3-ból, marad $\{q\}$, kivesszük p-t 4-ből, marad $\{\neg s\}$, a kettőnek az uniója $\{q, \neg s\}$, ez a rezolvensük)

Ha ezzel a klózzal szeretnénk tovább haladni, akkor keresnünk kell egy olyat, melyben vagy $\neg q$, vagy s szerepel. Megtalálhatjuk pl. a $\{\neg q, r\}$ klózt:

6.	$\{\neg q, r\}$	$\in \Sigma$
7.	$\{r, \neg s\}$	$\mathrm{Res}(5,6)$

Ha most pl. az $\{s\}$ klózzal haladnánk tovább:

8.	$\{s\}$	$\in \Sigma$
9.	$\{r\}$	$\mathrm{Res}(7,8)$

Itt azt látjuk, hogy amikor egységklózzal rezolválunk, akkor tulajdonképpen „kiütjük” az egységklóz-beli változót a másik klózból. Ezt a legtöbbször érdemes is megtenni: egy rezolúciós heurisztika lehet, hogy **amikor csak lehet, rezolváljunk egységklózzal**. (Nem feltétlen kapjuk meg így a legrövidebb levezetést, de sokszor jó ez a módszer.)

Látszik, hogy menet közben egyre több klózunk lesz a listán, akikkel egyre „nehezebb” összenézni, hogy kit kivel lehet érdemes rezolválni. Erre alkalmazhatjuk a következő „pruning” módszereket, amivel a munkahalmazunkból kidobhatunk klózokat:

- Ha van egy C és egy D „aktív” klózunk a listánkon vagy Σ-ban úgy, hogy $C \subsetneq D$ (azaz C valódi részhalmaza D-nek), akkor D-t (a nagyobbat) „deaktiválhatjuk”: a listán ugyan rajta marad, de ekkor D-vel **ne rezolváljunk többet**
- Ha van olyan ℓ literál, ami minden, még aktív klózunkban ugyanazzal az előjellel szerepel („pure”), akkor **deaktiváljuk az összes klózt, amiben ℓ szerepel** (kb. azért, mert a bennük lévő ℓ-t úgyse fogjuk tudni „kiütni”, ezért belőlük már sehogy nem tudjuk levezetni az üres klózt)

Most pl.

- a 3. klóz valódi részhalmaza 1.-nek és 2.-nek is $\Rightarrow$ 1-et és 2-t deaktiváljuk, nem használjuk őket többet;
- a 9. klóz valódi részhalmaza a 7. klóznak $\Rightarrow$ deaktiváljuk a 7-est

Ha követjük a „rezolváljunk egységklózzal”heurisztikát, akkor most 8 is és 9 is egységklóz. 8-cal tudjuk rezolválni a 4-es és 5-ös klózt, tegyük meg:

10.	$\{p\}$	$\mathrm{Res}(4,8)$
11.	$\{q\}$	$\mathrm{Res}(5,8)$

Most már van négy egységklózunk, akik deaktiválnak minden klózt a listán is és az input Σ-ban is, kivéve a $\{\neg p, \neg q, \neg r\}$ klózt (mert az összes többinek a négy közül legalább az egyik valódi részhalmaza), rezolváljuk velük végig ezt a klózt:

12.	$\{\neg p, \neg q, \neg r\}$	$\in \Sigma$
13.	$\{\neg q, \neg r\}$	$\mathrm{Res}(10,12)$
14.	$\{\neg r\}$	$\mathrm{Res}(11,13)$
15.	$\square$	$\mathrm{Res}(9,14)$

Mivel pedig kijött az üres klóz (amit úgy is írunk, hogy $\square \in \mathbf{Res}^*(\Sigma)$), ezért az input Σ valóban kielégíthetetlen.

Megjegyzés.

Egyszerre több literál mentén rezolválni **tilos**, mert ha csinálnánk, akkor olyan formulákról is kijönne, hogy kielégíthetetlen, amik valójában nem azok!

2. feladat megoldása.

Először CNF-re hozzuk a bal oldal összes formuláját, és a jobb oldal **negáltját** is. A klózok, melyeket kapunk:

- s-ből $\{s\}$
- $(p \vee s) \rightarrow (p \wedge r)$-ből:
  - nyilak nélkül: $\neg(p \vee s) \vee (p \wedge r)$
  - NNF: $(\neg p \wedge \neg s) \vee (p \wedge r)$
  - CNF: $(\neg p \vee p) \;\wedge\; (\neg p \vee r) \;\wedge\; (\neg s \vee p) \;\wedge\; (\neg s \vee r)$

  Klózok: $\{\neg p, p\}$, $\{\neg p, r\}$, $\{p, \neg s\}$, $\{r, \neg s\}$.

  Ezek közül $\{\neg p, p\}$ **triviális klóz**, mert van olyan változó (a p), mely benne pozitívan is és negatívan is előfordul. **Az ilyen klózokat megjelenésükkor azonnal deaktiválhatjuk**, nem érdemes őket sem levezetni, sem felvenni Σ-ból.
- $\neg(p \wedge (q \rightarrow q))$-ból:
  - NNF: $(\neg p \vee \neg(\neg q \vee q)) \;\equiv\; \neg p \vee (q \wedge \neg q)$
  - CNF: $(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

  Klózok: $\{\neg p, q\}$, $\{\neg p, \neg q\}$.

Tehát a rezolúciót a következő klózhalmazzal indítjuk (legyen mondjuk ez a Σ):

$$\{\ \{s\},\ \{\neg p, r\},\ \{p, \neg s\},\ \{r, \neg s\},\ \{\neg p, q\},\ \{\neg p, \neg q\}\}$$

(A $\{p, \neg p\}$ klózt a második formulából már el is dobtuk.)

Első lépésben érdemes észrevenni, hogy **most r egy pure literál** (r van, $\neg r$ nincs), tehát a $\{\neg p, r\}$ és a $\{r, \neg s\}$ klózokat azonnal deaktiválhatjuk, nem fogjuk használni őket. Így mindjárt csak négy klózunk marad, amik közül az egyik egységklóz, kezdjük vele:

1. $\{s\}$ $\quad \in \Sigma$
2. $\{p, \neg s\}$ $\quad \in \Sigma$
3. $\{p\}$ $\quad \mathrm{Res}(1, 2)$

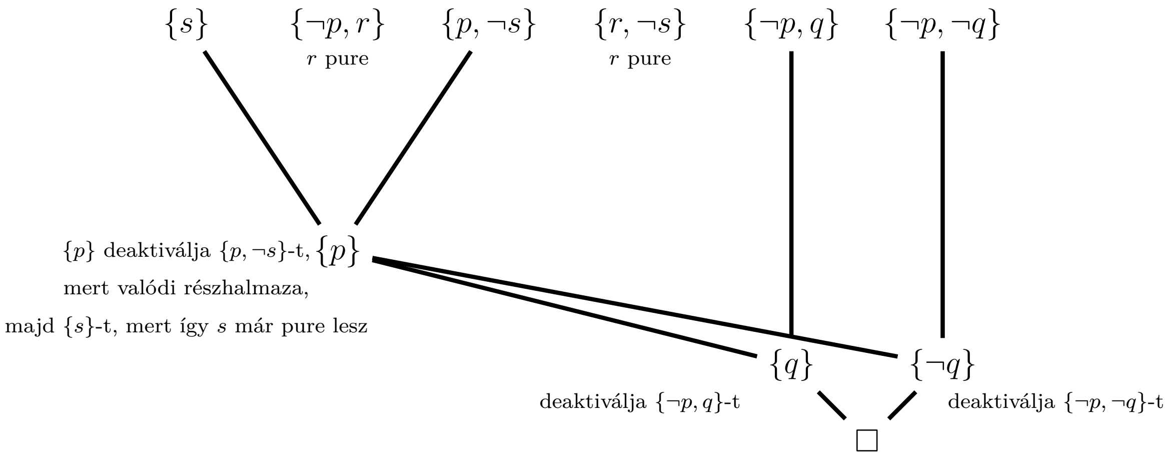
Ezen a ponton deaktiválhatjuk a $\{p, \neg s\}$ klózt, mert a most kapott $\{p\}$ klóz neki egy valódi részhalmaza.

Folytathatjuk mondjuk a p-vel a rezolválást, ahol csak $\neg p$-t találunk a még aktív klózok közt:

4. $\{\neg p, q\}$ $\quad \in \Sigma$
5. $\{q\}$ $\quad \mathrm{Res}(3, 4)$(emiatt deaktiválhatjuk a 4. klózt)
6. $\{\neg p, \neg q\}$ $\quad \in \Sigma$
7. $\{\neg q\}$ $\quad \mathrm{Res}(3, 6)$ (deaktiválhatjuk a 6. klózt)
8. $\square$ $\quad \mathrm{Res}(5, 7)$

Mivel pedig $\square \in \mathbf{Res}^*(\Sigma)$, ezért a kiinduló Σ halmazunk tényleg kielégíthetetlen, ami pedig azt jelenti, hogy az eredetileg kérdezett következmény is fennáll.

Lista írása helyett egy fában le is rajzolhatjuk a rezolúciós levezetéseket, ez a fenti pl. így nézhet ki (itt a csúcsok alá az van írva, hogy miért deaktiváltuk / megjelenésükkel miket deaktiváltak):



Rajzban is érdemes lehet jelölni (pl. egy $\times$ jel elhelyezésével a node alatt/fölött), ha már deaktiválva van, hogy tudjuk, őt már nem kéne többször használjuk. (Sem az $\times$-jelzés, sem a deaktiválós kommentek nem „kötelező” elemei a gráfrajzos levezetéseknek, anélkül is teljesen jó egy ilyen feladat.)