Logika gyakorlat – 05
Hilbert rendszere

Recap: Hilbert rendszere

- Ebben a következtető rendszerben olyan formulákat használunk, melyekben a változókon kívül **csak a $\to$ és a $\downarrow$ jelek szerepelnek**

- Van három axióma:

  Ax1 $(F \to (G \to H)) \to ((F \to G) \to (F \to H))$

  Ax2 $F \to (G \to F)$

  Ax3 $((F \to \downarrow) \to \downarrow) \to F$

- Egy input Σ formulahalmazból induló levezetésben listát írunk formulákról. Felvehetjük minden lépésben:

  – Σ elemei közül egyet

  – Bármelyik axióma tetszőleges példányát

  – Korábban szerepelt formulák **modus ponens**ét (leválasztottját)

  Ha így egy F formula rákerülhet a listára, annak jele $\Sigma \vdash F$.

- Ebből az **axiómapéldány**: választunk egy axiómát a háromból, a benne lévő F, G, H helyére ízlés szerint tetszőleges formulákat helyettesítünk

- A **modus ponens**: ha egy F formula rajta van már a listán, és $F \to G$ is, akkor felvehetjük G-t

- Helyességi és teljességi tétel: $\Sigma \vdash F$ pont akkor igaz, ha $\Sigma \vDash F$ (Σ-ból indítva a következtetést pont Σ logikai következményeit lehet levezetni ebben a rendszerben, az összeset le lehet, más formulát meg nem. Az ilyet úgy hívják, hogy „deduktív rendszer”.)

Fontos:

- A zárójelezéssel ne spóroljunk! $\to$ nem asszociatív, $F \to (G \to H)$ és $(F \to G) \to H$ egész mást jelent.

- Mindig nézzük meg, hogy az aktuális formulánknak, akinek a bal oldalát le akarjuk vágni, pontosan melyik is a bal oldala! (Találjuk meg a legkülső $\to$ jelet a formulában, csak akkor lehet vágni, ha a formula ettől a legkülső jeltől balra lévő formula, zárójelezéssel együtt, pontosan így, rákerült a listára.)

1. feladat.

Mutassuk meg, hogy $\vDash \ \downarrow \to p$! Egy első lépés lehet pl: Ax1$[F/\downarrow, G/(p \to \downarrow) \to \downarrow, H/p]$.

Recap: Dedukciós tétel

- A dedukciós tétel szerint minden Σ-ra, F-re és G-re igaz, hogy

$$\Sigma \ \vdash \ F \to G \ \Leftrightarrow \ \Sigma \cup \{F\} \vdash G.$$

- Ezt abba az irányba érdemes általában alkalmazni, hogy
  - mindaddig, amíg a jobb oldali célformulánk egy implikáció (és nem pedig egy változó vagy az $\downarrow$ formula), addig a célformulánk bal oldalát vigyük át a $\vdash$ másik oldalára és vezessük le így az új célunkat.
  - ezt többször is lehet ismételni persze.

2. feladat.

Vezessük le a dedukciós tételt alkalmazva is, hogy $\vdash \ \downarrow \to p$!

3. feladat.

Mutassuk meg, hogy $\{p \to q\} \ \vdash \ p \to (r \to q)$!

4. feladat.

Mutassuk meg Hilbert rendszerében, hogy

$$\left\{ \ p \to \Big((q \to (r \to q)) \to s \Big) \ \right\} \ \vDash \ p \to s!$$

További feladatokat generálhatunk itt. Egy példa:

$$\{ \ q \ , \ (p \to q) \to r \ \} \ \vdash \ (r \to \downarrow) \to \downarrow$$

1. feladat megoldása.

Egyrészt Σ üres, szóval most csak axiómákat tudunk példányosítani, és leválasztani, tehát „eleme Σ-nak” formulánk most nem lesz.

Az első lépés, amit ajánl a feladat:

1. Ax1$[F/\downarrow, G/(p \to\downarrow)\to\downarrow, H/p]$:

$$\Big(\downarrow\to\Big(((p\to\downarrow)\to\downarrow)\to p\Big)\Big)\to\Big(\Big(\downarrow\to((p\to\downarrow)\to\downarrow)\Big)\to\Big(\downarrow\to p\Big)\Big)$$

Itt (és amikor egy feladatban meg van adva egy tipp lépés, akkor mindig így lesz) azt látjuk, hogy a célformulánk, amit le akarunk vezetni ($\downarrow\to p$) megjelenik a javasolt axióma példányban, mégpedig vagy maga a célformula lesz az, vagy a készített implikáció jobb oldala, vagy a jobb oldal jobb oldala, vagy a jobb oldal jobb oldalának jobb oldala, stb. Most a jobb oldal jobb oldala a $\downarrow\to p$, amit le akarunk vezetni.

A leválasztás úgy működik, hogy ebből a formulából ha levezetjük az implikáció bal oldalát (ez most a $\downarrow\to\Big(((p\to\downarrow)\to\downarrow)\to p\Big)$ formula), akkor azzal tudunk ebből vágni; ha az eredmény bal oldalát, akkor aztán azzal is, és kész leszünk.

Most tehát le kéne vezetnünk a $\downarrow\to\Big(((p\to\downarrow)\to\downarrow)\to p\Big)$ formulát, vágni vele ebből, majd levezetni a $\downarrow\to((p\to\downarrow)\to\downarrow)$ formulát, vágni vele az eredményből, és kész leszünk, most tehát ez a két „al-célformulánk” van.

Amit érdemes mindig megnézni egy-egy al-célformulára, amit le akarunk vezetni:

1. Axiómapéldány-e? Ha igen, akkor csak le kell példányosítani és meglesz.
2. Σ-beli-e? Ha igen, akkor csak fel kell venni és meglesz.
3. $G\to F$ alakú-e, ahol F-et le tudjuk vezetni? (pl. mert F axiómapéldány, vagy mert Σ-beli, vagy mert F egy implikáció, aminek a jobb oldalát le tudjuk vezetni, mert az egy axiómapéldány, vagy mert Σ-beli stb.)

Most pl. a két célformulánkból azt láthatjuk elsőre, hogy a $\downarrow\to((p\to\downarrow)\to\downarrow)$ egy axiómapéldány, vegyük is fel:

2. Ax2$[F/\downarrow, G/p\to\downarrow]$

$$\downarrow\to((p\to\downarrow)\to\downarrow)$$

Vele egyelőre vágni még nem tudunk, mert az 1-nek nem a bal szélén van, hanem valahol a közepén, de később még jó lesz.

A másik al-célformuláról azt látjuk, hogy ő maga nem axiómapéldány, nincs is (az amúgy is üres) Σ-ban, viszont amit észre tudunk venni: ez egy implikáció, melynek a jobb oldala axiómapéldány.

Abban az esetben, ha egy $G \to F$ alakú formula az al-célformulánk, és le tudjuk vezetni F-et, a következő működik:

először vezessük le F-et (aki most egy axiómapéldány):

3. Ax3$[F/p]$

$$((p \to \downarrow) \to \downarrow) \to p$$

eztán példányosítsuk le a második axiómát úgy, hogy F legyen az al-célformulánk jobb oldala, G meg a bal oldala:

4. Ax2$[F/((p \to\downarrow) \to\downarrow) \to p, G/\downarrow]$

$$\Big(((p \to\downarrow) \to\downarrow) \to p\Big) \to \Big(\downarrow\to \Big(((p \to\downarrow) \to\downarrow) \to p\Big)\Big)$$

végül alkalmazzunk ezen a két formulán egy leválasztást:

5. MP$(3, 4)$.

$$\downarrow\to \Big(((p \to\downarrow) \to\downarrow) \to p\Big)$$

Levezettük mind a két al-célformulánkat! Kezdhetjük szépen sorrendben a leválasztásokat:

6. MP$(1, 5)$.

$$\Big(\downarrow\to ((p \to\downarrow) \to\downarrow)\Big) \to \Big(\downarrow\to p\Big)$$

7. MP$(2, 6)$.

$$\downarrow\to p$$

Kész vagyunk, kijött, hogy $\vdash \;\downarrow\to p$.

---

2. feladat megoldása.

Ha alkalmazzuk a dedukciós tételt, akkor a jobb oldali $\downarrow\to p$ formula egy implikáció; ennek bal oldalát átrakva a másik oldalra azt kapjuk, hogy az új feladat: $\downarrow \;\vdash\; p$.

(Dedukciós tételt alkalmazva a legrövidebb levezetés általában rövidebb lesz, mint eredetileg lett volna, most is így lesz.)

Ha $\downarrow$-ból akarunk levezetni egy F formulát, mindig a következőt lehet érdemes csinálni, most $F = p$-vel, de a lentebbiben mindenhol p helyére bármi tetszőleges F-et írni mindenhova, $\downarrow$-ból F-et le lehet vezetni:

1.	$\downarrow$	$\in \Sigma$	mindig ez lehet az első lépés
2.	$\downarrow\to \big(p \to\downarrow) \to\downarrow\big)$	Ax2$[F/\downarrow, G/(p \to\downarrow)]$	
3.	$(p \to\downarrow) \to\downarrow$	MP$(1, 2)$.	megjelent az Ax3 bal oldala
4.	$\big((p \to\downarrow) \to\downarrow\big) \to p$	Ax3$[F/p]$	
5.	p	MP$(3, 4)$.	

3. feladat megoldása.

Dedukció nélkül ez kb. így menne:

1.	$\Big(p \to (q \to (r \to q))\Big) \to \Big(\big(p \to q\big) \to \big(p \to (r \to q)\big)\Big)$	$\mathrm{Ax1}[F/p, G/q, H/(r \to q)]$
	a cél a jobb oldalon megjelent két al-célformulánk: $p \to (q \to (r \to q))$ ez egy implikáció, aminek jobb oldala axióma, és $p \to q$, ez meg Σ-beli. Levezetjük őket:	
2.	$q \to (r \to q)$	$\mathrm{Ax2}[F/q, G/r]$
	az első al-célformula jobb oldala ez az axiómapéldány	
3.	$\Big(q \to (r \to q)\Big) \to \Big(p \to \big(q \to (r \to q)\big)\Big)$	$\mathrm{Ax2}[F/2., G/p]$
4.	$p \to \big(q \to (r \to q)\big)$	$\mathrm{MP}(2,3)$
5.	$(p \to q) \to \big(p \to (r \to q)\big)$	$\mathrm{MP}(1,4)$
	most jön a második célformulánk:	
6.	$p \to q$	$\in \Sigma$
7.	$p \to (r \to q)$	$\mathrm{MP}(5,6)$

Dedukcióval elsőre erre írhatjuk át az eredeti feladatot:

$$\{p \to q, p\} \ \vdash \ r \to q$$

Itt azt látjuk, hogy Σ két elemén egy leválasztással megkaphatjuk q-t, ami pont a célformulánk jobb oldala, tehát Ax2-vel be tudjuk tolni q elé r-t mint premisszát és kész is leszünk:

1.	$p \to q$	$\in \Sigma$
2.	p	$\in \Sigma$
3.	q	$\mathrm{MP}(1,2)$
4.	$q \to (r \to q)$	$\mathrm{Ax2}[F/q, G/r]$
5.	$r \to q$	$\mathrm{MP}(3,4)$

Dedukcióval az előzőn még egyszer pedig ezt kapjuk:

$$\{\ p \to q,\ p,\ r\ \} \ \vdash \ q$$

Ez könnyű:

1.	$p \to q$	$\in \Sigma$
2.	p	$\in \Sigma$
3.	q	$\mathrm{MP}(1,2)$

és kész is.

Szabad a dedukciót a másik irányba is alkalmazni, de rendszerint nem segít – itt most igen, ha az előző alakból a p-t visszük át a $\vdash$ másik oldalára, akkor az új feladat:

$$\{\ p \to q,\ r\ \} \ \vdash \ p \to q$$

Ami:

1.	$p \to q$	$\in \Sigma$

Ez azért ritkán fordul elő. A fenti négy közül persze bármelyik jó megoldás.

4. feladat megoldása.

Attól, hogy $\vDash$ és „Hilbert rendszerében” a kérdés, még ugyanaz marad a feladat a helyességi-teljességi tétel miatt: meg kell mutatnunk, hogy a bal oldalból Hilbert rendszerében ki lehet hozni a jobb oldalt.

Érdemes lehet alkalmazni a dedukciós tételt. A feladat új alakja:

$$\Big\{\ p \to \Big((q \to (r \to q)) \to s\Big),\ p\ \Big\}\ \vdash\ s$$

A Σ-beli két formulán lehet is alkalmazni leválasztást, érdemes lehet ezzel kezdeni:

1.	p	$\in \Sigma$
2.	$p \to \Big((q \to (r \to q)) \to s\Big)$	$\in \Sigma$
3.	$(q \to (r \to q)) \to s$	$\mathrm{MP}(1,2)$
	ennek pont a jobb oldalán van a célformula, a bal oldala meg axióma:	
4.	$q \to (r \to q)$	$\mathrm{Ax2}[F/q, G/r]$
5.	s	$\mathrm{MP}(3,4)$
	done	

Egyébként itt dedukciós tétel nélkül egy levezetés lehet:

1. $\mathrm{Ax1}[F/p, G/(q \to (r \to q)), H/s]$

$$\Big(p \to \Big((q \to (r \to q)) \to s\Big)\Big) \to \Big(\Big(p \to (q \to (r \to q))\Big) \to \Big(p \to s\Big)\Big)$$

Az első al-célformulánk (kettő van megint) Σ-beli:

2. $p \to \Big((q \to (r \to q)) \to s\Big) \in \Sigma$

3. $\Big(p \to (q \to (r \to q))\Big) \to \Big(p \to s\Big)$ $\mathrm{MP}(1,2)$

A második al-célformulánk jobb oldala egy axióma:

4. $q \to (r \to q)$ $\mathrm{Ax2}[F/q, G/r]$

5. $\Big(p \to \Big(q \to (r \to q)\Big)\Big)$ $\mathrm{MP}(3,4)$

6. $p \to s$ $\mathrm{MP}(3,5)$