Logika gyakorlat – 08
Normálformák elsőrendben

A célunk most az, hogy egy input Σ (elsőrendű) formulahalmaz minden elemét ún. **zárt Skolem** alakúra hozzuk, ezt azért, mert a két elsőrendű következtető rendszer, az **alap rezolúció**[1] és az **elsőrendű rezolúció** ilyen formában fogja várni az inputot.

Ennek lépései:

Recap: Zárt Skolem alakra hozás lépései

- **Nyilak eliminálása**: itt elimináljuk a $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\downarrow$, $\uparrow$ jeleket a formulából a szokott módon (azért, hogy a későbbi, prenexre hozó lépés egyszerűbb legyen)
- **Kiigazítás**: itt megszüntetjük a „véletlen” változónév-ütközéseket
- **Prenex alakra hozás**: itt elérjük, hogy a formula elején álljon az összes kvantor
- **Skolem alakra hozás**: ezután az összes kvantor $\forall$ lesz, és a formula elején állnak
- **Lezárás**: itt pedig elérjük, hogy ne legyenek szabadon előforduló változók

A nyilak eliminálása ugyanúgy megy, mint korábban, nézzük rögtön a kiigazítással kapcsolatos új infót:

Recap: Kiigazítás

Egy formula *kiigazított*, ha

- különböző pozíciókon lévő kvantorok különböző változókat kötnek és
- nincs olyan változó, mely szabadon és kötötten is előfordul.

(note: egy x változóelőfordulás szabad, ha nincs $\forall x$ vagy $\exists x$ kvantor hatáskörében; egy $\forall xF$ vagy $\exists xF$ formulában ez a kvantor köti az F-beli szabad változóelőfordulásokat.)

Egy formulát kiigazítani (ekvivalens formulát kapva) tudunk úgy, hogy a **kötött** változókat átnevezzük úgy, hogy ne legyen névütközés; ha az input formulánkban nincs egyik változó se indexelve, ezt pl. megtehetjük **indexeléssel** (akár úgy, hogy változónként külön indexváltozót viszünk, akár egy globális indexváltozóval).

Itt fontos, hogy **a szabadon változóelőfordulásokat ne nevezzük át**.

1. feladat.

Igazítsuk ki a következő formulát:

$$\forall x\Big(\exists y p(x,y) \rightarrow q(x)\Big) \;\wedge\; \exists y\forall x p(x,y) \;\wedge\; \neg q(x).$$

[1] ez nem azért alap, mert ítéletkalkulus, hanem azért, mert alaptermeket fogunk használni benne

Recap: Prenex alakra hozás

Egy F formula **prenex alakú**, ha $F = Q_1x_1 \ldots Q_nx_nF^*$, ahol minden Q_i egy-egy kvantor, és F^*-ban (a formula **magjában**) már nincs kvantor.

Lehet alkalmazni egyesével az átírási szabályokat az előadásról, de – ha a formulában már nincsenek nyilak és ki van igazítva – egy gyorsabb módszer:

- balról jobbra egyszer végigolvasva a formulát, írjuk le a változókat, amilyen sorrendben vannak kvantálva;
- egy kvantort „váltsunk át” a párjára, ha az eredeti formulában **páratlan sok** $\neg$-nek van a belsejében, különben hagyjuk az eredeti formájában;
- ezután a formula magját úgy kapjuk, hogy az eredeti formulából töröljük a kvantorokat.

2. feladat.

Hozzuk prenex alakra a következő formulát (az előző egyik lehetséges eredményét):

$$\forall x_1\Big(\exists y_2 p(x_1,y_2) \to q(x_1)\Big) \ \wedge\ \exists y_3\forall x_4 p(x_4,y_3) \ \wedge\ \neg q(x).$$

Recap: Skolem alakra hozás

Egy F formula **Skolem alakú**, ha $F = \forall x_1\forall x_2 \ldots \forall x_nF^*$ úgy, hogy F^*-ban már nincs kvantor.

Skolem alakra is tudunk hozni formulákat:

- először prenex alakra hozzuk a formulát,
- majd minden $\exists y$ lekötött változóra:
  - töröljük a $\exists y$-t a kvantor prefixből,
  - és a formula magjában y helyére mindenhova egy $f(x_1,\ldots,x_n)$ alakú termet helyettesítünk, ahol f **új** függvényjel, $x_1,\ldots,x_n$ pedig az y **előtt** deklarált $\forall$-változók.

Note: itt fontos, hogy annyira új legyen a bevezetett „Skolem-függvény”, hogy az egész eredeti input Σ-ban se szerepelhet, és mindegyik ilyen $\exists y$ esetében újabb és még újabb függvényjelet kell generáljunk.

3. feladat.

Hozzuk Skolem alakra a következő formulát:

$$\forall x_1\forall y_2\exists y_3\forall x_4\Big(\Big(\neg p(x_1,y_2) \vee q(x_1)\Big) \ \wedge\ p(x_4,y_3) \ \wedge\ \neg q(x)\Big).$$

A Skolem alakról azt lehet érdemes tudni, hogy **nem lesz mindig ekvivalens az eredeti formulával**; viszont, ha az eredeti Σ kielégíthetetlen volt, és Σ' a Skolem alakjaik halmaza, akkor

- vagy Σ is kielégíthető és Σ' is,
- vagy Σ is kielégíthetetlen és Σ' is.

(Ezt hívják úgy, hogy Σ és Σ' „satisfyability equivalent”-ek, jelben $\Sigma \equiv_s \Sigma'$.)

Recap: Lezárás

Lezáráskor a szabad x előfordulások helyére egy-egy új konstansjelet generálunk, pl. c_x-et.

Így már a formulahalmazban nem marad szabad változóelőfordulás.

Note: a generált c_x csak x-től függhet:

- a bevezetett c_x konstansjelek nem szerepelhetnek sehol máshol lezárás előtt;
- ha két (akár különböző) formulában is szerepel x szabadon, akkor mindkettőben ugyanarra a c_x-re kell cseréljük
- de persze ha $x \neq y$, akkor x helyére másik konstansjelet generáljunk, mint y helyére.

4. feladat.

Zárjuk le a következő formulát:

$$\forall x_1 \forall y_2 \forall x_4 \Big(\big(\neg p(x_1, y_2) \vee q(x_1) \big) \ \wedge \ p(x_4, f(x_1, y_2)) \ \wedge \ \neg q(x) \Big).$$

5. feladat.

Hozzuk zárt Skolem alakra a következő formulát:

$$\Big(\exists y \forall x \ p(x, g(f(x), z)) \Big) \to \exists y \neg r(y).$$

6. feladat.

Hozzuk zárt Skolem alakra:

$$\Big(\exists x \ q(z, x, c) \ \wedge \ \exists y \ p(f(z), y) \Big) \to \forall x \exists y \ r(h(x, y)).$$

Aki gyakorolni szeretne Skolem alakra hozást, itt talál hozzá generátort. A generátor egyetlen globális indexet visz kiigazításhoz, és sorban a h_1, h_2, … Skolem-függvényeket és -konstansokat vezeti be, valamint a szabad változók helyére c_i-ket, látszólag (de valójában nem) random i indexekkel; ettől bármi eltérő nevek is persze teljesen jók „új függvényjel”nek.

1. feladat megoldása.

Színekkel jelölve, hogy melyik kvantor melyik változóelőfordulásokra vonatkozik:

$$\forall x\Big(\exists y p(x,y) \to q(x)\Big) \ \land\ \exists y \forall x p(x,y) \ \land\ \neg q(x).$$

Itt látszik, hogy a formula több okból sincs kiigazítva:

- az y változó két különböző helyen is kötve szerepel (kék, zöld),
- az x változó szintén (piros, narancs) és még szabadon is (fekete).

A lényeg, hogy a **kvantált** részeket nevezzük át úgy, hogy megszűnjenek az ütközések; ezt megtehetjük úgy is, hogy az y-ok közül csak az egyiket átnevezzük (mondjuk) y'-re, az x-ek közül meg az egyiket x_1-re, a másikat x_2-re:

$$\forall x_1\Big(\exists y p(x_1,y) \to q(x_1)\Big) \ \land\ \exists y' \forall x_2 p(x_2,y') \ \land\ \neg q(x).$$

Vagy lehet minden kvantált változót feltétel nélkül indexelni is egyetlen sorfolytonos indexet használva:

$$\forall x_1\Big(\exists y_2 p(x_1,y_2) \to q(x_1)\Big) \ \land\ \exists y_3 \forall x_4 p(x_4,y_3) \ \land\ \neg q(x).$$

Vagy változónként külön-külön indexet alkalmazva:

$$\forall x_1\Big(\exists y_1 p(x_1,y_1) \to q(x_1)\Big) \ \land\ \exists y_2 \forall x_2 p(x_2,y_2) \ \land\ \neg q(x).$$

A fontos, hogy a szabad változóelőfordulásokat ne nevezzük át (mert ha Σ-ban több formulánk is van, melyekben szabadon van egy x, akkor a különböző formulák szabad x-ei mind ugyanarról a $\varphi(x)$ objektumról beszélnek eredetileg, és ezt az összefüggést semmiképp nem szabad megváltoztatnunk).

2. feladat megoldása.

Az input:

$$\forall x_1\Big(\exists y_2 p(x_1,y_2) \to q(x_1)\Big) \ \wedge\ \exists y_3 \forall x_4 p(x_4,y_3) \ \wedge\ \neg q(x).$$

Ebben még van egy implikáció, ezt most átírjuk:

$$\forall x_1\Big(\neg\exists y_2 p(x_1,y_2) \vee q(x_1)\Big) \ \wedge\ \exists y_3 \forall x_4 p(x_4,y_3) \ \wedge\ \neg q(x).$$

A kvantor sorrend az eredményben lehet ugyanúgy x_1, y_2, y_3, x_4, mint az eredeti formulában; ahhoz, hogy lássuk, melyiket kell megfordítani, pl. bejelölhetjük a negálások hatáskörét:

$$\forall x_1\Big(\underline{\neg\exists y_2 p(x_1,y_2)} \vee q(x_1)\Big) \ \wedge\ \exists y_3 \forall x_4 p(x_4,y_3) \ \wedge\ \underline{\neg q(x)}.$$

Itt az y_2 kvantora van csak páratlan sok $\neg$ hatáskörében (egyben, a többi nullában, ami páros), ezért csak ezt az egyet fordítjuk a párjára, a többi marad, ami volt, tehát a formula ilyen alakú lesz:

$$\forall x_1 \forall y_2 \exists y_3 \forall x_4 \Big(\dots\Big).$$

A formula magját úgy kapjuk, hogy kitöröljük belőle a kvantorokat (a közvetlen mellettük lévő változóval, persze), **ekkor a zárójelezésre oda kell figyelni**, hogy biztos ugyanaz lesz-e, mint az eredeti:

$$\forall x_1 \forall y_2 \exists y_3 \forall x_4 \Big(\Big(\neg p(x_1,y_2) \vee q(x_1)\Big) \ \wedge\ p(x_4,y_3) \ \wedge\ \neg q(x)\Big).$$

Ez a formula még mindig ekvivalens az eredetivel.

3. feladat megoldása.

Az input:

$$\forall x_1 \forall y_2 \exists y_3 \forall x_4 \Big(\Big(\neg p(x_1,y_2) \vee q(x_1)\Big) \ \wedge\ p(x_4,y_3) \ \wedge\ \neg q(x)\Big).$$

Ez az – előző feladat egyik lehetséges eredményeként kapott – formula már prenex alakban van, és egyedül az y_3 változó van $\exists$-kötve benne. Tehát töröljük az $\exists y_3$ részt a kvantor prefixből, és a magban mindenhol y_3 helyébe pl. $f(x_1,y_2)$-t helyettesítünk (mivel nincs f a formulában, választhatjuk ezt a függvényjelet „új” függvényjelnek; mindenképp x_1-től és y_2-től kell függjön a formulánk, ha ez a kvantor prefix). Eredmény:

$$\forall x_1 \forall y_2 \forall x_4 \Big(\Big(\neg p(x_1,y_2) \vee q(x_1)\Big) \ \wedge\ p(x_4,f(x_1,y_2)) \ \wedge\ \neg q(x)\Big).$$

(Note: vannak azért szofisztikáltabb „függőség-meghatározó” módszerek is, melyek pl. ebben a formulában detektálják, hogy y_3 valójában nem függ sem x_1-től, sem y_2-től, és így csak egy (Skolem-)konstansjelet generálnak az $f(x_1,y_2)$ term helyett y_3 pozícióira, de ez ezen a kurzuson picit túlmutat.)

4. feladat megoldása.

Lezárás input:

$$\forall x_1 \forall y_2 \forall x_4 \Big(\big(\neg p(x_1, y_2) \vee q(x_1) \big) \ \wedge \ p(x_4, f(x_1, y_2)) \ \wedge \ \neg q(x) \Big).$$

Lezárás output, pl. a szabad x helyére a sehol máshol elő nem forduló c_x-et helyettesítve:

$$\forall x_1 \forall y_2 \forall x_4 \Big(\big(\neg p(x_1, y_2) \vee q(x_1) \big) \ \wedge \ p(x_4, f(x_1, y_2)) \ \wedge \ \neg q(c_x) \Big),$$

kész is van.

(Note: ez sem egy ekvivalens, de s-ekvivalens átalakítás.)

---

5. feladat megoldása.

Az input:

$$\Big(\exists y \forall x \ p(x, g(f(x), z)) \Big) \rightarrow \exists y \neg r(y).$$

Nulladik lépésként a pirossal jelölt $\rightarrow$ eliminálása:

$$\neg \Big(\exists y \forall x \ p(x, g(f(x), z)) \Big) \vee \exists y \neg r(y).$$

Kiigazítás, mondjuk kvantoronként újabb indexeket generálva:

$$\neg \Big(\exists y_1 \forall x_2 \ p(x_2, g(f(x_2), z)) \Big) \vee \exists y_3 \neg r(y_3).$$

Prenex alakhoz a $\neg$ scope-ok azonosítása:

$$\underline{\neg \Big(\exists y_1 \forall x_2 \ p(x_2, g(f(x_2), z)) \Big)} \vee \exists y_3 \underline{\neg r(y_3)}.$$

A változók deklarációs sorrendje maradhat y_1, x_2, y_3, mint ahogy most van, de mivel y_1 és x_2 páratlan sok (egy) negálás scope-jában van, az ő kvantoruk megváltozik, tehát a kvantor prefix lehet $\forall y_1 \exists x_2 \exists y_3$. Leírva ezt és a formula magját, törölve a kvantorokat:

$$\forall y_1 \exists x_2 \exists y_3 \Big(\neg \Big(p(x_2, g(f(x_2), z)) \Big) \vee \neg r(y_3) \Big).$$

Skolem alakhoz x_2 és y_3 eliminálása a soros: mindkettő helyére egy, csak y_1-től függő függvénytermet kell írjunk egy-egy új függvényjellel (mert csak az y_1 előzi meg őket $\forall$-kvantorral). Legyen mondjuk $x_2/h(y_1)$ és $y_3/i(y_1)$. Eredmény:

$$\forall y_1 \Big(\neg \Big(p(h(y_1), g(f(h(y_1))), z)) \Big) \vee \neg r(i(y_1)) \Big).$$

Lezáráshoz a z szabad előfordulás helyébe bevezethetünk pl. egy sehol máshol nem szereplő c_z konstansjelet és kész vagyunk:

$$\forall y_1\Big(\neg\Big(p(h(y_1), g(f(h(y_1))), c_z))\Big) \vee \neg r(i(y_1))\Big).$$

Megjegyzés.

Az is teljesen jó megoldás, ha észrevesszük, hogy y_1 nincs is a formulában, miután prenex alakra hoztuk. Ekkor persze lekötni is fölösleges és ehelyett:

$$\forall y_1 \exists x_2 \exists y_3\Big(\neg\Big(p(x_2, g(f(x_2), z))\Big) \vee \neg r(y_3)\Big)$$

kaphatjuk ezt, a $\forall y_1$ törlésével (ha lekötünk egy változót, de nem is használjuk, az olyan, mintha le se kötöttük volna):

$$\exists x_2 \exists y_3\Big(\neg\Big(p(x_2, g(f(x_2), z))\Big) \vee \neg r(y_3)\Big).$$

Itt már egész más a helyzet, mint az előbb: mind x_2, mind y_3 a formula legelején szerepelnek $\exists$-kötve, tehát változóik helyére olyan termeket kell írjunk, melyekben nem szerepel argumentum. Lehet persze ez ugyanúgy $h()$ és $i()$, mint korábban (a nulla-változós Skolem függvényeket **Skolem konstans**nak nevezzük):

$$\Big(\neg\Big(p(h(), g(f(h()), z))\Big) \vee \neg r(i())\Big).$$

Persze a () jeleket el is hagyhatjuk, ahogy szoktuk. Lezárás után:

$$\Big(\neg\Big(p(h, g(f(h), c_z))\Big) \vee \neg r(i)\Big).$$

Ez az alakú formula a következtetés további részében (alap / elsőrendű rezolúció végrehajtásakor) sokkal jobb lesz nekünk, mint az, amit az előbb kaptunk. (Ugyanakkor persze a gyakorlatban ritkán fordul elő „random lekötött dummy változó” az inputban.)

6. feladat megoldása.

Az input:

$$\Big(\exists x\ q(z,x,c)\ \wedge\ \exists y\ p(f(z),y)\Big) \to \forall x \exists y\ r(h(x,y)).$$

Először a nyilakat elimináljuk:

$$\neg\Big(\exists x\ q(z,x,c)\ \wedge\ \exists y\ p(f(z),y)\Big)\ \vee\ \forall x \exists y\ r(h(x,y)).$$

Kvantoronként új indexet használva kiigazítunk, mert nincsenek indexek az inputban:

$$\neg\Big(\exists x_1\ q(z,x_1,c)\ \wedge\ \exists y_2\ p(f(z),y_2)\Big)\ \vee\ \forall x_3 \exists y_4\ r(h(x_3,y_4)).$$

A prenex alakhoz: x_1 és y_2 egy-egy negálás, tehát páratlan sok negálás hatáskörében van, ők a $\exists$ kvantorról átfordulnak $\forall$ kvantorra; a többi kvantor nulla, azaz páros sokéban, tehát ők maradnak, amik voltak. Leírva a kvantor prefixet és eztán magnak a fenti formula maradék részét, melyből a kvantorokat töröljük:

$$\forall x_1 \forall y_2 \forall x_3 \exists y_4 \left(\neg\Big(\ q(z,x_1,c)\ \wedge\ \ p(f(z),y_2)\Big)\ \vee\ \ r(h(x_3,y_4))\right).$$

Az y_4 az egyetlen $\exists$-kötött változónk, helyébe pl. $i(x_1,y_2,x_3)$-at vezetünk be Skolem-függvényként (mert i új jel, és y_4 előtt x_1, y_2 és x_3 szerepel $\forall$-deklarálva):

$$\forall x_1 \forall y_2 \forall x_3 \left(\neg\Big(\ q(z,x_1,c)\ \wedge\ \ p(f(z),y_2)\Big)\ \vee\ \ r(h(x_3,i(x_1,y_2,x_3)))\right).$$

Ugyan külön jelezve nem volt, hogy melyek a konstansjelek és melyek a változók a formulában (x_1, y_2 és x_3 persze változók, hiszen le vannak kötve, de z és c alapvetően bármelyik lehetne), így a konvencionális jelölést tételezzük fel, mely szerint c konstansjel, z pedig változó. A lezáráshoz tehát utolsó lépésként z helyére bevezetünk egy új változót, pl. c_z-t:

$$\forall x_1 \forall y_2 \forall x_3 \left(\neg\Big(\ q(c_z,x_1,c)\ \wedge\ \ p(f(c_z),y_2)\Big)\ \vee\ \ r(h(x_3,i(x_1,y_2,x_3)))\right),$$

és ez az eredeti formulánkkal s-ekvivalens zárt Skolem alakú normálforma.

(Ha még a magot CNF-re is kéne hozzuk, hogy a rezolúciós algoritmusokat el tudjuk kezdeni futtatni rajta, akkor ebből egy darab, három elemű klóz készülne.)