Logika gyakorlat – 07
Az elsőrendű logika szemantikája és CNF elsőrendben

Még mindig szintaxis (azaz: csak formulákat alakítunk át anélkül, hogy a kiértékeléssel foglalkoznánk): CNF az elsőrendű logikában:

Recap: CNF elsőrendben

Egy **kvantormentes** elsőrendű logikai formula lehet:

- **literál**, ha atomi formula (pozitív literál) vagy annak negáltja (negatív literál), pl. $p(x, y)$ pozitív, $\neg p(f(x), c)$ negatív literál (ha $p/2$ predikátumjel, $c/0$ és $f/2$ függvényjelek)
- **klóz**, ha véges sok literál diszjunkciója (ezt szintén literálhalmazként fogjuk reprezentálni)
- **CNF**, ha klózok konjunkciója (szintén mint klózhalmazt reprezentáljuk)

Itt már az nem baj, ha egy Σ CNF végtelen; a klózok továbbra is végesek kell legyenek.

A CNF-re hozó algoritmus ugyanaz, mint ítéletkalkulusban volt:

- nyilak eliminálása,
- deMorgan-azonosságokkal a negálások bevitele az atomi formulák mellé,
- disztributivitás alkalmazással a „CNF vagy CNF” részekből egy CNF-et építeni

1. feladat.

Hozzuk CNF-re a következő kvantormentes formulát:

$$\big(p(x, f(y)) \to q(y)\big) \leftrightarrow p(f(y), f(x))$$

Foglalkozzunk most struktúrákkal, kiértékeléssel és formalizálással:

Recap: Struktúra

Ha adott egy elsőrendű nyelv (tehát h mik a változók, mik a predikátum- és függvényjelek, és melyiknek mennyi a változószáma / aritása), akkor egy **struktúra** egy $\mathcal{A} = (A, I, \varphi)$ hármas (azaz kb. „struct” három mezővel), ahol

- A egy nemüres halmaz, az **univerzum** („az objektumok halmaza”),
- φ minden változóhoz egy objektumot rendel (a változó „alap értékét”, amit akkor vesz fel, ha nem hat rá kvantor), $\varphi(x) \in A$,
- I pedig minden függvényjelhez és predikátumjelhez egy tényleges függvényt / predikátumot rendel, a megfelelő aritással, azaz:

$$I(f) : A^n \to A, \text{ ha } f/n \text{ függvényjel}, \quad I(p) : A^n \to \{0, 1\}, \text{ ha } p/n \text{ predikátumjel}$$

A kvantorok szemantikájánál használjuk a módosított struktúra jelölést:

Recap: Módosított struktúra

Ha $\mathcal{A} = (A, I, \varphi)$ egy struktúra, x egy változó és $a \in A$ egy objektum, akkor $\mathcal{A}_{[x\mapsto a]}$ azt a struktúrát jelöli, mely csak annyiban más, mint $\mathcal{A}$, hogy benne x alapértéke a, azaz:

$$\mathcal{A}_{[x\mapsto a]} = (A, I, \varphi'), \text{ ahol } \varphi(x) = a \text{ és ha } y \neq x, \text{ akkor } \varphi'(y) = \varphi(y)$$

Az atomi formulák és a kvantorok szemantikája ezekkel a jelöléssel:

Recap: Szemantika

Ha $\mathcal{A} = (A, I, \varphi)$ egy struktúra és F egy formula, akkor…

- ha $F = p(t_1, \ldots, t_n)$ atomi formula, akkor $\mathcal{A} = I(p)(\mathcal{A}(t_1), \ldots, \mathcal{A}(t_n))$, azaz kiértékeljük a t_i termek értékét $\mathcal{A}$-ban, majd az eredményként előálló objektumokat behelyettesítjük $I(p)$-be, abba a predikátumba, amit ebben a struktúrában p jelöl;
- ha $F = \exists x G$, akkor $\mathcal{A}(F)$ igaz, ha létezik olyan $a \in A$ objektum, melyre $\mathcal{A}_{[x\mapsto a]}(G) = 1$, azaz ha tudunk úgy új értéket adni x-nek, hogy az ennek megfelelően megváltoztatott struktúrában a G formula (a „mag”) értéke 1 lesz;
- ha $F = \forall x G$, akkor $\mathcal{A}(F)$ akkor igaz, ha minden $a \in A$ objektumra fennáll, hogy $\mathcal{A}_{[x\mapsto a]}(G) = 1$, azaz ha akárhogy is adunk új értéket x-nek, az ennek megfelelően megváltoztatott struktúra értéke 1 lesz;
- a konnektívák, logikai konstansok szemantikája értelemszerű, ugyanazok a szabályok, mint eddig.

Hogy egy lapon legyünk, értékeljük ki a következő mondatot a következő struktúrában:

2. feladat.

A formula:

$$F = \forall x\Big(x = c \lor \exists y(f(y) = x)\Big)$$

A struktúra: $\mathcal{A} = (\mathbb{N}_0, I, \varphi)$, ahol

- $I(c) = 0$
- $I(f)(n) = n + 1$
- $I(=)$ az egyenlőség **az egyenlőségjelet másképp nem is interpretálhatjuk**

3. feladat.

„Formalizáljuk" elsőrendben a következő mondatokat! Azaz: adjunk meg olyan $\mathcal{A}$ struktúrát és F formulát, melyekre $\mathcal{A} \vDash F$ pontosan akkor igaz, ha $\mathcal{A}$-ban igaz F; próbáljuk szem előtt tartani a modularitást és tényleg az „alap" részekre bevezetni függvény- és predikátumjeleket.

- Ádám keresi Évát
- Ádám mosakszik
- Minden tehén fekete
- Thor kalapácsait csak Thor és Steve Rogers tudják felemelni
- Ha valaki birtokolja az Egy Gyűrűt, akkor őt minden gyűrűlidérc keresi
- Minden bogár rovar, de nem minden rovar bogár
- Mindenkinek van egy álma
- Sanyi munkahelyének ügyfelei közül Sanyi csak az idősekkel kerül kapcsolatba

Itt találunk hozzájuk és még néhány másik mondathoz példa megoldást:

formalizálós vidi (ennek a jegyzetnek a hátuljában is ott az első négy)

1. feladat megoldása.

$$(p(x, f(y)) \to q(y)) \leftrightarrow p(f(y), f(x))$$

Először elimináljuk a nyilakat, egyesével vagy külön-külön:

$$(\neg p(x, f(y)) \vee q(y)) \leftrightarrow p(f(y), f(x))$$

$$\Big(\neg(\neg p(x, f(y)) \vee q(y)) \vee p(f(y), f(x))\Big) \ \wedge \ \Big(\neg p(x, f(y)) \vee q(y) \vee \neg p(f(y), f(x))\Big)$$

Ezután a páratlan sok $\neg$ hatókörében lévő $\vee$ / $\wedge$ jeleket megfordítjuk, az atomi formulák pedig akkor kapnak negálást, ha páratlan sok negáció hat rájuk:

$$\Big(\Big(p(x, f(y)) \wedge \neg q(y)\Big) \vee p(f(y), f(x))\Big) \ \wedge \ \Big(\neg p(x, f(y)) \vee q(y) \vee \neg p(f(y), f(x))\Big)$$

A külső éselés jobb oldala egy (egy darab, háromliterálos klózból álló) CNF, a bal oldala pedig két CNF vagyolása (a bal oldaliban két egységklóz, a jobb oldaliban egy egységklóz szerepel), a bal oldalon disztributivitást alkalmazunk:

$$\begin{aligned}(p(x, f(y)) \ \vee \ p(f(y), f(x))) \wedge \\ (\neg q(y) \vee p(f(y), f(x))) \wedge \\ (\neg p(x, f(y)) \vee q(y) \vee \neg p(f(y), f(x)))\end{aligned}$$

és az eredmény CNF-ben van.

2. feladat megoldása.

(Azt látjuk a formula szerkezetéből, hogy c tényleg konstansjel, $f/1$ függvényjel és $=/2$ predikátumjel kell legyen, meg persze x, y változók, ezért a struktúra tényleg „jól” – ezen a nyelven – van megadva.)

- $\mathcal{A}(F)$ akkor igaz (mivel a külső operátor egy $\forall x$), ha minden $a \in \mathbb{N}_{\nvdash}$-ra (azaz a természetes számra)

$$\mathcal{A}_{[x\mapsto a]}\Big(x = c \ \vee \ \exists y(f(y) = x)\Big) \ = 1$$

- ez a formula egy $\vee$, ami akkor lesz igaz, ha minden a természetes számra
  - $\mathcal{A}_{[x\mapsto a](x=c)=1}$, vagy
  - $\mathcal{A}_{[x\mapsto a]}(\exists y(f(y) = x)) = 1$ (vagy persze akár mindkettő, a $\vee$ megengedő vagyolás, nem pedig kizáró vagyolás)

- Ebből az $\mathcal{A}_{[x\mapsto a](x=c)}$-t kiértékelni könnyű, mert az egy atomi formula: ebben a (módosított) struktúrában x értéke a (oda van írva), c értéke pedig 0 (mert c konstansjel, annak mindig I ad értéket, és $I(c) = 0$ ebben a struktúrában ugyanúgy, mint $\mathcal{A}$-ban), az $=$ jel szemantikája, $I(=)$ mindig az egyenlőség kell legyen, ezért ez akkor igaz, ha $a = 0$.

- A $\exists y(f(y) = x)$ formula kiértékelése kicsit bonyolultabb: $\mathcal{A}_{[x\mapsto a]}(\exists y(f(y) = x)) = 1$ akkor igaz, ha van olyan (mondjuk) $b \in A = \mathbb{N}_0$, azaz b természetes szám, melyre

$$\mathcal{A}_{[x\mapsto a, y\mapsto b]}(f(y) = x) = 1.$$

  Itt hogy megint atomi formulához értünk, kiértékelni (így benne hagyva az a-kat és a b-ket) könnyű: ebben a struktúrában x értéke a és y értéke b (oda vannak írva a subscriptbe), és mivel $I(f)$ az „adj hozzá 1-et” függvény, így itt $f(y)$ értéke $b + 1$, ezért az $f(y) = x$ formula akkor lesz 1 („igaz”), ha $b + 1 = a$.

  Azaz ez a ($\exists y$-os) formula akkor igaz az $\mathcal{A}_{[x\mapsto a]}$ struktúrában, ha van olyan b természetes szám, melyre $b + 1 = a$; annyit azért tudunk a természetes számokról, hogy ez minden **pozitív** természetes számra igaz, hiszen bármi is a, ha pozitív, akkor $b := a - 1$ is természetes szám és nyilván $b + 1 = a$, tehát létezik legalább egy ilyen b érték (pontosan egy létezik, de az $\exists$ kvantor kiértékelésénél az a kérdés csak, hogy van-e legalább egy ilyen).

- Tehát a vagyolás bal oldala akkor igaz, ha $a = 0$, a jobb oldala pedig ha $a > 0$, összességében ha $a \geq 0$, akkor valamelyik oldal igaz lesz – mivel másmilyen természetes szám pedig nincs, így a formula igaz lesz minden $a \in \mathbb{N}_0$-ra, ezért az eredeti formula is igaz az eredeti $\mathcal{A}$ struktúrában.

3. feladat megoldása.

Ádám keresi Évát

Amit itt tudnunk érdemes: ha egy mondatban egy **tulajdonnév** szerepel, „aki" a kontextusból egyértelmű, hogy pontosan egyvalakit jelölünk ki vele, azt egy **konstansjellel** fogjuk eljelölni, a struktúránkban pedig az interpretációs függvény ehhez a jelhez ezt a bizonyos személyt fogja rendelni.

Egyelőre ott tartunk, hogy Ádámnak is és Évának is egy-egy konstansjelet felveszünk, lehetnek ezek pl. a és e.

A „keresi" egy **tárgyas ige**: van neki subjectje (a példában Ádám, aki keres) és objectje (a példában Éva, akit keresnek). Az ilyen igékből **kétváltozós predikátum** lesz: az első argumentumra az kerül, aki keres, a másodikra az, akit keresnek, és maga a predikátum akkor lesz igaz, ha az első argumentumként átadott személy tényleg keresi a másodikat. Legyen mondjuk a predikátumjel hozzá keresiŐt.

Ebből az is látszik, hogy az univerzumban persze Ádámnak és Évának ott kell lennie (hiszen őket jelöli ki a két konstansjelünk); az univerzum épp lehetnek ők ketten is, de lehet akár az egész mindenkori emberiség is, vagy bármi halmaz, melynek ők mindketten elemei.

A formula ezek után: $\text{keresiŐt}(a, e)$, a struktúra pedig az előzőekben megadott (pl. mondjuk úgy, hogy az univerzum az összes ember halmaza).

Ádám mosakszik

Azt már láttuk, hogy ebből az Ádám egy (mondjuk) a konstansjel lesz, aki a strukrúrában Ádámot veszi fel értékül.

A „mosakszik" ige nem tárgyas, ennek csak subjectje van: valaki vagy mosakszik, vagy nem. Ezekből az igékből **egyváltozós predikátum** lesz, mondjuk mosakszik/1, azzal, hogy ha e egy ember, akkor $I(\text{mosakszik})(e)$ értéke akkor legyen 1 (akkor legyen igaz), ha az e ember tényleg mosakszik (időablak nincs a mostani formalizmusaink egyikében sem).

Az egész formula így $\text{mosakszik}(a)$ lesz, az univerzum (mondjuk) az emberek halmaza, a értéke Ádám, a mosakszik predikátum pedig mindazon emberekre legyen igaz, akik mosakszanak.

Minden tehén fekete

Itt a „tehén" nem tulajdonnév, hanem köznév, és persze vélhetően mindenki tudja, hogy tehénből van több is. Ezekből **egyváltozós predikátum** készülhet: tehén/1, ami pontosan azokra az objektumokra (állatok? élőlények?) lesz igazra interpretálva, amik tehenek.

A „fekete" szó pedig egy **melléknév**, ami egy objektumnak egy tulajdonságát írja le; ezekből szintén **egyváltozós predikátum** lesz, mondjuk fekete/1, ami pontosan a fekete objektumokra lesz igazra interpretálva.

A „minden tehén fekete" mondat egy „minden objektumra igaz, hogy ha az az objektum egy tehén, akkor az az objektum fekete is" alakú mondat rövidebben, amit a

$$\forall x \Big(\text{tehén}(x) \rightarrow \text{fekete}(x) \Big)$$

formula fogalmaz meg. Ha kevesebb logikát láttunk eddig a kelleténél, ezt úgy is megközelíthetjük, hogy ha X a tehenek halmaza, Y pedig a fekete dolgok halmaza, akkor a „minden tehén fekete” mondat azt állítja, hogy $X \subseteq Y$. Két halmaz közti részhalmaz kapcsolatot pedig egy „ha valami X-ben van, akkor Y-ban is” mondattal tudunk leírni, ami ebben az esetben (a „tehenek” halmazban pont akkor van benne valami, ha igaz rá a tehén predikátum stb.) a

$$\forall x\Big(\text{tehén}(x) \to \text{fekete}(x)\Big)$$

formula lesz.

Thor kalapácsait csak Thor és Steve Rogers tudják felemelni

Ebből a mondatból amit már tudunk kezelni:

- Thor tulajdonnév, behozunk rá egy őt jelölő konstanst: thor.
- Steve Rogers szintén egyetlen személy, behozunk rá egy konstanst: steve.
- A „kalapács” egy köznév, behozunk rá egy egyváltozós predikátumjelet: kalapács/1 akkor igaz egy objektumra, ha az történetesen egy kalapács. (Pl. Mjölnir kalapács, Thor és Steve Rogers pedig nem kalapácsok.)
- A „fel tudja emelni” (sort of a) tárgyas ige: van egy subjectje (aki emel) és egy objectje (akit/amit emelnek), ebből kétváltozós predikátum lesz: felTudjaEmelni/2, ami akkor lesz igaz egy input objektumpárra, ha az első argmentum egy személy, aki fel tudja emelni a második argumentumot.

Amit még nem láttunk: a **birtoklás** kapcsolat, a „Thor kalapácsait” részből az jön le, hogy Thornak lehet akár több kalapácsa is. Ha garantáltan pontosan egy lenne neki, akkor azt is elnevezhetnénk pl. egy konstansjellel; így nem tehetjük ezt, hanem bevezetünk egy övé/2 predikátumjelet, aminek az interpretációjában $\text{övé}(a, b)$ pontosan akkor lesz 1, ha az a objektum birtokolja a b objektumot.

A „Thor kalapácsait csak Thor és Steve Rogers tudják felemelni” mondatban a „csak” jó standard jelentése a „ha valaki fel tudja emelni Thor valamelyik kalapácsát, akkor az a valaki Thor vagy Steve Rogers kell legyen”.

(Legalábbis ha így értelmezzük a mondatot: a nyelv sokszor nem egyértelmű, így a fenti mondta tkp jelentheti azt is, hogy „ha valaki fel tudja emelni Thor összes kalapácsát, akkor az a valaki Thor vagy Steve Rogers kell legyen”.)

Ha ezt a „valaki”t x-szel jelöljük, akkor a „valaki fel tudja emelni Thor valamelyik kalapácsát” mondat, ami ugyanaz, mint a „létezik Thornak olyan kalapácsa, amit ez a valaki fel tud emelni”, ami ugyanaz, mint a „létezik olyan objektum, amit Thor birtokol és ami egy kalapács, és amit ez a valaki fel tud emelni”, erre viszont már tudunk formulát írni (ha ezt a bizonyos objektumot lentebb az y változó jelöli el):

$$\exists y\Big(\text{övé}(\text{thor}, y) \ \wedge\ \text{kalapács}(y) \ \wedge\ \text{felTudjaEmelni}(x, y)\Big)$$

és a mondat szerinti „az a valaki Thor vagy Steve Rogers” pedig $(x = \text{steve}) \ \vee\ (x = \text{thor})$, összerakva a mondatot pedig ezt kapjuk:

$$\forall x\Big(\exists y\Big(\text{övé}(\text{thor}, y) \ \wedge\ \text{kalapács}(y) \ \wedge\ \text{felTudjaEmelni}(x, y)\Big) \ \to\ \Big(x = \text{steve} \ \vee\ x = \text{thor}\Big).\Big)$$