# Logika gyakorlat – 06
# Az elsőrendű logika szintaxisa

**Recap: Szintaxis: az építőelemek**

Elsőrendű logikai formulák építésekor a következő szimbólumokat használjuk:

- **(elsőrendű) változókat**: $x$, $y$, $z$, ...
- **kvantorokat**: $\forall$ (univerzális, bármely) és $\exists$ (egzisztenciális, van olyan)
- **függvényjeleket**, mindegyiknek van egy fix aritása (változószáma): $f/2$, $g/1$, $h/1$, $c/0$, ... (a 0-változós függvényjeleket **konstansjelnek** is hívjuk)
- **predikátumjeleket**, ezeknek is van egy-egy fix aritása: $p/2$, $q/1$, $r/0$, ... egy speciális predikátumjel van, az egyenlőségjel: $=/2$, ami mindig bináris.
- és az eddigi **konnektívákat**: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$
- szükség szerint zárójeleket: (, ).

Ha megadjuk, hogy milyen változókat, függvény- és predikátumjeleket használunk, ezek összességét hívjuk **elsőrendű nyelv**nek is.

**Recap: Szintaxis: termek**

A **term**ek képzési szabályai (ezek azok a kifejezések, amiket majd egy struktúrában kiértékelve objektum értéket kapunk, az alaphalmaz egy elemét):

- minden változó term,
- ha $f/n$ egy **függvény**jel, és $t_1, \ldots, t_n$ termek, akkor $f(t_1, \ldots, t_n)$ is egy term,
- más term nincs.

Ha egy termben nincs változó, akkor **alapterm**nek hívjuk.

**Recap: Szintaxis: formulák**

A **formulák** képzési szabályai (ezek pedig ugyanúgy, mint ítéletkalkulusban, 1-re vagy 0-ra értékelődnek ki egy adott struktúrában):

- $\uparrow$ és $\downarrow$ formulák,
- ha $p/n$ egy **predikátum**jel, és $t_1, \ldots, t_n$ **term**ek, akkor $p(t_1, \ldots, t_n)$ egy (atomi) formula,
- ha $F$ és $G$ formulák, $x$ pedig változó, akkor formula még $(\forall x F)$, $(\exists x F)$, $(\neg F)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \to G)$ és $(F \leftrightarrow G)$ is,
- más formula nincs.

A fölösleges zárójeleket ugyanúgy elhagyjuk, mint ítéletkalkulusban (a külsőket, a precedencia erősség alapján elhagyhatóakat ill. az $\wedge$ és $\vee$ asszociativitása miattiakat is).

**1. feladat.**

Ha az elsőrendű nyelvünkben $f/1$ függvényjel, $p/1$ predikátumjel, $x$ és $y$ pedig változók, akkor a következő stringek melyiket formula, melyike term, és amelyik egyik sem, az pl. hol alkalmaz invalid képzési szabályt?

1. $\exists x f(p(x))$
2. $\forall x p(f(x))$
3. $\exists x f(f(x))$
4. $\forall x p(p(x))$
5. $\exists x \forall x p(x)$
6. $\forall x \exists x p(y)$

Egy újabb zárójel-elhagyási egyszerűsítés: ha $c/0$ egy konstansjel, akkor $c()$ helyett csak $c$-t szoktunk írni a formulákban. Ha $p/0$ predikátumjel, akkor $p$-t.

**2. feladat.**

Legyenek $c/0$, $f/1$ és $h/2$ függvényjelek, $r/0$, $p/1$, $q/2$ predikátumjelek és $x, y, z$ változók. A következő stringek melyike term, melyike formula és melyike hibás? Ha hibás, akkor melyik benne az a jel, amin belül külön-külön még szintaktikailag validak a részek, de ami már szintaktikai hibát ad, ha a részeire alkalmazzuk?

1. $\exists y(q(f(c), h(x, y)))$
2. $\forall y(r) \vee p(h(y, z))$
3. $\exists x(h(f(y), q(z, c))$
4. $q(\forall x(\neg z), h(y, x))$

**3. feladat.**

Tudjuk, hogy a következő kifejezés egy formula az elsőrendű nyelvünkben, melyben $u$ és $v$ változók, a többi szimbólum pedig nem az:

$$\forall v \forall u \ (\ \neg sol(vex, ral(vex, ort(vex))) \ \leftrightarrow \ bar(vex, ort(vex))\ )$$

Ebben az elsőrendű nyelvben a következő kifejezések közül melyek alaptermek, melyek termek, melyek formulák és melyek szintaktikailag helytelenek?

1. $ort(ral(vex, vex))$
2. $sol(ort(ral(vex), vex))$
3. $bar(ral(ort(vex), vex))$
4. $ort(v, vex)$
5. $v$
6. $bar(ort(vex), vex)$
7. $ort(vex)$
8. $vex$

Ehhez az előzőhöz hasonló „alapterm-ellenőrzős” feladatokat generálhatunk itt is. (Note: feladatonként változtatja a generátor, hogy épp melyik szimbólum hány változós, és hogy kik közülük a függvény- és kik a predikátumjelek.)

**1. feladat megoldása.**

Itt érdemes belülről kifelé vizsgálni, hogy a legkisebb elemek melyik szintaktikai kategóriába tartoznak, és ez alapján haladni felfelé, hogy amit épp alkalmazunk rajta, annak megfelelő képzési szabály van-e, és ha van, akkor ez az „eggyel nagyobb” rész milyen típusú lesz (term vagy formula).

Ha megnézzük a szabályokat, formulákon belül lehetnek termek, de fordítva nem.

1. $\exists x f(p(x))$: itt
   - $x$ változó, tehát ez eddig term
   - $p(x)$: $p/1$ egyváltozós predikátumjel, egy darab term van belehelyettesítve, ez oké, akkor ez egy (atomi) formula
   - $f(p(x))$: $f/1$ egyváltozós függvényjel, egyvalami van belehelyettesítve, ez még oké, de az a valami formula, függvényjelbe pedig csak termet helyettesíthetünk $\Rightarrow$ az egész szintaktikailag nem helyes (és $f$-nél válik hibássá)
2. $\forall x p(f(x))$: itt
   - $x$ változó, tehát ez eddig term
   - $f(x)$: $f/1$ egyváltozós **függvényjel**, egy darab **term** van belehelyettesítve, ez oké, akkor ez egy **term**
   - $p(f(x))$: $p/1$ egyváltozós **predikátumjel**, egy darab **term** van belehelyettesítve, ez oké, akkor ez egy **formula**
   - $\forall x p(f(x))$: $\forall$ egy kvantor, $x$ változó, $p(f(x))$ formula, akkor ez oké, ez egy **formula**.
3. $\exists x f(f(x))$: itt
   - $x$ változó, tehát ez eddig term
   - $f(x)$: $f/1$ egyváltozós függvényjel, egy darab term van belehelyettesítve, ez oké, akkor ez egy term
   - $f(f(x))$: $f/1$ egyváltozós függvényjel, egy darab term van belehelyettesítve, ez oké, akkor ez egy term
   - $\exists x f(f(x))$: $\exists$ kvantor, $x$ változó, de $f(f(x))$ nem formula, hanem term $\Rightarrow$ az egész szintaktikailag nem helyes (és $\exists$-nél válik hibássá)
4. $\forall x p(p(x))$: itt
   - $x$ változó, tehát ez eddig term
   - $p(x)$: $p/1$ egyváltozós predikátumjel, egy darab term van belehelyettesítve, ez oké, akkor ez egy formula
   - $p(p(x))$: $p/1$ egyváltozós predikátumjel, de egy darab **formula** van belehelyettesítve $\Rightarrow$ az egész szintaktikailag nem helyes (és az első $p$-nél válik hibássá)

5. $\exists x \forall x p(x)$: itt

   - $x$ változó, tehát term,
   - $p(x)$: $p/1$ egyváltozós predikátumjel, egy darab term van belehelyettesítve, ez oké, akkor ez egy formula
   - $\forall x p(x)$: $\forall$ kvantor, $x$ változó, $p(x)$ formula, ez oké, akkor ez egy formula
   - $\exists x \forall x p(x)$: $\exists$ kvantor, $x$ változó, $\forall x p(x)$ formula, ez oké, tehát ez egy formula

   (semmi szabály nem tiltja, hogy egy kvantoron belül egy másik kvantor lekösse újra ugyanazt a változót; a szemantikánál kiderül, hogy ilyenkor a belső kvantor „eltakarja” a külsőt, ugyanúgy, mint általában egy programozási nyelven.)

6. $\forall x \exists x p(y)$: itt

   - $y$ változó, tehát term,
   - $p(y)$: $p/1$ egyváltozós predikátumjel, egy termet helyettesítünk bele, ez oké, eddig formula,
   - $\exists x p(y)$: $\exists$ kvantor, $x$ változó, $p(y)$ formula, oké, ez egy formula
   - $\forall x \exists x p(y)$: $\forall$ kvantor, $x$ változó, $\exists x p(y)$ egy formula, oké, ez egy formula

   (arra sincs előírás, hogy egy változót ne kössön le egy kvantor se, és arra se, hogy ha egy kvantor leköt egy változót, akkor annak kötelező lenne előfordulnia)

---

**2. feladat megoldása.**

Itt is belülről haladjunk kifelé.

1. $\exists y(q(f(c), h(x, y)))$: itt

   - $c$ konstansjel, tehát ez egy term
   - $f(c)$-ben $f/1$ függvényjel, tényleg egy argumentumot kap, ami egy term, oké, akkor ez egy term
   - $x$ és $y$ változók, tehát termek
   - $h(x, y)$-ban $h/2$ függvényjel, tényleg két argumentumot kap, amik termek, oké, akkor ez egy term
   - $q(f(c), h(x, y)))$-ban $q/2$ predikátumjel, tényleg két argumentumot kap, amik termek, oké, akkor ez egy formula
   - $\exists y(q(f(c), h(x, y)))$-ban $\exists$ kvantor, $y$ változó, $q(f(c), h(x, y))$ formula, oké, akkor **ez egy formula.**

2. $\forall y(r) \vee p(h(y, z))$: itt

   - $r$-ben $r/0$ predikátumjel, tényleg nem kap argumentumot, oké, akkor ez egy formula
   - $\forall y(r)$-ben $\forall$ kvantor, $y$ változó, $r$ formula, oké, akkor ez egy formula

- $y$ és $z$ változók, tehát termek
- $h(y,z)$-ben $h/2$ függvényjel, tényleg két argumentumot kap, amik termek, oké, akkor ez egy term
- $p(h(y,z))$-ben $p/1$ predikátumjel, tényleg egy argumentumot kap, ami egy term, oké, akkor ez egy formula
- $\forall y(r) \vee p(h(y,z))$: ez egy vagyolás, a két oldalán tényleg két formula van, tehát **ez egy formula.**

3. $\exists x(h(f(y), q(z,c))$: itt
   - $y$ változó, tehát term
   - $f(y)$-ban $f/1$ függvényjel, tényleg egy argumentumot kap, ami egy term oké, akkor ez egy term
   - $z$ változó, tehát term
   - $c$ konstansjel (0-változós függvényjel), tényleg nem kap argumentumot, oké, akkor ez egy (alap)term
   - $q(z,c)$-ben $q/2$ predikátumjel, tényleg két argumentumot kap, amik termek, oké, akkor ez egy formula
   - $h(f(y), q(z,c))$-ben $h/2$ függvényjel, tényleg két argumentumot kap, **amik közül az egyik nem term, hanem formula**, és ezért ez a rész a $h$ alkalmazásakor szintaktikailag hibás lesz. (Így persze az egész string is az.)

4. $q(\forall x(\neg z), h(y,x))$: itt
   - $z$ változó, tehát term
   - $\neg z$ egy negálás, viszont **nem formulát próbál negálni, hanem termet**, ezért ez a rész a $\neg$ alkalmazásakor szintaktikailag hibás lesz. (Így persze az egész string is az.)

**3. feladat megoldása.**

Első lépésben meg kell határoznunk, hogy itt mik a változók, mik a függvény- és mik a predikátumjelek. Ha ez egy formula:

$$\forall v \forall u \ ( \ \neg sol(vex, ral(vex, ort(vex))) \ \leftrightarrow \ bar(vex, ort(vex)) \ )$$

és tudjuk, hogy $u$ és $v$ változók, a többi pedig nem az, akkor

- a $sol(\ldots)$ kifejezés negálva van, negálni csak formulát tudunk, akkor $sol$ **predikátum**jel kell legyen, mégpedig kétváltozós (egyik paramétere $vex$, másik paramétere $ral(vex, ort(vex))$ a formula első atomi formulájában)
- predikátumjelbe termeket helyettesíthetünk, termekben pedig csak függvényjelek és változók szerepelhetnek, tehát $ral/2$, $vex/0$ és $ort/1$ függvényjelek kell legyenek,
- végül, $bar(vex, ort(vex))$ egy $\leftrightarrow$ egyik oldalán szerepel, tehát csak formula lehet, ezért $bar/2$ egy predikátumjel (azt már tudjuk, hogy benne $vex/0$ és $ort/1$ pedig függvényjelek).

Tehát predikátumjelek: $sol/2$, $bar/2$, függvényjelek: $vex/0$, $ort/1$, $ral/2$. Ezek alapján akkor:

1. $ort(ral(vex, vex))$: itt
   - $vex$ függvényjel, 0-változós, nincs is belehelyettesítve semmi, oké, eddig ő egy term (mégpedig alapterm, mert nincs benne változó).
   - $ral(vex, vex)$-ben $ral/2$ bináris függvényjel, tényleg két argumentumot kap, mindkettő (alap)term, tehát ő is (alap)term.
   - $ort(ral(vex, vex))$-ben $ort/1$ unáris függvényjel, tényleg egy argumentumot kap, az az egy egy (alap)term, tehát ő is (alap)term.
2. $sol(ort(ral(vex), vex))$: itt
   - $vex$ függvényjel, 0-változós, tényleg nem kap argumentumot, tehát ő egy (alap)term.
   - $ral(vex)$-ben $ral/2$ bináris függvényjel, de csak egy argumentumot kap, így ez a kifejezés (és ezért az egész is) szintaktikailag nem valid.
3. $bar(ral(ort(vex), vex))$: itt
   - $vex$ függvényjel, 0-változós, tényleg nem kap argumentumot, tehát ő (alap)term.
   - $ort(vex)$-ben $ort/1$ unáris függvényjel, tényleg egy argumentumot kap, ami egy alapterm, tehát ő is alapterm.
   - $ral(ort(vex), vex)$-ben $ral/2$ bináris függvényjel, tényleg két argumentumot kap, mégpedig két alaptermet, tehát ő is alapterm.
   - $bar(ral(ort(vex), vex))$-ben $bar/2$ bináris predikátumjel, de csak egy argumentumot kap, így ez a kifejezés szintaktikailag nem valid.

4. $ort(v, vex)$: itt
   - $v$ változó, tehát term (de nem alapterm)
   - $vex$ 0-változós függvényjel, tényleg nem kap argumentumot, tehát ő alapterm
   - $ort(v, vex)$-ben $ort/1$ egyváltozós függvényjel, de két argumentumot kap, így ez a kifejezés szintaktikailag nem valid.
5. $v$: itt
   - $v$ változó, tehát term, de nem alapterm.
6. $bar(ort(vex), vex)$: itt
   - $vex$ 0-változós függvényjel, tényleg nem kap argumentumot, tehát ő alapterm
   - $ort(vex)$-ben $ort/1$ egyváltozós függvényjel, tényleg egy argumentumot kap, ami egy alapterm, tehát ő is alapterm.
   - $bar(ort(vex), vex)$-ben $bar/2$ bináris predikátumjel, tényleg két argumentumot kap, mindkettő (alap)term, tehát ő egy (atomi alap)formula. (Persze így nem term, és nem is alapterm.)
7. $ort(vex)$: itt
   - $vex$ 0-változós függvényjel, tényleg nem kap argumentumot, tehát ő alapterm
   - $ort(vex)$-ben $ort/1$ egyváltozós függvényjel, tényleg egy argumentumot kap, ami egy alapterm, tehát ő is alapterm. (Persze term is.)
8. $vex$: itt
   - $vex$ 0-változós függvényjel, tényleg nem kap argumentumot, tehát ő alapterm. (Persze term is.)