

Logika gyakorlat – 11

Elsőrendű rezolúció

Elsőrendű rezolúció:

Input: Σ formulahalmaz

Output: Kielégíthetetlen-e Σ ?

Algoritmus:

- a formulákat zárt Skolem-re, a magokat CNF-re hozzuk
- a klózatokat egy Σ' formulahalmazba gyűjtjük
- Listát vezetünk a klózokról. A listára felvehetjük:
 - Σ' halmaz elemeit
 - két korábbi, már a listán lévő klóz (C_1 és C_2) **elsőrendű rezolvensét**

1. A változókat átnevezzük, hogy C_1 -ben és C_2 -ben ne legyen két egyforma
2. C_1 -ből egy vagy több **pozitív** literált (pl $\{l_1, \dots, l_n\}$, ahol $n \geq 1$), C_2 -ből egy vagy több **negatív** literált (pl $\{\neg k_1, \dots, \neg k_m\}$, ahol $m \geq 1$), választunk, ahol a **predikátumnak egyformának kell lennie!**
3. Futtatjuk az egyesítési algoritmust a kiválasztott literálok **előjel nélküli** változataira.
4. Ha az egyesítés sikeres, felvesszük:

$$((C_1 - \{l_1, \dots, l_n\}) \cup (C_2 - \{\neg k_1, \dots, \neg k_m\})) \cdot s$$

ahol s az egyesítési algoritmus által visszaadott egyesítő

- ha kijön az üres klóz, akkor Σ kielégíthetetlen

1. Feladat Döntsük el elsőrendű rezolúcióval, hogy kielégíthetetlen-e

$$F = \forall x \forall y (p(x) \wedge (p(f(y)) \rightarrow r(y)) \wedge \neg r(g(x, y)))$$

Megoldás

A formula már Skolemben van. Hozzuk CNF-re a magot:

$$\forall x \forall y (p(x) \wedge (\neg p(f(y)) \vee r(y)) \wedge \neg r(g(x, y)))$$

Gyűjtsük össze a klózat:

$$\Sigma' = \{\{p(x)\}, \{\neg p(f(y)), r(y)\}, \{\neg r(g(x, y))\}\}$$

Rezolúció: (célszerű azzal kezdeni, hogy felvesszük Σ' összes elemét)

1. $\{p(x)\} \in \Sigma'$
2. $\{\neg p(f(y)), r(y)\} \in \Sigma'$
3. $\{\neg r(g(x, y))\} \in \Sigma'$

4. //próba: 1. klóz és 2. klóz:

- átnevezés: nincs változónév ütközés, nem kell átnevezni
- kiválasztás: Egyforma predikátumot választunk: 1. klóz teljesen, 2. klóz 1. literál
- $C = \{p(x), p(f(y))\}$
- egyesítő: $s = [x/f(y)]$
- megmarad: $\{p(x)\} - \{p(x)\} \cup \{\neg p(f(y)), r(y)\} - \{\neg p(f(y))\} = \{r(y)\}$
- rezolvens: $\{r(y)\} \cdot s = \{r(y)\} \quad \text{Res}(1, 2)$

5. //próba: 4 – 3 klózatok:

- átnevezés: **mindkettőben van y!** Nevezzük át a 4. klózban y -t. $\{r(y)\} \cdot [y/z] = \{r(z)\}$
- kiválasztás: Mindkét klózból az egészet választjuk
- $C = \{r(z), r(g(x, y))\}$
- egyesítő: $s = [z/g(x, y)]$
- megmarad: $\{r(y)\} - \{r(y)\} \cup \{\neg r(g(x, y))\} - \{\neg r(g(x, y))\} = \emptyset$
- rezolvens: $\square \Rightarrow F \models \downarrow \quad \text{Res}(3, 4)$

2. Feladat

Döntsük el elsőrendű rezolúcióval, hogy kielégíthetetlen-e

$$F = \forall z \forall x ((\neg p(z, a) \vee \neg p(z, x) \vee \neg p(x, z)) \wedge (p(z, f(z)) \vee p(z, a)) \wedge (p(f(z), z) \vee p(z, a)))$$

Megoldás

A formula már Skolemben és CNF-ben van.

Gyűjtsük össze a klózokat:

$$\Sigma' = \{\{\neg p(z, a), \neg p(z, x), \neg p(x, z)\}, \{p(z, f(z)), p(z, a)\}, \{p(f(z), z), p(z, a)\}\}$$

Rezolúció:

1. $\{\neg p(z, a), \neg p(z, x), \neg p(x, z)\} \in \Sigma'$

2. $\{p(z, f(z)), p(z, a)\} \in \Sigma'$

3. $\{p(f(z), z), p(z, a)\} \in \Sigma'$

4. //próba: 1-2 klózok

- átnevezés: mindkettőben van z ! Nevezzük át a 2-ban z -t: $\{p(z, f(z)), p(z, a)\} \cdot [z/w] = \{p(w, f(w)), p(w, a)\}$
- kiválasztás: válasszuk az elsőből az összes literált (ők mind egyesíthetőek, az a cél, hogy minél kevesebb maradjon meg a rezolvens képzés végére klózból), a 2-ból pedig a 2. literált. (Az első azért nem, mert a 2. helyen álló a konstans egyesítésnél összeakadna az $f(z)$ -vel.)
- $C = \{p(z, a), p(z, x), p(x, z), p(w, a)\}$

Válasszuk az első két literált: $s = [x/a]$

$$C = \{p(z, a), p(a, z), p(w, a)\}$$

Válasszuk ebből is az első két literált: $s = [x/a][z/a]$

$$C = \{p(a, a), p(w, a)\}$$

- egyesítő: $s = [x/a][z/a][w/a]$
- megmaradt: $p(w, f(w)) \cdot [z/a][x/a][w/a]$
- rezolvens: $\{p(a, f(a))\}$ Res(1, 2)

5. //próba: 1 – 4 klózok (az 1-est muszáj, egyelőre csak abban van negatív literál!)

- átnevezés: nincs névütközés (konstans nem baj)
- kiválasztás: válasszuk 1-ből 3. literált, 4-es egész
- $C = \{p(x, z), p(a, f(a))\}$
- egyesítő: $s = [x/a][z/f(a)]$
- megmaradt: $\{\neg p(z, a), \neg p(z, x)\} \cdot s$
- rezolvens: $\{\neg p(f(a), a)\}$ Res(1, 4)

(A két literál pont ugyanaz lesz behelyettesítés után! Elég egyszer leírni!)

6. //próba: 3 – 5 klózik: (5-ös már csak egy elemű, próbáljunk meg még kisebbet gyártani vele. A 3-asban ott a „párja”!)

- átnevezés: nincs névütközés
- kiválasztás: válasszuk a 3-ból 1. literált, 5-ből az egészet
- $C = \{p(f(z), z), p(f(a), a)\}$
- egyesítő: $s = [z/a]$
- megmarad: $p(z, a) \cdot s$
- rezolvens: $\{p(a, a)\}$ Res(3, 5)

7. //próba 1 – 6 klózik: (A 6-os klóz negatív párja lehet bármelyik az 1-esben lévők közül!)

- átnevezés: nincs névütközés
- kiválasztás: válasszuk mindkét klózból az összes literált
- $C = \{p(z, a), p(z, x), p(x, z), p(a, a)\}$
- egyesítő: $s = [x/a][z/a]$
- megmarad: \emptyset
- rezolvens: $\square \Rightarrow F \models \downarrow$ Res(1, 6)