Logika gyakorlat – 09
Alap rezolúció

Alap rezolúció:

- **Input:** elsőrendű logikai formulák halmaza
- **Output:** Kielégíthetetlen-e az input?
- **Algoritmus:**
  - a formulákat zárt Skolem alakra, a magokat CNF-re hozzuk
  - a klózokat egy Σ halmazba gyűjtjük
  - Listát vezetünk a klózokról. A listára felvehetjük:
    - Σ klózainak alap pélányait

      A változók helyére alaptermeket (T_0) helyettesítünk

      Konstansokból és függvényjelekből képezhetjük
    - két korábbi, már a listán lévő klóz rezolvensét
  - ha kijön az üres klóz, akkor az input kielégíthetetlen

1. Feladat Döntsük el alaprezolúcióval, hogy kielégíthetetlen-e:

$$F = \exists x \forall y\ (p(x,y) \leftrightarrow \neg p(y,y))$$

Megoldás

A **Skolem alak**ra hozáshoz előbb hozzuk CNF-re a magot:

$$F = \exists x \forall y\ ((\neg(p(x,y) \vee \neg p(y,y)) \wedge ((p(x,y) \vee p(y,y)))$$

A $\exists x$ eliminálásához egy új konstanst (pl a) kell bevezetni:

$$F = \forall y\ ((\neg(p(a,y) \vee \neg p(y,y)) \wedge ((p(a,y) \vee p(y,y)))$$

Gyűjtsük össze a **klózok**at:

$\Sigma = \{\{\neg p(a,y), \neg p(y,y)\}, \{p(a,y), p(y,y)\}\}$

Gyűjtsük össze az **alapterm**eket:

$T_0 = \{a\}$

Rezolúció:

1. $\{\neg p(a, a)\}$ $\quad$ //1. klóz $[y/a] \in E'(\Sigma)$
2. $\{p(a, a)\}$ $\quad$ //2. klóz $[y/a] \in E'(\Sigma)$
3. $\square \;\Rightarrow\; F \vDash \downarrow$ $\quad$ Res$(1, 2)$

2. Feladat Döntsük el alap rezolúcióval, hogy kielégíthetetlen-e:

$$F = \Big(\forall x\ p(x)\Big) \wedge \Big(\forall y\ \big((p(f(y))) \to r(y)\big)\Big) \wedge \exists z\ \neg r(z)$$

Megoldás

Először hozzuk prenex alakra a formulát:

$$F = \forall x \forall y \exists z\ \Big(p(x) \wedge \Big((\neg p(f(y))) \vee r(y)\Big) \wedge \neg r(z)\Big)$$

A $\exists z$ eliminálásához egy új kétváltozós függvényjelet vezetünk be:

$$F = \forall x \forall y\ \Big(p(x) \wedge \Big((\neg p(f(y))) \vee r(y)\Big) \wedge \neg r(g(x, y))\Big)$$

Gyűjtsük össze a klózokat: $\Sigma = \{\{p(x)\}, \{\neg p(f(y)), r(y)\}, \{\neg r(g(x, y))\}\}$

Gyűjtsük össze az alaptermeket:

Ha Σ-ban nincs konstans, felveszünk egyet, pl c

$T_0 = \{c, f(c), g(c, c), g(f(c), c), f(g(c, c)), \ldots\}$

Rezolúció:

1. $\{p(c)\}$ $\quad$ //1. klóz $[x/c] \in E'(\Sigma)$

> Zsákutca, mert nem fogjuk tudni legyártani $\{\neg p(c)\}$-t a 2. klózból egyetlen T_0-beli alapterm behelyettesítésével sem, mivel ott p-ben van egy függvényjel, azt pedig nem tudjuk „kiszedni”.

2. $\{p(f(c))\}$ $\quad$ //1. klóz $[x/f(c)] \in E'(\Sigma)$
3. $\{\neg p(f(c)), r(c)\}$ $\quad$ //2. klóz $[y/c] \in E'(\Sigma)$
4. $\{r(c)\}$ $\quad$ Res$(2, 3)$

> Zsákutca, mert nem fogjuk tudni legyártani $\{\neg r(c)\}$-t a 3. klózból egyetlen T_0-beli alapterm behelyettesítésével sem, mivel ott r-ben van egy kétváltozós g függvényjel, azt pedig nem tudjuk „kiszedni”.

5. $\{p(f(g(c,c)))\}$ — $//1.$ klóz $[x/f(g(c,c))] \in E'(\Sigma)$
6. $\{\neg p(f(g(c,c))), r(g(c,c))\}$ — $//2.$ klóz $[y/g(c,c)] \in E'(\Sigma)$
7. $\{r(g(c,c))\}$ — $\mathrm{Res}(5,6)$
8. $\{\neg r(g(c,c))\}$ — $//3.$ klóz $[x/c, y/c] \in E'(\Sigma)$
9. $\square \;\Rightarrow\; F \vDash\downarrow$ — $\mathrm{Res}(7,8)$

3. Feladat

Döntsük el alap rezolúcióval, hogy kielégíthetetlen-e:

$$F = \forall x \forall y \forall z \Big(p(x, f(y)) \wedge \big(p(f(x), z) \rightarrow r(x, g(z))\big) \wedge \big(\neg r(f(y), g(y)) \vee \neg p(y,y)\big)\Big)$$

Megoldás

A formula már Skolem alakban van, hozzuk **CNF-re a mag**ot:

$$F = \forall x \forall y \forall z \Big(p(x, f(y)) \wedge \big(\neg p(f(x), z) \vee r(x, g(z))\big) \wedge \big(\neg r(f(y), g(y)) \vee \neg p(y,y)\big)\Big)$$

Gyűjtsük össze a klózokat:

$\Sigma = \{\{(p(x, f(y))\}, \{\neg p(f(x), z), r(x, g(z))\}, \{\neg r(f(y), g(y)), \neg p(y,y)\}\}$

Gyűjtsük össze az alaptermeket: Ha Σ-ban nincs konstans, felveszünk egyet, pl c

$T_0 = \{c, f(c), g(c), f(f(c)), f(g(c)), g(g(c)), \ldots\}$

Rezolúció:

1. $\{\neg p(f(c), g(c)), r(c, g(g(c)))\}$ — $//2.$ klóz $[x/c, z/g(c)] \in E'(\Sigma)$

> Zsákutca, mert az 3. klózban a r első argumentuma egy függvényjel.

2. $\{\neg p(f(f(c)), c), r(f(c), g(c))\}$ — $//2.$ klóz $[x/f(c), z/c] \in E'(\Sigma)$
3. $\{\neg r(f(c), g(c)), \neg p(c,c)\}$ — $//3.$ klóz $[y/c] \in E'(\Sigma)$
4. $\{\neg p(f(f(c)), c), \neg p(c,c)\}$ — $\mathrm{Res}(2,3)$

> Zsákutca, mert nem fogjuk tudni legyártani $\{p(c,c)\}$-t az 1. klózból egyetlen T_0-beli alapterm behelyettesítésével sem, mivel ott a második argumentum egy függvényjel.

5. $\{\neg r(f(f(c)), g(f(c))), \neg p(f(c), f(c))\}$ — $//3.$ klóz $[y/f(c)] \in E'(\Sigma)$
6. $\{p(f(c), f(c))\}$ — $//1.$ klóz $[x/f(c), y/c] \in E'(\Sigma)$
7. $\{\neg r(f(f(c)), g(f(c)))\}$ — $\mathrm{Res}(5,6)$
8. $\{\neg p(f(f(f(c))), f(c)), r(f(f(c)), g(f(c)))\}$ — $//2.$ klóz $[x/f(f(c)), z/f(c)] \in E'(\Sigma)$
9. $\{\neg p(f(f(f(c))), f(c))\}$ — $\mathrm{Res}(7,8)$
10. $\{p(f(f(f(c))), f(c))\}$ — $//1.$ klóz $[x/f(f(f())), y/c] \in E'(\Sigma)$
11. $\square \;\Rightarrow\; F \vDash\downarrow$ — $\mathrm{Res}(9,10)$

Help Box

Az alaptermek (T_0) legyártása:

- Kikeressük a klózokban szereplő az összes konstanst $(a, b, c, d, \ldots)$ és felvesszük T_0-ba. Ha nincs a formulában konstans, választunk egy tetszőlegeset, és felvesszük azt.
- Kikeressük a klózokban szereplő összes nem-konstans függvényjelet $(f, g, h, i, \ldots)$ és az argumentumokba tetszőleges, már T_0-ban szereplő termeket írunk. (Ha nincs függvényjel a klózokban, nem baj.)
- *Hint: ha a klózokban van legalább egy függvényjel, az alaptermek halmaza végtelen. Ne próbáljuk meg felsorolni az összeset!*

Klózok alappéldányainak gyártása:

- Választunk egy tetszőleges klózt
- A klózban szereplő minden változó helyére tetszőleges T_0-beli alaptermet helyettesítünk (az egyformákba ugyanazt)

How to win:

- ha hamar meg akarjuk kapni az üres klózt, célszerű megkeresni azokat a literálokat, amelyeknek pozitív, vagy negatív alakjára valamilyen ,,korlátozásunk" van, pl: van benne valahol függvényjel
- próbáljunk rá a legegyszerűbb helyettesítéssel, ami eleget tesz ezeknek
- Pl 3. példában
  - $\{\{p(x, f(y))\}, \{\neg p(f(x), z), r(x, g(z))\}, \{\neg r(f(y), g(y)), \neg p(y, y)\}\}$
  - $r(f(\ldots), g(\ldots))$ alak kell mindenképp (2. és 3. klóz)
  - de akkor a 3. klózban $p(\ldots, f(\ldots))$ alakot kell legyártanunk (1. klóz miatt)
  - válasszuk a legegyszerűbbet: a 3. klózban y helyére $f(c)$-t (f-et muszáj, egyváltozós, a legegyszerűbb alakja ez)
  - el is jutottunk a célravezető megoldásunkhoz