Logika és informatikai alkalmazásai

Iván Szabolcs

2022 tavasz

A kurzusról

- PTI BSc második féléven kötelező
  - mérnökinfó, gazdinfó spinoff másik kurzus — ők azt vegyék fel
- Előfeltétel: dimategy gyak — easy
- Jelenlétiben vagyunk, TIK pince hétfő 18-20
  - tavalyi ea playlist YouTube-on fenn van — bejönni nem kötelező, nem óvoda ez
  - discord szoba, discord DM, coospace üzi, email
  - coospace hirdetmények, discord tárgyas szoba pinek
- Előadás tesztek — olyanoknak kell megismételni a kurzust...
  - 6 héten lesz 2-2 feladat, számolós/gondolkodós
  - 20 perces, kedden egész nap tölthető, újraíró csütörtök egész nap
  - kb jó: 1 pont, rossz: 0 pont, max: 12 pont
  - kell: 6 pont, vizsgaplusz: 6 fölötti rész
- Vizsga — csak ha megvan a 6 házipont + átmenő gyakjegy
  - coospace beugró, 10 darab gondolkodós kérdés, 10×4 pont
  - mindent lehet használni, kivéve realtime másik személyt
  - pass/fail $40 - 60$ százalék közt lesz valahol — curve-based, vizsgánként
  - erre kettes jár, vagy szóbeli 1-5 jegyért — „sétáltatom” vagy „sziauram”

Tematika

- Ítéletkalkulus: következtetési algoritmusok. SAT solverek.
- Elsőrendű logika: upgradelt következtetési algoritmusok. Code contractok.
- Másodrendű logika.

Ezen kívül abban is szerzünk némi rutint, hogy hogyan is lehet bebizonyítani állításokat.

Definíció - állítás - bizonyítás

Definíció

```
size_t my_size_of(char* c){
  size_t i = 0;
  while(c[i]) { i++; }
  return i;
}
```

Állítás, lemma, segédtétel, tétel, whatever

A $\mathrm{my\_size\_of}$ függvény egy 0-terminált C string hosszát adja vissza.

Kommentbox

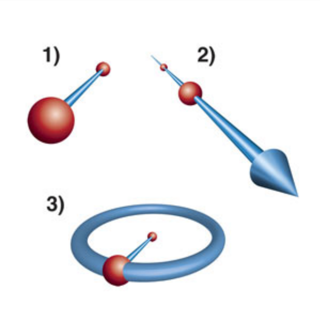
térkitöltő jelleggel

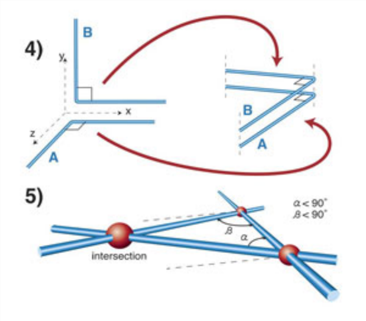
Bizonyítás (-like érvelés, semiautomatizálható)

- A futás minden pillanatában igaz, hogy „minden $0 \leq \mathrm{j} < \mathrm{i}$-re $\mathrm{c}[\mathrm{j}] \neq 0$":
- Kezdetben $\mathrm{i} = 0$, ilyen j nincs is, „triviálisan teljesül"
- Ha belépünk a ciklusmagba, akkor még ezen felül $\mathrm{c}[\mathrm{i}] \neq 0$ is igaz
- Tehát ekkor i-t megnövelve továbbra is igaz marad az állítás
- A ciklusmagból kilépéskor $\mathrm{c}[\mathrm{i}] = 0$ és az invariáns miatt ez az első ilyen index $\Rightarrow$ ha ekkor visszaadjuk, az épp a string hossza lesz

Background: Euklidesz

1. „bármely két pont összeköthető egy egyenes szakasszal”
2. „bármely egyenes szakasz tetszőlegesen meghosszabbítható”
3. „bármely pont körül bármekkora sugárral lehet kört rajzolni”
4. „két derékszög mindig egyforma”
5. „ha egy egyenest két másik összesen kisebb, mint 180 fokban metsz, akkor metszik egymást” not so sure, but ok





source: `https://plus.maths.org`

Background: Euklidesz

- A geometriai tételek ezekből az axiómákból következnek, logikai következtetésekkel.
- Axióma: (az adott terület) igaznak elfogadott alapigazságai
  - de tkp. bármit „kikiálthatunk” axiómának – ld Bolyai geometria
- Következtetés: stay tuned well, erről szól tkp a kurzus
- Ugyanez igaz pl. a halmazelméletre, csoportelméletre stb.
  - Kb. a XIX. század vége óta a matematika formális nyelve a logika
  - Cauchy „tétele” folytonos függvénysorokról

    Cauchy felcserélt véletlen két kvantort. Don’t do that.
  - Russel paradoxona az összes halmaz halmazáról

    az „önmagukat nem tartalmazó halmazok halmaza” tartalmazza önmagát?

    az összes halmaz halmazának a hatványhalmaza ugyanakkora, mint ő? Cantor says NO but yes

    á ez akkor nem is halmaz, jelentsen ez bármit
- Informatika: a következtetést algoritmikusan végezzük, lehetőleg (legalább félig) automatikusan
  - ezt már Leibniz kigondolta a XVII. században
  - majd Hilbert is a XX. század elején
  - Gödel pedig megmutatta, hogy ez nem megy

Informatika, számítástudomány

- Áramkörök tervezése: egy áramkör egy logikai függvényt implementál
- Automataelmélet: „reguláris” nyelv mindig definiálható egy bizonyos („monadikus másodrendű”) logikában fonya, áfonya
- Adatbázisok: az SQL queryk mind elsőrendű logikai lekérdezések adatbé
- Logikai programozás: a Prolog egy elsőrendű logikai következtető motor, programozási nyelvnek álcázva prognyelvek
- Rendszerek verifikációja: egy metódus kielégíti-e a (valamilyen logikában megadott) specifikációt hsrv
- Mesterséges intelligencia: sok esetben (maybe fuzzy) logikát használ mestint
- Bonyolultságelmélet: a legtöbb „bonyolultsági osztály” pontosan karakterizálható egy-egy logikával bonya
- Programozási nyelvek szemantikája: az elemi utasítások elő- és utófeltételei, hatásuk formalizálva van alga

nem php, tho

Informatika: a SAT probléma

- a SAT (satisfiability) probléma: input egy (ítéletkalkulusbeli) logikai formula, adjuk meg a változóknak egy kielégítő értékadását! (Ha van.)
- A probléma nehéz: n változó – 2^n lehetőség bonya: „$\mathbf{NP}$-nehéz”
- 2^{100} művelet elvégzése kb. 4 évbe telne a Föld összes jelenlegi számítási kapacitását egyszerre használva (becslés, 2017)
  - 2^{120}: 4 millió év
  - 2^{200}: 5×10^{30} év – annyi nincs
- Heurisztikák kellenek
- Minden évben van SAT Competition, amin SAT solvereket versenyeztetnek több tracken
- 2016 ősszel: egy laptopon kb. 900-változós formulát kb. 0.5sec alatt soon
- A XXI. században intenzíven fejlődik a terület
  - 1995-es évek: kb. 100 változóra 200 feltétel
  - 2010: kb. $1.000.000$ változóra $5.000.000$ feltétel

SAT, de minek?

- SAT Competition egyik track: Application Benchmark
  - Erre cégek küldik be az őket érdeklő nehéz problémákat logikai formulával leírva
  - 2016-ban pl. a francia vasúthálózat forgalomirányításáról is kérdezték, biztonságos-e
- IBM: egy hardware egység teljesíti-e a specifikációt
  - 2006-os SAT Race-re (ez Industrial Only) formulával leírva: 170.000 változó, 725.000 feltétel
  - erre egyébként $500+$ ipari benchmark érkezett
- Az Intelnél, IBM-nél és Microsoftnál ma a SAT solving a domináns technológia a hardware tervek verifikációjára
- AI Planning: döntéshozatal egy vagy több cél elérése érdekében, erőforrást optimalizálva – ez is felírható formulával
- Handbook of SAT - 2009, 966 oldal

SAT, de minek?

- Nagyon sok „kombinatorikus” keresési problémát fel lehet írni SAT problémaként.
- Egy use case-t látni fogunk hamarosan: a tatami coveringet.

Egy másik gyakori alkalmazás: a Code Contractok ellenőrzése (ezen a kurzuson: „Hoare kalkulus”)

Code contractok – C + ACSL (ANSI C Spec Lang)

```c
int f(int A, int B) {
  int Q = 0, R = A;
  while (R >= B) {
    R -= B; Q++;
  }
  return R;
}
```

A jobb oldali annotációk segítségével

automatikusan

ellenőrizhető, hogy a függvény implementációja helyes

```c
//@ requires A>=0 && B>0;
//@ ensures \result == A mod B;
int f(int A, int B) {
  int Q = 0, R = A;
  //@ assert A>=0 && B>0 && Q==0 && R==A;
  while (R >= B) {
  //@ assert A>=0 && B>0 && R>=B &&
        A==Q*B+R;
    R -= B; Q++;
  }
  //@ assert A>=0 && B>0 && R>=0 && R<B
        && A==Q*B+R;
  return R;
}
```

btw ez csak előadáson lesz

Code contractok – Java + ESC (Extended Static Checker)

```
public class OrderedArray {
  int a[];
  int nb;
  //@invariant nb >= 0 && nb <= 20
  //@invariant (\forall int i; (i >= 0 && i < nb-1) ==> a[i] <= a[i+1])
  public OrderedArray() { a = new int[20]; nb = 0; }
  public void add(int v) {
    if (nb >= 20) return;
    int i;
    for (i=nb; i > 0 && a[i-1] > v; i--) a[i] = a[i-1];
    a[i] = v; nb++;
  }
}
```

Az ESC automatikusan le tudja ellenőrizni, hogy egy OrderedArray a teljes élettartama során tényleg rendezett sorrendben fogja tárolni az elemeket

Code contractok – Dafny (MS, C#)

```
function Fib( n: nat ) : nat {
  if ( n < 2 ) then n else Fib( n-1 ) + Fib( n-2 )
}
method computeFib( n: nat ) returns ( x: nat )
  ensures x == Fib( n );
{
  var i:=0;
  x := 0;
  var y:=1;
  while( i < n )
    invariant 0 <= i <= n;
    invariant x == Fib( i );
    invariant y == Fib( i + 1 );
  {
    x,y := y,x+y;
    i := i+1;
  }
}
```

Rekurzív, helyes $O(1.62^n)$

Iteratív, gyors $O(n)$

automatikusan ellenőrizhető:

ugyanazt adják

némi hinttel

Ítéletkalkulus vs. elsőrendű logika

A kurzus első felében ítéletkalkulussal fogunk foglalkozni:

- a változók a $\{0, 1\}$ halmazból kapnak értéket
  (0: hamis, 1: igaz – igazságértékek, bitek)
- a formulák változókból épülnek fel ítéletlogikai összekötő jelek
  (konnektívák, mint a $\neg$ és a $\vee$, sőt a $\downarrow$) alkalmazásával (zárójelezve)

A második felében elsőrendű logikával:

- a változók objektumok egy halmazából kapnak értékeket
- a konnektívákon kívül kvantorok is használhatóak lesznek (mint a $\forall$)
- az objektumokat függvények fogják újabb objektumokba, és predikátumok fogják igazságértékké transzformálni

Az ítéletkalkulust hívjuk még ítéletlogikának vagy nulladrendű, esetleg propozicionális logikának is.

Az elsőrendű logikát pedig predikátumkalkulusnak.

Ha precízen akarunk beszélni valamiről, általában megadjuk a nyelvünk szintaxisát és szemantikáját.

Szintaxis

Mi az, amit leírhatunk? Milyen stringek fognak jelentést hordozni? Melyek a „jól formált kifejezések”?

- progalap: mi lehet egy azonosító? mi a függvény fejléc? mi egy függvénytörzs? mi egy értékadás?
- logika: mi a formula?

Szemantika

Mit jelent, amit leírhatunk a szintaxis szabályai szerint? Hogy értékeljük ki? Adott környezetben mi az eredménye?

- progalap: mit csinál egy értékadás? mit egy összeadás? mit egy függvényhívás?
- logika: mi a formula értéke egy adott változó-értékadás mellett?

Szintaxis

Változók

Rögzítjük (ítélet)változóknak egy $\{p_1, p_2, \ldots\}$ (végtelen) halmazát.

A változókat általában $p, q, r, p_1, p_2, p', \ldots$ jelöli majd.

Logikai konstansjelek

A $\uparrow$ („igaz") és $\downarrow$ („hamis") jelek.

Logikai konnektívák

A $\wedge$ (konjunkció, és), $\vee$ (diszjunkció, vagy), $\neg$ (negáció, nem), $\rightarrow$ (implikáció, nyíl) és $\leftrightarrow$ (akkor és csak akkor, pontosan akkor, duplanyíl) jelek.

Kényelmi okokból a konstansjeleket „nulla változós" konnektívaként kezeljük.

Szintaxis

Formulák

- Minden változó és minden logikai konstans formula;
- Ha F formula, akkor $(\neg F)$ is formula;
- Ha F és G formulák, akkor $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \to G)$, $(F \leftrightarrow G)$ is formulák;
- Más formula nincs.

Az ehhez hasonló „ez meg ez meg ez X, más X nincs" alakú konstrukciókat úgy is szokták mondani, hogy „az X-ek halmaza a legszűkebb olyan Y halmaz, melyre ez meg ez meg ez Y".

Szintaxis: példák

Formulák például: p, $(\neg p)$, $((\neg p) \vee q)$, $(\uparrow \rightarrow p)$ és

$$((\neg(((\neg p) \vee q) \vee r)) \rightarrow (\neg q)).$$

Az olvashatóság kedvéért egyes zárójeleket elhagyunk:

- a legkülsőket
- a következő precedencia-sorrend szerint elhagyhatókat: legerősebb a $\neg$, majd $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ és végül a leggyengébb a $\leftrightarrow$
- a $\wedge$ és $\vee$ műveletek asszociatívak — pl. $(F \vee G) \vee H$ helyett $F \vee G \vee H$-t írunk
  de nem egymás közt! $(F \vee G) \wedge H$ így marad
- a $\rightarrow$ művelet jobb-asszociatív — $F \rightarrow G \rightarrow H$ az $F \rightarrow (G \rightarrow H)$ zárójelezést jelenti

Ezekkel az előző formulából ez lesz:

$$\neg(\neg p \vee q \vee r) \;\rightarrow\; \neg q$$

Szemantika

Hogy a konnektívák szemantikájáról tudjunk beszélni, mindhez rendelünk egy Boole-függvényt:

(n-változós) Boole-függvény

Bitvektort egy bitbe képző függvény: $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$.

Az f/n jelzi, hogy az f egy n-változós függvény.

A $\neg$ unáris Boole-függvény: $\neg 0 = 1$, $\neg 1 = 0$.

A bináris konnektívákhoz rendelt Boole-függvények igazságtáblája:

G	H	$(G \vee H)$	$(G \wedge H)$	$(G \to H)$	$(G \leftrightarrow H)$
0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1

(Egy n-változós Boole-függvény igazságtáblája 2^n-soros.)

Szemantika

Hogy egy formulát ki tudjunk értékelni, kell egy (változó)értékadás:

Értékadás

Egy $\mathcal{A}$ függvény, mely minden változóhoz egy igazságértéket (bitet: 0 vagy 1) rendel.

Az $\mathcal{A}$ értékadás mellett az F formula értékét $\mathcal{A}(F)$ jelöli:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(p) &:= \mathcal{A}(p) \quad \text{warning: not the same } \mathcal{A} \\
\mathcal{A}(\uparrow) &:= 1 \\
\mathcal{A}(\downarrow) &:= 0 \\
\mathcal{A}(\neg F) &:= \neg\mathcal{A}(F) \\
\mathcal{A}(F \vee G) &:= \mathcal{A}(F) \vee \mathcal{A}(G) \\
\mathcal{A}(F \wedge G) &:= \mathcal{A}(F) \wedge \mathcal{A}(G) \\
\mathcal{A}(F \rightarrow G) &:= \mathcal{A}(F) \rightarrow \mathcal{A}(G) \\
\mathcal{A}(F \leftrightarrow G) &:= \mathcal{A}(F) \leftrightarrow \mathcal{A}(G)
\end{aligned}$$

Magyarul

Tehát rekurzívan kiértékeljük az „eggyel egyszerűbb" formulákat és a legkülső konnektívának megfelelően kombináljuk az értékeket.

„kiterjesztése" az értékadásnak

mert változókra továbbra is ugyanazt adja vissza, mint eddig, de most már több mindenre van értelmezve

Formula-kiértékelés példa

Ha $F = (p \to q) \vee (\neg r \ \leftrightarrow \ p)$ és $\mathcal{A} : p \mapsto 1, q \mapsto 0, r \mapsto 0$, akkor

- $\mathcal{A}(p \to q) = 1 \to 0 = 0$
- $\mathcal{A}(\neg r) = \neg 0 = 1$
- $\mathcal{A}(\neg r \ \leftrightarrow p) = 1 \leftrightarrow 1 = 1$
- tehát $\mathcal{A}(F) = 0 \vee 1 = 1$.

Ha az $\mathcal{A}$ értékadásra és az F formulára $\mathcal{A}(F) = 1$, azt úgy is írjuk, hogy $\mathcal{A} \vDash F$ és úgy is mondjuk, hogy $\mathcal{A}$ kielégíti F-et vagy $\mathcal{A}$ egy modellje F-nek vagy $\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}(F)$.

Ha egy formulának van modellje, akkor azt mondjuk, kielégíthető;
ha nincs neki, kielégíthetetlen.
Ha az F formulának minden kiértékelés modellje, akkor tautológia.
Ennek jele $\vDash F$.

Formula-kiértékelés példa

Ha $F = (p \to q) \lor (\neg r \ \leftrightarrow \ p)$ és $\mathcal{A} : p \mapsto 1, q \mapsto 0, r \mapsto 0$, akkor

- $\mathcal{A}(p \to q) = 1 \to 0 = 0$
- $\mathcal{A}(\neg r) = \neg 0 = 1$
- $\mathcal{A}(\neg r \ \leftrightarrow p) = 1 \leftrightarrow 1 = 1$
- tehát $\mathcal{A}(F) = 0 \lor 1 = 1$.

Ha az $\mathcal{A}$ értékadásra és az F formulára $\mathcal{A}(F) = 1$, azt úgy is írjuk, hogy $\mathcal{A} \vDash F$ és úgy is mondjuk, hogy $\mathcal{A}$ kielégíti F-et vagy $\mathcal{A}$ egy modellje F-nek vagy $\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}(F)$.

Ha egy formulának van modellje, akkor azt mondjuk, kielégíthető;
ha nincs neki, kielégíthetetlen.
Ha az F formulának minden kiértékelés modellje, akkor tautológia.
Ennek jele $\vDash F$.

Formula-kiértékelés példa

Ha $F = (p \to q) \vee (\neg r \ \leftrightarrow \ p)$ és $\mathcal{A} : p \mapsto 1, q \mapsto 0, r \mapsto 0$, akkor

- $\mathcal{A}(p \to q) = 1 \to 0 = 0$
- $\mathcal{A}(\neg r) = \neg 0 = 1$
- $\mathcal{A}(\neg r \ \leftrightarrow p) = 1 \leftrightarrow 1 = 1$
- tehát $\mathcal{A}(F) = 0 \vee 1 = 1$.

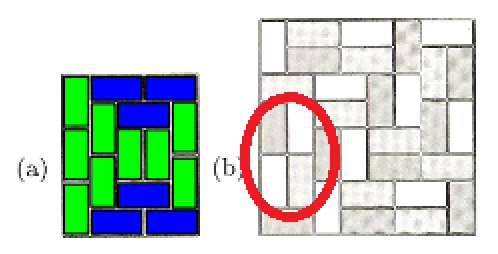
Ha az $\mathcal{A}$ értékadásra és az F formulára $\mathcal{A}(F) = 1$, azt úgy is írjuk, hogy $\mathcal{A} \vDash F$ és úgy is mondjuk, hogy $\mathcal{A}$ kielégíti F-et vagy $\mathcal{A}$ egy modellje F-nek vagy $\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}(F)$.

Ha egy formulának van modellje, akkor azt mondjuk, kielégíthető;
ha nincs neki, kielégíthetetlen.
Ha az F formulának minden kiértékelés modellje, akkor tautológia.
Ennek jele $\vDash F$.

Honnan lesz formulánk?

Vegyük pl. a következő kombinatorikus keresési feladatot.

- Adott egy $n \times m$-es téglalap, melyet 2×1-es dominókkal (forgatni ér) szeretnénk lefedni.
- A lefedésnek hogy „szép” legyen, tatami lefedésnek kell lennie: négy dominó nem találkozhat egy sarkon.
- Néhány dominó előre fel van rakva a táblára.
- Adjunk meg egy tatami lefedését a táblának, melyben a megadott dominók a megadott módon szerepelnek!



source: https://canadam.math.ca/2013/slides/Erickson.Alejandro.Tatami.pdf

Modellezés formula-kielégítési problémaként (SATként)

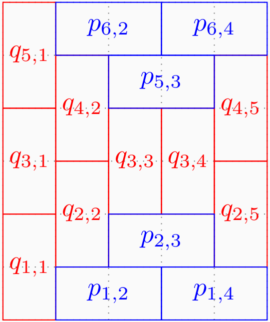
A táblán minden szomszédos mezőket összekötő élhez rendelünk egy változót, pl.

- $p_{i,j}$ legyen az i. sor j. oszlopából jobbra menő él,
- $q_{i,j}$ pedig a felfele menő él,

amilyen i, j-kre ilyen élek vannak. Pl. egy 6×5-ös táblán:

$$
\begin{array}{ccccc}
p_{6,1} & p_{6,2} & p_{6,3} & p_{6,4} & \\
q_{5,1} & q_{5,2} & q_{5,3} & q_{5,4} & q_{5,5} \\
p_{5,1} & p_{5,2} & p_{5,3} & p_{5,4} & \\
q_{4,1} & q_{4,2} & q_{4,3} & q_{4,4} & q_{4,5} \\
p_{4,1} & p_{4,2} & p_{4,3} & p_{4,4} & \\
q_{3,1} & q_{3,2} & q_{3,3} & q_{3,4} & q_{3,5} \\
p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} & p_{3,4} & \\
q_{2,1} & q_{2,2} & q_{2,3} & q_{2,4} & q_{2,5} \\
p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} & p_{2,4} & \\
q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} & q_{1,4} & q_{1,5} \\
p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} & p_{1,4} &
\end{array}
$$

Az elképzelés: azokat a változókat (éleket) állítsuk 1-re, amiket egy dominó fed le.



Modellezés SATként

Azt kell megfogalmaznunk, hogy mikor felel meg egy értékadás egy megoldásnak, vagyis egy tatami lefedésnek.

- Minden mezőt lefed legalább egy dominó: vagyoljuk a rá illeszkedő éleket
- Minden mezőt legfeljebb egy dominó fed: az egy mezőre illeszkedő éleket nand kapcsolatba hozzuk: $\neg(x \wedge y)$
- A tatami feltétel: minden „sarok mellett" van igaz változó – ezeket is vagyoljuk

A fenti feltételeket pedig összeéseljük. Részlet:

- $(p_{4,2} \vee q_{4,2} \vee p_{4,1} \vee q_{3,2})$ – a 4. sor 2. mezőjét fedi egy dominó;
- $\neg(p_{4,2} \wedge q_{4,2})$ – ezt a mezőt nem fedi egyszerre fentről és jobbról egy dominó;
- $(p_{3,1} \vee q_{2,1} \vee p_{2,1} \vee q_{2,2})$ – a 2. sor 1. oszlop sarkán nem érintkezik négy sarok

Plusz: az előre megadott dominóknak megfelelő változókat 1-re állítjuk

Modellezés SATként

- A megadott teszteken (30×30-as tábla, kb 30 ledobott dominó) ez kb. 900 változó és 7.000 feltétel
- Ez egy mai SAT solvernek nem méret

unless ha a formula szándékosan „nehéz" SAT példánynak készült

- A formalizálás implementálása, oda-vissza konverzió tatami lefedés és formula közt: félóra, tops

A mai SAT solverek jók és egyre jobbak $\Rightarrow$ mindig jó ötlet elgondolkodni rajta, hogy az aktuális problémánkat formulává tudjuk-e konvertálni hasonló módon

More of this @ bonya

A modellek halmaza

$\mathrm{Mod}(F)$

Ha F egy formula, akkor $\mathrm{Mod}(F)$ az F összes modelljének a halmaza.

Tehát hogy $\mathcal{A}(F) = 1$, vagy $\mathcal{A} \vDash F$, úgy is írhatjuk, hogy $\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}(F)$.

Pl. ha $\mathcal{A}(p) = 1$, $\mathcal{A}(q) = 0$, $\mathcal{A}(r) = 0$, akkor

$$\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}\Big((p \to q) \vee (\neg r \;\leftrightarrow p)\Big).$$

Így pl. F pontosan akkor kielégíthetetlen, ha $\mathrm{Mod}(F) = \emptyset$.

Ha Σ formulák egy halmaza és $\mathcal{A}$ egy értékadás, akkor $\mathcal{A} \vDash \Sigma$ azt jelenti, hogy $\mathcal{A}$ kielégíti Σ összes elemét.

Hasonlóan $\mathrm{Mod}(\Sigma)$-ba azok az értékadások tartoznak, melyek kielégítik Σ összes elemét.

Pl. $\mathrm{Mod}(\emptyset)$-be az összes értékadás beletartozik, mert egyik sem sért meg egy feltételt sem a nullából

Tautológiák és kielégíthetetlenség

Könnyű látni, hogy

Az F formula pontosan akkor tautológia, ha $\neg F$ kielégíthetetlen.

Hiszen

$$\begin{aligned}
F \text{ tautológia} &\Leftrightarrow \text{ minden } \mathcal{A}\text{-ra } \mathcal{A}(F) = 1 \\
&\Leftrightarrow \text{ minden } \mathcal{A}\text{-ra } \neg\mathcal{A}(F) = 0 \\
&\Leftrightarrow \text{ minden } \mathcal{A}\text{-ra } \mathcal{A}(\neg F) = 0 \\
&\Leftrightarrow \neg F \text{ kielégíthetetlen.}
\end{aligned}$$

A tautológiák persze kielégíthetők.

Logikai következmény

A $\vDash$ jel egy másik overloadja:

Ha F és G formulák, akkor $F \vDash G$ („F-nek logikai következménye G") azt jelöli, hogy minden $\mathcal{A}$-ra ha $\mathcal{A}(F) = 1$, akkor $\mathcal{A}(G) = 1$.

- ha F igaz, akkor G is igaz
- $\mathrm{Mod}(F) \subseteq \mathrm{Mod}(G)$

„F modellje G-nek", „F kielégíti G-t" viszont hülyeség

Például $(p \wedge q) \vee r \ \vDash \ \neg p \to r$:

p	q	r	$(p \wedge q) \vee r$	$\neg p \to r$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1

p	q	r	$(p \wedge q) \vee r$	$\neg p \to r$
1	0	0	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Logikai következmény formulahalmazok közt

Ugyanígy használhatjuk a $\Sigma \vDash F$, $\Sigma \vDash \Gamma$ jelöléseket is, ahol Σ, Γ formulahalmazok: pl. $\Sigma \vDash F$ akkor áll fenn, ha minden Σ minden modellje modellje F-nek is.

Például

$$\{p, p \to q\} \ \vDash \ q$$

hiszen ha egy $\mathcal{A}$ értékadásban p is és $p \to q$ is igaz, akkor q is igaz.

Általában arra vagyunk kíváncsiak, hogy egy F formula következik-e axiómák egy Σ halmazából.

Az $F \equiv G$ („F ekvivalens G-vel") jelölés pedig azt jelenti, hogy $\mathrm{Mod}(F) = \mathrm{Mod}(G)$ (tehát $F \vDash G$ és $G \vDash F$).

$\mathrm{Mod}(\Sigma) \cap \mathrm{Mod}(\Gamma)$

Hasznos tudnunk a következőt:

$$\mathrm{Mod}(\Sigma \cup \Gamma) \;=\; \mathrm{Mod}(\Sigma) \cap \mathrm{Mod}(\Gamma).$$

Mert

- a bal oldalon szereplő halmazban azok az értékadások vannak, melyek kielégítik $\Sigma \cup \Gamma$ összes elemét
- azaz Σ összes elemét is és Γ összes elemét is
- azaz melyek benne vannak $\mathrm{Mod}(\Sigma)$-ban is és $\mathrm{Mod}(\Gamma)$-ban is
- ez pedig épp a jobb oldal

Nyilván az is igaz, hogy

tetszőleges $\mathcal{A}$ értékadás vagy $\mathrm{Mod}(F)$-ben, vagy $\mathrm{Mod}(\neg F)$-ben szerepel (pontosan az egyikükben), ha F egy formula.

how to speak math: $\mathrm{Mod}(\Sigma) \cap \mathrm{Mod}(\Gamma)$, mechanikusan

Memó: ha egy H halmazt a következőképp deklarálunk

$$H \ := \ \{x \in T : \text{ valami feltétel, amiben szerepel az } x \text{ „szabadon''}\}$$

az azt jelenti, hogy H-ban pontosan azok a T-beli („T típusú'', általában) dolgok vannak, amikre igaz a kettőspont utáni feltétel

$$\{n \in \mathbb{N}_0 : \ n^2 \equiv 3 \bmod 5\}$$

„azoknak a természetes számoknak a halmaza, amiknek a négyzete öttel osztva hármat ad maradékul''
ez épp üres halmaz – attól, hogy két halmazt más módon definiáltunk, még lehet, hogy valójában ugyanaz a halmaz

van, hogy az $\in T$ típusdeklarációt nem adjuk meg, ha kikövetkeztethető a feltételből

how to speak math: $\mathrm{Mod}(\Sigma) \cap \mathrm{Mod}(\Gamma)$, mechanikusan

$\mathcal{A}$ eleme $\mathrm{Mod}(\Sigma \cup \Gamma)$-nak pont akkor, ha

- minden F formulára ha $F \in \Sigma \cup \Gamma$, akkor $\mathcal{A} \models F$ — Mod def
- minden F formulára ha ($F \in \Sigma$ vagy $F \in \Gamma$), akkor $\mathcal{A} \models F$ — unió def
- minden F formulára

  (ha $F \in \Sigma$, akkor $\mathcal{A} \models F$) és (ha $F \in \Gamma$, akkor $\mathcal{A} \models F$)

  mert $(p \vee q) \to r \;\equiv\; (p \to r) \wedge (q \to r)$
- (minden F formulára ha $F \in \Sigma$, akkor $\mathcal{A} \models F$)

  és

  (minden F formulára ha $F \in \Gamma$, akkor $\mathcal{A} \models F$)

  mert $\forall x(F \wedge G) \;\equiv\; (\forall x F) \wedge (\forall x G)$ (laters – believe me for a moment, it's true)
- $\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}(\Sigma)$ és $\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}(\Gamma)$ — Mod def
- $\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}(\Sigma) \cap \mathrm{Mod}(\Gamma)$ — metszet def

erre a két halmazra nem mondjuk, hogy „def alapján egyenlőek”, mert használunk mást is az egyik oldalból a másikká való transzformálás közben

Az indirekt bizonyítás

Ha következtető-motort akarunk fejleszteni, ahhoz elég a kielégíthetetlenséggel foglalkoznunk:

$\Sigma \vDash F$ pontosan akkor igaz, ha $\Sigma \cup \{\neg F\}$ kielégíthetetlen.

Bizonyítás: $\Sigma \models F$ pont akkor, ha

- $\mathrm{Mod}(\Sigma) \subseteq \mathrm{Mod}(F)$ — $\models$ def
- minden $\mathcal{A}$-ra: ha $\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}(\Sigma)$, akkor $\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}(F)$ — részhalmaz def
- minden $\mathcal{A}$-ra: ha $\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}(\Sigma)$, akkor $\mathcal{A}(F) = 1$ — Mod def
- minden $\mathcal{A}$-ra: ha $\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}(\Sigma)$, akkor $\neg\mathcal{A}(F) = 0$ — $\neg$ def + $\neg$ injektív
- minden $\mathcal{A}$-ra: ha $\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}(\Sigma)$, akkor $\mathcal{A}(\neg F) = 0$ — $\neg$ szemantika def
- minden $\mathcal{A}$-ra: ha $\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}(\Sigma)$, akkor $\mathcal{A} \notin \mathrm{Mod}(\neg F)$ — Mod def
- minden $\mathcal{A}$-ra: nem $\Big(\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}(\Sigma)$ és $\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}(\neg F)\Big)$ — $p \to \neg q \;\equiv\; \neg(p \wedge q)$
- $\mathrm{Mod}(\Sigma) \cap \mathrm{Mod}(\neg F) = \emptyset$ — $x = \emptyset \;\leftrightarrow\; \forall y (y \notin x)$ halmazelméleti axióma
- $\mathrm{Mod}(\Sigma \cup \{\neg F\}) = \emptyset$ — előző „lemma''

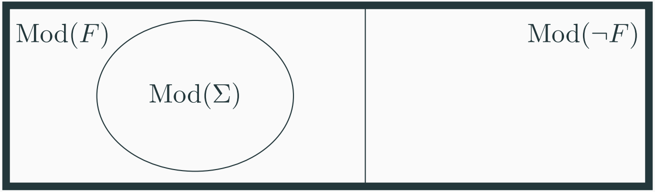
Az indirekt bizonyítás

Ha következtető-motort akarunk fejleszteni, ahhoz elég a kielégíthetetlenséggel foglalkoznunk:

$\Sigma \vDash F$ pontosan akkor igaz, ha $\Sigma \cup \{\neg F\}$ kielégíthetetlen.

Bizonyítás: $\Sigma \models F$ pont akkor, ha

- $\mathrm{Mod}(\Sigma) \subseteq \mathrm{Mod}(F)$ — $\models$ def
- $\mathrm{Mod}(\Sigma) \cap \mathrm{Mod}(\neg F) = \emptyset$ — $x = \emptyset \leftrightarrow \forall y (y \notin x)$ halmazelméleti axióma
- $\mathrm{Mod}(\Sigma \cup \{\neg F\}) = \emptyset$ — előző „lemma”



Konjunktív normálforma (CNF)

A következtető algoritmusainkat (hogy ne legyen benne sok eset, uniforman működjön) valamilyen normálformában lévő formulákra szoktuk specifikálni. Az egyik leggyakrabban alkalmazott normálforma a konjunktív normálforma:

- Az ítéletváltozókat és negáltjaikat literáloknak nevezzük;
- Véges sok literál diszjunkcióját klóznak;
- Véges sok klóz konjunkcióját pedig konjunktív normálformának, CNF-nek.

Példa

$$(p \vee \neg q) \ \wedge \ (\neg p \vee \neg q \vee r) \ \wedge \ p$$

Itt

- p, q, r változók,
- $p, \neg q, \neg p, r$ literálok,
- $(p \vee \neg q)$, $(\neg p \vee \neg q \vee r)$ és p klózok.

Az egyelemű klózokat (mint itt a p) egységklóznak nevezzük.

CNF-re hozás

Minden formula ekvivalens CNF alakra hozható.

- Először a $\to$ és $\leftrightarrow$ konnektívákat elimináljuk a formulából a következő ekvivalenciákkal:

$$F \to G \equiv \neg F \vee G \qquad F \leftrightarrow G \equiv (\neg F \vee G) \wedge (F \vee \neg G)$$

ok, also $\uparrow \vee F \equiv \uparrow,\quad \downarrow \vee F \equiv F,\quad \downarrow \to F \equiv \uparrow$ stb.

- Majd a $\neg$ jeleket visszük le a változók mellé a deMorgan azonosságokkal:

$$\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G \qquad \neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G \qquad \neg\neg F \equiv F$$

(Ekkorra a formula negációs normálformában, NNF van.)

- Végül a $\vee$ jeleket visszük be a $\wedge$ jelek alá a disztributivitás alkalmazásával:

$$F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H), \quad (F \wedge G) \vee H \equiv (F \vee H) \wedge (G \vee H)$$

CNF példa

A formula:

$$(p \vee q) \leftrightarrow (q \rightarrow r)$$

Nyilak eliminálása:

$$\big(\neg(p \vee q) \vee (q \rightarrow r)\big) \wedge \big((p \vee q) \vee \neg(q \rightarrow r)\big)$$

$$\big(\neg(p \vee q) \vee (\neg q \vee r)\big) \wedge \big((p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee r)\big)$$

Negálások bevitele:

$$\big((\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg q \vee r)\big) \wedge \big((p \vee q) \vee (\neg\neg q \wedge \neg r)\big)$$

$$\big((\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg q \vee r)\big) \wedge \big((p \vee q) \vee (q \wedge \neg r)\big)$$

Disztributivitás: klózok vagyolásokon, CNFek éseléseken terjednek keresztül

$$(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee q) \wedge (p \vee q \vee \neg r)$$

Halmazok

Tehát a probléma, amivel foglalkozunk:

SAT

Input: egy CNF.

Output: kielégíthető-e?

A CNF-eket nem stringként reprezentáljuk, hanem

- egy klózt a benne literálok halmazaként,
- egy CNF-et pedig klózainak halmazaként.

Ezt megtehetjük a $\vee$ és $\wedge$ műveletek kommutativitása, asszociativitása és idempotenciája miatt (azaz: sem a sorrend, sem a multiplicitás nem számít).

Az előző formula ebben a reprezentációban pl:

$$\Sigma = \Big\{\{\neg p, \neg q, r\},\ \{\neg q, r\},\ \{p, q\},\ \{p, q, \neg r\}\Big\}.$$

Üres klóz, üres CNF

Még ha az inputban nincs is, az algoritmusok generálhatnak üres klózt (jele a $\Box$ lesz).

Az üres klóz minden értékadás mellett hamis.

(Pl. mert tetszőleges C és D klózokra és $\mathcal{A}$ értékadásra igaz kell legyen, hogy $\mathcal{A}(C \cup D) = \mathcal{A}(C) \vee \mathcal{A}(D)$ és ha $D = \Box$, akkor ez $\mathcal{A}(C) = \mathcal{A}(C \cup \Box) = \mathcal{A}(C) \vee \mathcal{A}(\Box)$-ot jelenti, ami akkor igaz, ha $\mathcal{A}(\Box) = 0$.)
Az üres CNF (tehát 0 darab klóz halmaza) jele a szokásos üreshalmaz-jel, $\emptyset$ lesz.

Az üres CNF minden értékadás mellett igaz.

$\{\}$ igaz, ha CNF és hamis, ha klóz.
$\Box$ hamis. $\emptyset$ igaz.

Közvetlen részformulák

Egy formula közvetlen részformulái az „eggyel lentebbi szinten lévő részei”:

Közvetlen részformula

- A változóknak és a logikai konstansoknak nincs közvetlen részformulája;
- A $(\neg F)$ alakú formulák közvetlen részformulája F;
- Az $(F \vee G)$, $(F \wedge G)$, $(F \rightarrow G)$ és $(F \leftrightarrow G)$ alakú formulák közvetlen részformulái F és G.

A formulák kiértékelését úgy végeztük el, hogy

- rekurzívan kiértékeljük a közvetlen részformulákat;
- majd az eredményekből és a külső konnektívából számítjuk az egész formula értékét.

Az ilyen rendszerű definíciókat és bizonyításokat a formula felépítése szerinti indukciónak nevezzük.

Felépítés szerinti indukció

Definíciókban csak meg kell mondjuk, hogy az aktuálisan a formulához rendelt objektumot hogyan számítjuk ki a részformuláihoz rendelt objektumokból, ügyelve arra, hogy minden esetet pontosan egyszer vegyünk sorra.

Bizonyításokban kicsit összetettebb a feladat: minden esetre meg kell mutatnunk, hogy ha az állítás igaz a formula összes közvetlen részformulájára, akkor miért igaz az egész formulára is.

Láttunk már hasonlót: pl. a természetes számokon a teljes indukció is így működik.

Teljes indukció memó (és Peano axiómák a számokról)

A természetes számok konstruktorai:

- 0 természetes szám;
- ha n természetes szám, akkor n' is az;
- más természetes szám nincs.

Az n' helyett lehet írni $\mathrm{succ}(n)$-t vagy $(n+1)$-et is

Az összeadás definíciója:

$$m + 0 := m \qquad \text{(az az eset, amikor a jobb oldali argumentum } 0\text{)}$$

$$m + (n') := (m + n)' \qquad \text{(amikor } n'\text{)}$$

A második esetben hogy összeadjuk m-et $n+1$-gyel, előbb összeadtuk m-et az „egyszerűbb” n-nel (rekurzív hívás az egyszerűbb számra), majd az eredményt növeltük eggyel (a természetes számok konstruktorát hívva).

A szorzásé:

$$m \star 0 := 0$$

$$m \star (n') := (m \star n) + m$$

„definíció szerint ennyi”

$3 + 2 = 5$

$$\begin{aligned} 0''' + 0'' &= (0''' + 0')' \\ &= ((0''' + 0)')' \\ &= ((0''')')' \end{aligned}$$

$2 \star 2 = 4$

$$\begin{aligned} 0'' \star 0'' &= (0'' \star 0') + 0'' \\ &= ((0'' \star 0) + 0'') + 0'' \\ &= (0 + 0'') + 0'' \end{aligned}$$

Teljes indukció memó

Ez pedig egy bizonyítása annak az állításnak, hogy

$$1 + 2 + \ldots + m = \frac{m(m+1)}{2}$$

teljesül minden m természetes számra:

- 0-ra igaz: mindkét oldal 0
- $n+1$-re: itt írhatnánk n'-t is
  - Az indukciós feltevés szerint $1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ igaz a nála egyszerűbb n-re;
  - $1 + \ldots + (n+1) = (1 + \ldots + n) + (n+1)$ ezek szerint $\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$
  - ami tovább egyenlő $\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$-vel
  - ami pont a fenti képlet, ha a számunk az $n+1$. Done.

Formulákra is pontosan így működik az indukció, azzal, hogy

- teljes indukció helyett strukturális indukciónak vagy felépítés szerinti indukciónak hívjuk,
- több aleset van (nem csak 0 és n', hanem p, $\uparrow$, $\downarrow$, $\neg F$, $F \vee G$ stb).

A CNF-re hozó algoritmus mindig megáll

- ha először a $\leftrightarrow$ nyilakat elimináljuk: a $\leftrightarrow$-ok száma mindig csökken
- ha eztán a $\rightarrow$ nyilakat: ezek száma is
- mikor a $\uparrow$, $\downarrow$ jeleket: a formula rövidebb lesz
- de Morgan azonosságok: ha egy $\neg F$ részformula $\neg$ jelének a „súlya" az F-beli konnektívák száma, akkor a $\neg$ jelek összsúlya csökken
- disztributivitás: (erre is lehet megadni leszállási feltételt, de kicsit messzire vezet)

Formulák által indukált Boole-függvények

Indukált Boole függvény

Ha az F formulában csak a $\{p_1, \ldots, p_n\}$ változók szerepelnek, akkor F indukál egy n-változós Boole-függvényt, melyet szintén F-fel jelölünk:

$$p_i(x_1, \ldots, x_n) := x_i \qquad \text{(ezt projekciónak hívjuk)} \quad \text{tkp tömbelem-kiválasztás}$$

$$(\neg F)(x_1, \ldots, x_n) := \neg(F(x_1, \ldots, x_n))$$

$$(F \vee G)(x_1, \ldots, x_n) := F(x_1, \ldots, x_n) \vee G(x_1, \ldots, x_n)$$

$$\ldots$$

(ez ismét egy formula felépítése szerinti indukcióval definiált fogalom)

Példa

az $F = p_1 \vee (\neg p_1 \wedge p_2)$ formulára $F(0,1) = 1$:

$$p_1(0,1) = 0 \qquad p_2(0,1) = 1$$

$$(\neg p_1)(0,1) = \neg 0 = 1 \qquad (\neg p_1 \wedge p_2)(0,1) = 1 \wedge 1 = 1$$

$$\big(p_1 \vee (\neg p_1 \wedge p_2)\big)(0,1) = 0 \vee 1 = 1.$$

Boole-függvények megszorításai

Legyen f/n Boole-függvény, $n > 0$. Ha $b \in \{0, 1\}$ igazságérték, úgy $f|_{x_n=b}$ jelöli azt az $(n-1)$-változózós Boole-függvényt, melyet úgy kapunk, hogy f inputjában x_n értékét b-re rögzítjük.

Formálisan

$$f|_{x_n=b}(x_1, \ldots, x_{n-1}) \; := \; f(x_1, \ldots, x_{n-1}, b).$$

Példa

- $\vee|_{x_2=1}$ a konstans 1 függvény: $\vee|_{x_2=1}(x_1) = \vee(x_1, 1) = 1$.
- $\wedge|_{x_2=0}$ a konstans 0 függvény
- $\wedge|_{x_2=1}$ az identikus ($x_1 \mapsto x_1$) függvény

stb.

(Hasonlóan, rögzíthetjük bármelyik koordinátát, nem feltétlenül az utolsót.)

Shannon expanzió

A következőt könnyű látni:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \big(x_n \wedge f|_{x_n=1}(x_1,\ldots,x_{n-1})\big) \vee \big(\neg x_n \wedge f|_{x_n=0}(x_1,\ldots,x_{n-1})\big).$$

Hiszen ha $x_n = 1$, akkor a jobb oldali tag hamis lesz, a bal oldali pedig épp $f|_{x_n=1}(x_1,\ldots,x_{n-1}) = f(x_1,\ldots,x_{n-1},1)$, ami megegyezik $f(x_1,\ldots,x_n)$-nel ebben az esetben; az $x_n = 0$ eset hasonló.

Ebből a következőt kapjuk:

Minden $n \geq 1$-változós Boole-függvény előáll a projekciók és a $\{\neg,\vee,\wedge\}$ Boole-függvények alkalmas kompozíciójaként.

Ezt úgy is mondjuk, hogy a $\{\neg,\vee,\wedge\}$ rendszer teljes.

Shannon expanzió

Minden $n \geq 1$-változós Boole-függvény előáll a projekciók és a $\{\neg, \vee, \wedge\}$ Boole-függvények alkalmas kompozíciójaként.

Bizonyítás

n szerinti teljes indukciót alkalmazunk.

- Ha $n = 1$, akkor az $f/1$ függvény vagy a konstans $0 = x_1 \wedge \neg x_1$, vagy a konstans $1 = x_1 \vee \neg x_1$, vagy az x_1, vagy a $\neg x_1$, mind a négy előállítható így.
- Ha $n > 1$, akkor az indukciós feltevés szerint az $f|_{x_n = b}(x_1, \ldots, x_{n-1})$ Boole-függvények $b \in \{0, 1\}$-re előállnak ilyen alakban, a Shannon expanzióban pedig szintén csak ezt a három műveletet alkalmazzuk.

Következmény

Minden $n \geq 1$-változós Boole-függvény indukálható olyan formulával, melyben csak a $\{\neg, \vee, \wedge\}$ konnektívák szerepelnek.

Shannon-expanziós példa

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	1
1	1	0	0
0	0	1	0
1	0	1	1
0	1	1	1
1	1	1	1

$$= (x_3 \wedge f|_{x_3=1}) \vee (\neg x_3 \wedge f|_{x_3=0})$$

x_1	x_2	$f\|_{x_3=0}$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

x_1	x_2	$f\|_{x_3=1}$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

Shannon-expanziós példa

x_1	x_2	$f\|_{x_3=1}$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

$$= (x_2 \wedge f|_{x_3=1,x_2=1}) \vee (\neg x_2 \wedge f_{x_3=1,x_2=0)})$$

x_1	$f\|_{x_3=1,x_2=0}$
0	0
1	1

x_1	$f\|_{x_3=1,x_2=1}$
0	1
1	1

$$\begin{aligned} f|_{x_3=1,x_2=0} &= x_1 \\ f|_{x_3=1,x_2=1} &= \uparrow \\ f|_{x_3=1} &= (x_2 \wedge \uparrow) \vee (\neg x_2 \wedge x_1) \\ &= x_2 \vee (\neg x_2 \wedge x_1) \end{aligned}$$

Shannon-expanziós példa

x_1	x_2	$f\|_{x_3=0}$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

$$= (x_2 \wedge f|_{x_3=0,x_2=1}) \vee (\neg x_2 \wedge f_{x_3=0,x_2=0)})$$

x_1	$f\|_{x_3=0,x_2=0}$
0	0
1	1

x_1	$f\|_{x_3=0,x_2=1}$
0	1
1	0

$$f|_{x_3=0,x_2=1} = \neg x_1$$

$$f|_{x_3=0,x_2=0} = x_1$$

$$f|_{x_3=0} = (x_2 \wedge \neg x_1) \vee (\neg x_2 \wedge x_1)$$

$$f = (x_3 \wedge (x_2 \vee (\neg x_2 \wedge x_1))) \vee (\neg x_3 \wedge ((x_2 \wedge \neg x_1) \vee (\neg x_2 \wedge x_1)))$$

CNF-ek megszorításai

Ha ℓ egy literál, akkor $\overline{\ell}$ jelöli ℓ komplementerét: $\overline{p} := \neg p$ és $\overline{\neg p} := p$.

Hasonlóan a Boole-függvények megszorításaihoz, CNF-ekben is rögzíthetjük a változók értékét.

Ha Σ klózok egy halmaza és ℓ egy literál, akkor a $\Sigma|_{\ell=1}$ is egy klózhalmaz, mégpedig:

- Σ-ból elhagyjuk az ℓ-t tartalmazó klózokat,
- az eredmény klózaiból pedig elhagyjuk az $\overline{\ell}$-eket.

Példa

Ha $\Sigma = \{\{p\}, \{p, q\}, \{\neg p, \neg q\}, \{p, \neg p, r\}\}$ és $\ell = \neg p$, akkor $\Sigma|_{\neg p=1} = \{\square, \{q\}\}$.

A $\Sigma|_{\ell=0}$ pedig legyen $\Sigma|_{\overline{\ell}=1}$.

CNF-ek megszorításai

Legyen $\mathcal{A}$ értékadás, Σ CNF és ℓ literál.

$\mathcal{A} \vDash \Sigma$ pontosan akkor igaz, ha

- $\mathcal{A}(\ell) = 1$ és $\mathcal{A} \vDash \Sigma|_{\ell=1}$
- vagy $\mathcal{A}(\ell) = 0$ és $\mathcal{A} \vDash \Sigma|_{\ell=0}$.

Röviden: ha $\mathcal{A} \vDash \Sigma|_{\ell=\mathcal{A}(\ell)}$.

Mert

Ha $\mathcal{A}(\ell) = 1$, akkor $\mathcal{A}$ kielégíti az összes Σ-beli klózt, melyekben ℓ szerepel.
A többi klózból a $\overline{\ell}$ literál értéke $\mathcal{A}$ mellett hamis, elhagyható belőlük.
A kapott klózhalmaz épp $\Sigma|_{\ell=1}$.
(Az $\ell = 0$ eset is kész ezzel, hiszen az ugyanaz, mint az $\overline{\ell} = 1$ eset.)

Ha a Σ CNF az f Boole-függvényt indukálja, akkor $\Sigma|_{p_i=b}$ az $f|_{x_i=b}$ függvényt.

Az első algoritmus

Az előzőnek következménye:

Legyen Σ klózhalmaz, ℓ literál.
A Σ pontosan akkor kielégíthető, ha a $\Sigma|_{\ell=0}$ vagy a $\Sigma|_{\ell=1}$ klózhalmazok valamelyike kielégíthető.

Ez ad egy algoritmust:

function A(Σ)
  if $\Box \in \Sigma$ **then return** false
  if $\Sigma = \emptyset$ **then return** true
  (válasszunk egy p változót)
  return A($\Sigma|_{p=0}$)$\lor$ A($\Sigma|_{p=1}$)

(Könnyű módosítani, hogy visszaadjon egy kielégítő értékadást, ha van.)

Példa

- $\{\{p, \neg q\}, \{\neg p, q, r\}, \{q, \neg r\}\}$
  - $\{\{q, r\}, \{q, \neg r\}\}$
    - $\emptyset$
    - $\{\{r\}, \{\neg r\}\}$
      - $\{\Box\}$
      - $\{\Box\}$
  - $\{\{\neg q\}, \{q, \neg r\}\}$
    - $\{\Box\}$
    - $\{\{\neg r\}\}$
      - $\{\Box\}$
      - $\emptyset$

A keresési tér vágása: Unit propagation

Ha van egységklóz a CNF-ben, az kényszeríti a benne lévő változó értékét:

Ha Σ-ban van egy $\{\ell\}$ egységklóz, akkor Σ minden $\mathcal{A}$ modelljében $\mathcal{A}(\ell) = 1$.

Tehát ekkor Σ pontosan akkor kielégíthető, ha $\Sigma|_{\ell=1}$ az (hiszen $\Sigma|_{\ell=0}$-ban lesz egy üres klóz, így kielégíthetetlen).

Unit propagation

Ha $\{\ell\} \in \Sigma$, akkor elég $\Sigma|_{\ell=1}$-re hívni rekurzívan.

A keresési tér vágása: Pure literal elimination

Ha ℓ olyan literál, melynek komplementere nem fordul elő Σ-ban, akkor Σ pontosan akkor kielégíthető, ha $\Sigma|_{\ell=1}$ az.

Tehát: ha $\overline{\ell}$ nem szerepel Σ-ban, akkor ℓ-t biztonsággal 1-re állíthatjuk.

Hiszen ha $\mathcal{A} \models \Sigma$, akkor az a $\mathcal{A}[\ell = 1]$ értékadás, mely ℓ értékét 1-re állítja, az ℓ-ben nem szereplő változókon pedig megegyezik $\mathcal{A}$-val, kielégíti $\Sigma|_{\ell=1}$-et:

- ha $\ell \in C$, akkor az $[\ell = 1]$ miatt garantáltan;
- ha $\ell \notin C$, akkor $\mathcal{A}(C) = \mathcal{A}[\ell = 1](C)$, hiszen ekkor C értéke nem függ ℓ értékétől.

A DPLL algoritmus

Davis–Putnam–Logemann–Loveland

function dpll(Σ)
  if $\Sigma = \emptyset$ **then return** true
  if $\Box \in \Sigma$ **then return** false
  if valamilyen ℓ-re $\{\ell\} \in \Sigma$ **then**
    return dpll($\Sigma|_{\ell=1}$)
  if valamilyen ℓ-re
    $\overline{\ell}$ nem szerepel Σ-ban **then**
    return dpll($\Sigma|_{\ell=1}$)
  (válasszunk egy p változót)
  return dpll($\Sigma|_{p=0}$)$\vee$ dpll($\Sigma|_{p=1}$)

Példa

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \{\{p,\neg q\},\{\neg p,q,r\},\{q,\neg r\}\} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \{\{q,r\},\{q,\neg r\}\} \arrow[d, dash] & & \{\{\neg q\},\{q,\neg r\}\} \arrow[d, dash] \\ \emptyset & & \{\{\neg r\}\} \arrow[d, dash] \\ & & \emptyset \end{tikzcd}$$

A mai leggyorsabb SAT solverek ennek változatait implementálják (később látjuk, milyeneket).

Másik DPLL példa

$$\{\{q, s\}, \{p, r\}, \{\neg p, \neg r\}, \{\neg p, \neg q\}, \{r, \neg s\}, \{\neg q, r\}\}$$

$$\{\{q, s\}, \{r\}, \{r, \neg s\}, \{\neg q, r\}\} \qquad \{\{q, s\}, \{\neg r\}, \{\neg q\}, \{r, \neg s\}, \{\neg q, r\}\}$$

$$\{\{q, s\}\} \qquad \{\{s\}, \{\neg r\}, \{r, \neg s\}\}$$

$$\emptyset \qquad \{\{s\}, \{\neg s\}\}$$

$$\{\square\}$$

```
{ {q,s}, {p,r}, {-p,-r}, {-p,-q}, {r,-s}, {-q,r} }
--p=0-- { {q,s}, {r}, {r,-s}, {-q,r} }
--p=0-- --r=1-- { {q,s} }
--p=0-- --r=1-- --q=1-- {}
--p=1-- { {q,s}, {-r}, {-q}, {r,-s}, {-q,r} }
--p=1-- --q=0-- { {s}, {-r}, {r,-s} }
--p=1-- --q=0-- --r=0-- { {s}, {-s} }
--p=1-- --q=0-- --r=0-- --s=1-- { {} }
a formula kielégítheto, mert van {} címkéju levél
```

Rezolúció

A rezolúciós következtetés:

$$\{F \vee G,\ \neg F \vee H\} \ \vDash\ G \vee H.$$

Hiszen ha $\mathcal{A}(F) = 1$, akkor $\mathcal{A}(\neg F \vee H) = 1$-ből $\mathcal{A}(H) = 1$ és ezért $\mathcal{A}(G \vee H) = 1$; ha pedig $\mathcal{A}(F) = 0$, akkor $\mathcal{A}(F \vee G) = 1$ miatt $\mathcal{A}(G) = 1$ és így $\mathcal{A}(G \vee H) = 1$.

Ennek megfelelően két klóz rezolvensét így definiáljuk:

Rezolvens

Ha C és D klózok, $p \in C$ és $\neg p \in D$, akkor C és D (p menti) rezolvense a

$$(C - \{p\}) \cup (D - \{\neg p\})$$

klóz.

Például $\{p, q, s\}$ és $\{\neg p, \neg r, s\}$ rezolvense (p mentén)
$\{q, s\} \cup \{\neg r, s\} \ = \ \{q, \neg r, s\}$.

Rezolúció

A rezolúciós algoritmus a következő:

Input: klózok Σ halmaza.

Output: kielégíthetetlen-e Σ?

Algoritmus: listát vezetünk klózokról. Egy klózt felvehetünk, ha

- Σ-beli vagy
- két, a listán már szereplő klóz rezolvense.

Ha az $\Box$ üres klóz rákerül a listára, Σ kielégíthetetlen.

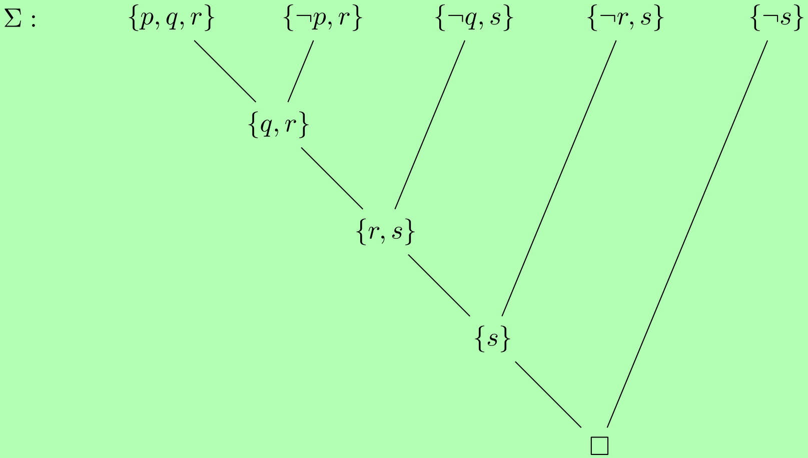
Ha már nem tudunk új klózt felvenni és $\Box$ nincs köztük, Σ kielégíthető.

Példa: $\Sigma = \Big\{\{p, q, r\}, \{\neg p, r\}, \{\neg q, s\}, \{\neg r, s\}, \{\neg s\}\Big\}$

$$\begin{array}{llllll}
1. & \{p, q, r\} & \in \Sigma & 5. & \{r, s\} & \mathrm{Res}(3,4) \\
2. & \{\neg p, r\} & \in \Sigma & 6. & \{\neg r, s\} & \in \Sigma \\
3. & \{q, r\} & \mathrm{Res}(1,2) & 7. & \{s\} & \mathrm{Res}(5,6) \\
4. & \{\neg q, s\} & \in \Sigma & 8. & \{\neg s\} & \in \Sigma \\
 & & & 9. & \Box & \mathrm{Res}(7,8)
\end{array}$$

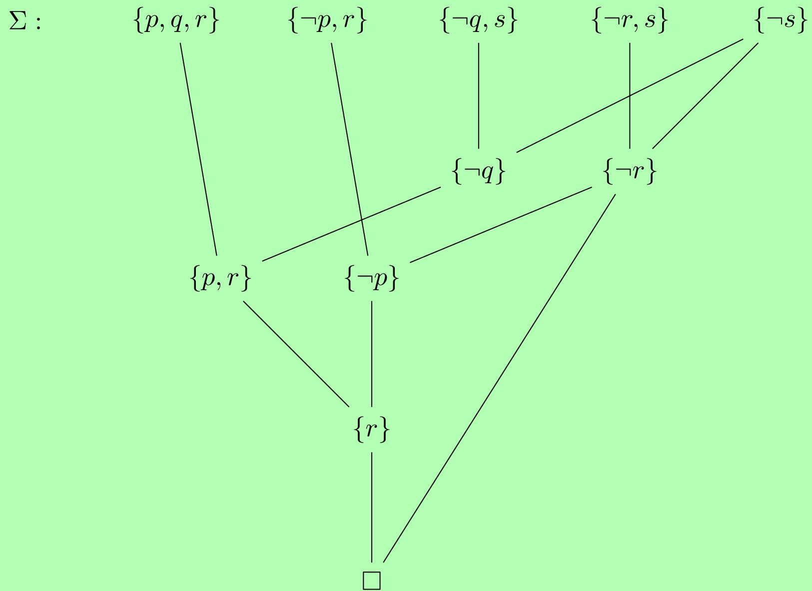
Rajzolni is szabad

Példa megint



Többször is szabad felhasználni ugyanazt

Példa megint



Helyesség és teljesség

A rezolúciós algoritmus

- Helyes: ha az algoritmus „kielégíthetetlen” válasszal áll meg, akkor az input Σ valóban kielégíthetetlen;
- Teljes: ha Σ kielégíthetetlen, akkor az algoritmus mindig a „kielégíthetetlen” válasszal áll meg.

DON’T DO THIS

1.	$\{p, q\}$	$\in \Sigma$
2.	$\{\neg p, \neg q\}$	$\in \Sigma$
3.	$\square$	$\mathrm{Res}(1, 2)$

mínusz három pont

public shaming

dead kittens

Miért

Ha több literál mentén rezolválunk egyszerre, az nem helyes következtetés: úgy is kijöhet az üres klóz, ha a formula kielégíthetetlen.
Mint ahogy a bal oldalon is kielégíthető a $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$ formula.

Helyesség és teljesség

Helyesség

Annyit elég belátnunk, hogy minden klóz, mely a listára kerül, logikai következménye Σ-nak. Ezt indukcióval tesszük: ha a C klóz lista n. elemeként kerül a listára, akkor:

- Ha $C \in \Sigma$, akkor $\Sigma \vDash C$ mindig teljesül. (Ha $\Gamma \subseteq \Sigma$, akkor $\Sigma \vDash \Gamma$.)
- Ha C a korábban már felvett C_1 és C_2 klózok rezolvense, akkor
  - indukciós feltevés szerint $\Sigma \vDash C_1$ és $\Sigma \vDash C_2$
  - tehát $\Sigma \vDash \{C_1, C_2\}$ (Ha $\Sigma \vDash \Gamma_1$ és $\Sigma \vDash \Gamma_2$, akkor $\Sigma \vDash \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.)
  - a rezolúciós következtetés szerint pedig $\{C_1, C_2\} \vDash C$
  - így a $\vDash$ tranzitivitása miatt $\Sigma \vDash C$. (Ha $\Sigma \vDash \Gamma$ és $\Gamma \vDash \Delta$, akkor $\Sigma \vDash \Delta$.)

Ha pedig $\Sigma \vDash \Box$, akkor Σ valóban kielégíthetetlen, hiszen $\mathrm{Mod}(\Box) = \emptyset$ és ekkor $\mathrm{Mod}(\Sigma) \subseteq \mathrm{Mod}(\Box)$ miatt $\mathrm{Mod}(\Sigma) = \emptyset$.

(Egy Σ formulahalmaz pontosan akkor kielégíthetetlen, ha $\Sigma \vDash \downarrow$.) gyakon

Lineáris rezolúció

A teljességnél többet fogunk megmutatni: azt, hogy ha Σ kielégíthetetlen, akkor $\square$ levezethető

- bármelyik, a „kielégíthetetlenségért felelős" klózból indulva
- úgy, hogy minden további lépésben a listára utoljára felvett klózt rezolváljuk egy, vagy a listán, vagy Σ-ban szereplő klózzal.

Ezt egy kicsit precízebben:

A Σ kielégíthetetlen klózhalmaznak a $\Sigma' \subseteq \Sigma$ egy minimális kielégíthetetlen részhalmaza, ha Σ' is kielégíthetetlen, de Σ' bármelyik valódi részhalmaza már kielégíthető.

Példa

Ha $\Sigma = \Big\{\{p,q\},\{\neg p,q\},\{\neg q\},\{p,r\},\{\neg p,\neg r\},\{s\},\{\neg s\}\Big\}$, akkor pl. $\Big\{\{p,q\},\{\neg p,q\},\{\neg q\}\Big\}$ egy minimális kielégíthetetlen részhalmaza, $\Big\{\{s\},\{\neg s\}\Big\}$ pedig egy másik. A $\{p,r\}$ és $\{\neg p,\neg r\}$ klózok nem elemei egyetlen minimális kielégíthetetlen részhalmaznak sem.

Lineáris rezolúció

A lineáris rezolúciós algoritmus pedig a következő:

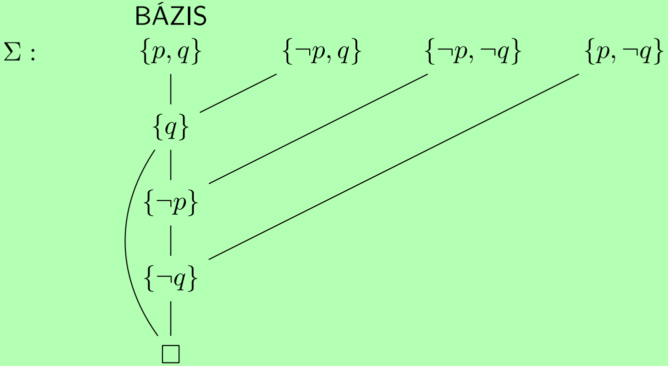
Input: Σ klózhalmaz.
Output: kielégíthetetlen-e Σ?
Algoritmus: Listát vezetünk klózokról.

- Az első lépésben felvehetjük Σ bármelyik elemét, ez lesz a levezetés bázisa.
- Minden további lépésben felvehetjük az előző lépésben felvett klóznak és egy vagy már a listán szereplő, vagy Σ-beli klóznak a rezolvensét. Ezt a másik klózt hívjuk ennek a lépésnek az oldalklózának.

Ha pl. $\Sigma = \{\{p,q\},\{\neg p,q\},\{\neg p,\neg q\},\{p,\neg q\}\}$:

1.	$\{p,q\}$	$\in \Sigma$	4.	$\{\neg q\}$	$\mathrm{Res}(3,\{p,\neg q\})$
2.	$\{q\}$	$\mathrm{Res}(1,\{\neg p,q\})$	5.	$\square$	$\mathrm{Res}(4,2)$
3.	$\{\neg p\}$	$\mathrm{Res}(2,\{\neg p,\neg q\})$			

Lineáris rezolúció rajzban



Lineáris rezolúció

Nyilván igaz, hogy ami lineáris rezolúcióval levezethető Σ-ból, az rezolúcióval is levezethető, tehát a lineáris rezolúciós algoritmus is helyes.

Teljes is:

Ha Σ kielégíthetetlen és $C \in \Sigma$ benne van a Σ egy minimális kielégíthetetlen részhalmazában, akkor Σ-ból levezethető az üres klóz olyan lineáris rezolúciós levezetéssel, melynek bázisa C.

Tehát az állítás az, hogy ha Σ kielégíthetetlen, akkor lineáris rezolúcióval is le lehet vezetni az üres klózt, bárkiből kiindulva, aki a kielégíthetetlenségért „felelős”.

Lineáris rezolúció

a terv: szétvágjuk egy p változó mentén $\Sigma|_{p=1}$-re és $\Sigma|_{p=0}$-ra, mindkettő $\vDash\downarrow$, levezetjük mindkettőben az üres klózt, „visszavetítjük” ezt a két levezetést Σ-ra és „összeragasztjuk” őket

Ha

$$\Sigma = \{\{p,\neg q,r\},\ \{p,q\},\ \{\neg p,r\},\ \{\neg q,\neg r\},\{q,\neg r\}\}$$

és mondjuk a p változót választjuk, akkor

$$\Sigma|_{p=1} = \{\{r\},\ \{\neg q,\neg r\},\{q,\neg r\}\} \quad \Sigma|_{p=0} = \{\{\neg q,r\},\ \{q\},\ \{\neg q,\neg r\},\{q,\neg r\}\}$$

Lineáris levezetések:

$$\begin{array}{lll}
1. & \{r\} & \in \Sigma|_{p=1} \\
2. & \{\neg q\} & \leftarrow \{\neg q,\neg r\} \\
3. & \{\neg r\} & \leftarrow \{q,\neg r\} \\
4. & \square & \leftarrow \{r\}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
1. & \{\neg p,r\} & \in \Sigma \\
2. & \{\neg p,\neg q\} & \leftarrow \{\neg q,\neg r\} \\
3. & \{\neg p,\neg r\} & \leftarrow \{q,\neg r\} \\
4. & \{\neg p\} & \leftarrow \{\neg p,r\} \\
5. & \{q\} & \leftarrow \{p,q\} \\
6. & \{\neg r\} & \leftarrow \{\neg q,\neg r\} \\
7. & \{p,\neg q\} & \leftarrow \{p,\neg q,r\} \\
8. & \{p\} & \leftarrow \{q\} \\
9. & \square & \leftarrow \{\neg p\}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
1. & \{q\} & \in \Sigma|_{p=0} \\
2. & \{\neg r\} & \leftarrow \{\neg q,\neg r\} \\
3. & \{\neg q\} & \leftarrow \{\neg q,r\} \\
4. & \square & \leftarrow \{q\}
\end{array}$$

Lineáris rezolúció

Az állítást a Σ-beli változók n száma szerinti indukcióval látjuk be.

- Ha $n = 0$, azaz Σ-ban nincs változó, akkor vagy $\Sigma = \{\}$, vagy $\Sigma = \{\Box\}$.
    - A kettő közül $\Sigma = \{\Box\}$ a kielégíthetetlen.
    - Ennek $\Box$ az egyetlen eleme, ez egy minimális kielégíthetetlen részhalmazának is eleme.
    - Ha felvesszük bázisként, már le is vezettük az üres klózt.
- Ha $n > 0$, akkor vegyünk egy C klózt, mely szerepel Σ egy minimális kielégíthetetlen részhalmazában. Legyen ez a részhalmaz Σ'.
    - Ha $C = \Box$, kész vagyunk: vegyük fel bázisnak.
    - Különben legyen $\ell \in C$ egy C-beli literál.
    - Vegyük észre: minimális kielégíthetetlen részhalmazban nincs pure literál, hiszen ha ℓ pure lenne, akkor a Σ'-nak egy valódi részhalmaza, $\Sigma'|_{\ell=1}$ is kielégíthetetlen lenne. Tehát Σ'-ben $\overline{\ell}$ is szerepel valahol.

(nincs vége, csak betelt a fólia)

Lineáris rezolúció

- Vegyük a $\Sigma'|_{\ell=0}$ és $\Sigma'|_{\ell=1}$ klózhalmazokat.
- Mivel Σ' kielégíthetetlen, ezek is azok.
- Bennük csak legfeljebb $n-1$ változó szerepel (mert ℓ változója kiesik), így alkalmazhatjuk az indukciós feltevést.
- A $\Sigma'|_{\ell=0}$ klózhalmaznak $C-\{\ell\}$ is eleme, sőt egy minimális kielégíthetetlen részhalmazának is eleme (mert különben $\Sigma'-\{C\}$ is kielégíthetetlen lenne).
- Tehát $\Sigma'|_{\ell=0}$-ból az indukciós feltevés szerint van $\Box$-nak egy $C_1, C_2, \ldots, C_m$ lineáris rezolúciós levezetése, melynek $C_1 = C-\{\ell\}$ a bázisa.

(még mindig nincs vége)

Lineáris rezolúció

- Az előző példa szerint „visszaemelve” a $\Sigma|_{\ell=0}$ cáfolatot Σ' fölötti levezetéssé láthatjuk, hogy az új levezetésben minden klózba bekerül az ℓ literál.
- Ez igaz a bázisra, és minden lépésben az eredeti C_1 és C_2 klózok rezolvense helyett a $C_1 \cup \{\ell\}$ és C_2 vagy $C_2 \cup \{\ell\}$ klózok rezolvensét kapjuk, ami a rezolvens, plusz ℓ.
- Tehát ennek a konstrukciónak a végén az $\{\ell\}$ egységklóznál jár a lineáris rezolúciós levezetés.
- Mivel Σ' minimális kielégíthetetlen, kell legyen benne olyan C klóz is, mely $\overline{\ell}$-t tartalmazza. (Itt használjuk, hogy Σ'-ben ℓ nem lehetett pure.)
- Akkor $\Sigma'|_{\ell=1}$-nek egy minimális kielégíthetetlen részhalmazában szerepel $C - \{\overline{\ell}\}$.
- Ebből a klózból indulva az indukciós feltevés szerint van $\Sigma'|_{\ell=1}$-nek lineáris rezolúciós cáfolata. A terv az, hogy ezt a második cáfolatot „mögéragaszjuk” az eddiginek.

már majdnem kész a teljességi bizonyítás

Lineáris rezolúció

- Az előző fázisban kapott $\{\ell\}$ egységklózt tudjuk rezolválni ezzel a C klózzal, tehát a $\Sigma'|_{\ell=1}$ cáfolatát „fel tudjuk emelni" Σ' fölötti levezetéssé.
- A felemelt levezetés végén vagy $\square$-t, vagy $\{\overline{\ell}\}$-t kapunk. Utóbbi esetben még egyszer rezolválunk $\{\ell\}$-lel mint oldalklózzal és kész vagyunk.

done! easy. a lineáris rezolúció teljes.

Horn-formulák

A rezolúciós módszer helyes és teljes, de vannak olyan formulák, melyeknek a legrövidebb rezolúciós cáfolatuk is exponenciális sok lépést igényel.

Felmerül a kérdés, tudunk-e mondani olyan formulacsaládot, melyre a módszer garantáltan gyors?

Egy klóz Horn-klóz, ha benne legfeljebb egy pozitív literál szerepel.
Egy CNF Horn-formula, ha benne minden klóz Horn-klóz.

Horn-formula pl a szokásos halmazos reprezentációban

$$\Big\{\{p,\neg q\},\{q\},\{\neg q,r\},\{\neg p,\neg r,s\},\{\neg p,\neg s\}\Big\}$$

Honnan kaphatunk épp ilyet? A logikai programok „utasításai" Definit klóz, avagy program klóz: egy pozitív literál van benne és „lekérdezései" Kérdés klóz, avagy negatív klóz: minden benne levő literál negatív épp ilyenek: (erre még később visszatérünk)

$$q\to p,\ \ q,\ \ q\to r,\ \ (p\wedge r)\to s;\ \text{:-}(p\wedge s)?$$ ez egy prolog program

Horn-formulák

Egy Horn-formula pontosan akkor kielégíthetetlen, ha belőle levezethető az üres klóz úgy, hogy minden rezolvensképzésben az egyik résztvevő klóz pozitív egységklóz.

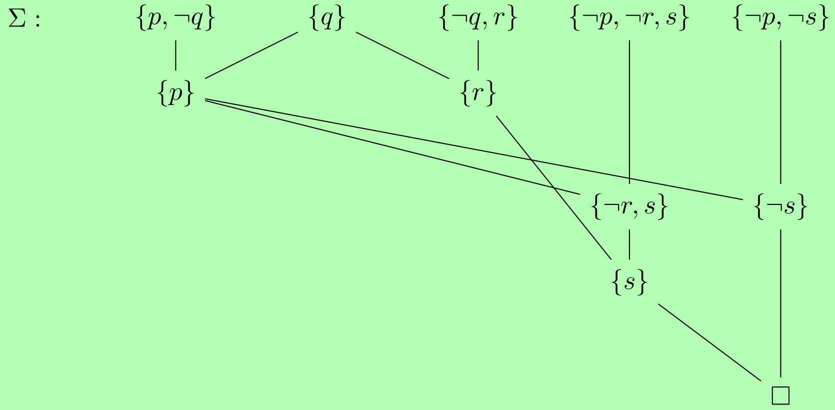
$$\Big\{\{p, \neg q\}, \{q\}, \{\neg q, r\}, \{\neg p, \neg r, s\}, \{\neg p, \neg s\}\Big\}$$

1.	$\{p, \neg q\}$	$\in \Sigma$	7.	$\{\neg r, s\}$	$\mathrm{Res}(3, 6)$
2.	$\{q\}$	$\in \Sigma$	8.	$\{s\}$	$\mathrm{Res}(5, 7)$
3.	$\{p\}$	$\mathrm{Res}(1, 2)$	9.	$\{\neg p, \neg s\}$	$\in \Sigma$
4.	$\{\neg q, r\}$	$\in \Sigma$	10.	$\{\neg s\}$	$\mathrm{Res}(3, 9)$
5.	$\{r\}$	$\mathrm{Res}(2, 4)$	11.	$\square$	$\mathrm{Res}(8, 10)$
6.	$\{\neg p, \neg r, s\}$	$\in \Sigma$			

Erre tudunk implementálni lineáris időben futó algoritmust.

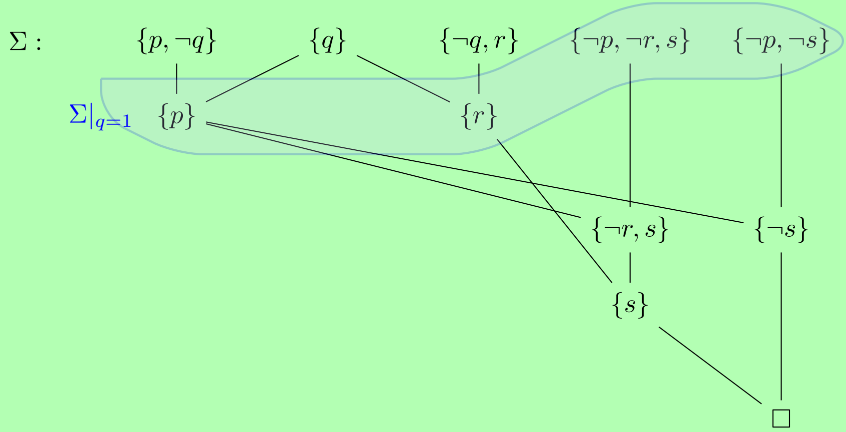
Egy gyors algoritmus Horn-formulákra

választunk egy pozitív egységklózt és végigrezolválunk vele akit csak lehet



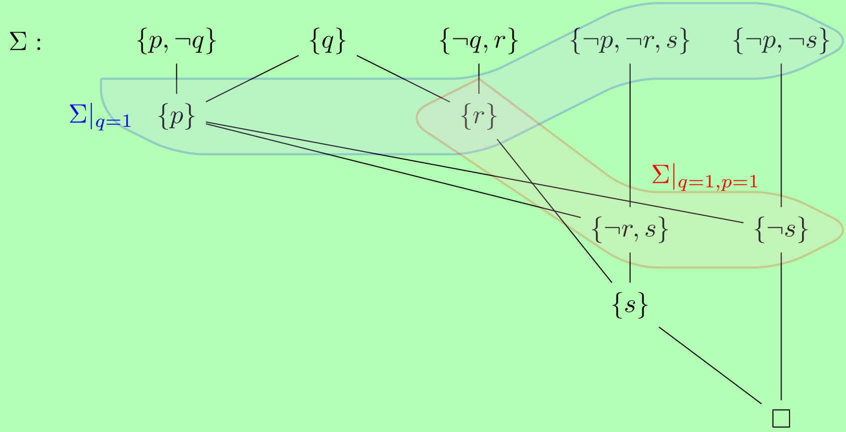
Egy gyors algoritmus Horn-formulákra

választunk egy pozitív egységklózt és végigrezolválunk vele akit csak lehet



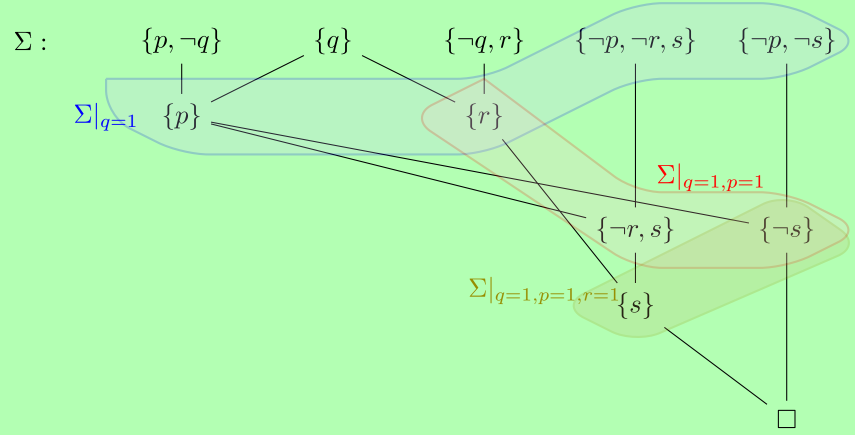
Egy gyors algoritmus Horn-formulákra

választunk egy pozitív egységklózt és végigrezolválunk vele akit csak lehet



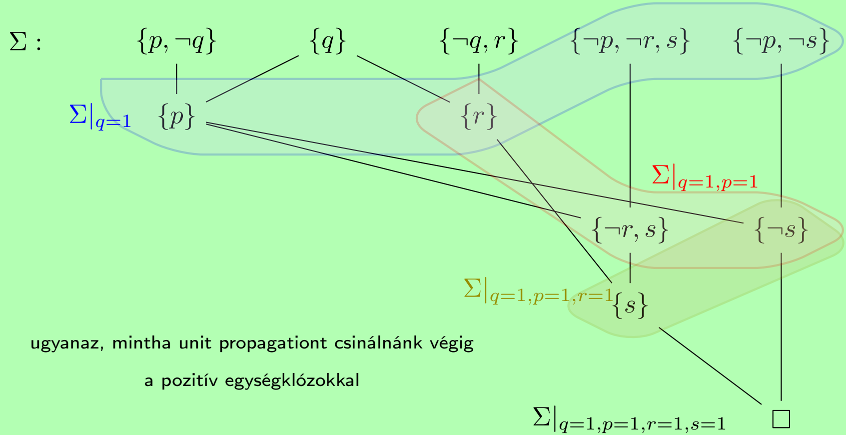
Egy gyors algoritmus Horn-formulákra

választunk egy pozitív egységklózt és végigrezolválunk vele akit csak lehet



Egy gyors algoritmus Horn-formulákra

választunk egy pozitív egységklózt és végigrezolválunk vele akit csak lehet



ugyanaz, mintha unit propagationt csinálnánk végig

a pozitív egységklózokkal

Horn-formulák

Tegyük fel, hogy Σ kielégíthetetlen Horn-formula. Megmutatjuk, hogy $\square$ levezethető belőle így.

- A Σ-beli változók n száma szerinti indukciót alkalmazunk.
- Ha $n = 0$, akkor Σ-ban nincs változó és kielégíthetetlen $\Rightarrow \Sigma = \{\square\}$ és egy lépésben kész vagyunk.
- Ha $n > 0$ és $\square \in \Sigma$, akkor megint csak egy lépésben kész vagyunk.
- Ha $n > 0$ és $\square \notin \Sigma$, akkor Σ-ban kell legyen egy $\{p\}$ pozitív egységklóz: ha nincs, akkor az az értékadás, mely minden változót 0-ra állít, kielégíti Σ-t.

  (Hiszen ekkor minden klózban van legalább egy negatív literál.)

  - Ekkor $\{p\}$-vel rezolválva minden Σ-beli klózt, melyben $\neg p$ szerepel, kapjuk, hogy $\Sigma|_{p=1}$ minden klóza levezethető ily módon:
  - amik egy $\neg p$ literált tartalmaznak, azok rezolválással $\{p\}$-vel,
  - amik nem, azok elemei Σ-nak is
  - $\Sigma|_{p=1}$ is Horn-formula

    mert úgy kapjuk, hogy a Σ Horn-formula egyes klózaiból elhagyunk egy negatív literált
  - Az indukciós feltevés szerint tehát $\Sigma|_{p=1}$-ből levezethető így $\square$.

SLD rezolúció

Selective Linear Definite

Egy rezolúciós levezetést input rezolúciónak nevezünk, ha minden rezolúciós lépésben a legutóbbi lépésben kapott klózt egy Σ-belivel rezolválunk. Ha Σ Horn-formula, és negatív bázisból indulunk, akkor SLD rezolúciónak nevezzük ezt.

(Tehát olyan lineáris rezolúció, ahol nem rezolválunk a listán korábban szereplő klózokkal).

$$\Big\{\{p,\neg q\},\{q\},\{\neg q,r\},\{\neg p,\neg r,s\},\{\neg p,\neg s\}\Big\}$$

1.	$\{\neg p,\neg s\}$	$\in \Sigma$	5.	$\{\neg q,\neg r\}$	$\leftarrow \{p,\neg q\}$
2.	$\{\neg q,\neg s\}$	$\leftarrow \{p,\neg q\}$	6.	$\{\neg q\}$	$\leftarrow \{\neg q,r\}$
3.	$\{\neg s\}$	$\leftarrow \{q\}$	7.	$\square$	$\leftarrow \{q\}$
4.	$\{\neg p,\neg r\}$	$\leftarrow \{\neg p,\neg r,s\}$			

SLD rezolúció

Legyen Σ Horn-formula.

- Tudjuk, hogy a lineáris rezolúció teljes.
- Sőt: Σ bármelyik olyan klózából indulhatunk bázisként, mely szerepel egy minimális kielégíthetetlen részhalmazban.
- Ha Σ kielégíthetetlen, akkor van benne olyan negatív klóz, mely szerepel egy minimális kielégíthetetlen részhalmazban.
  hiszen ha csak a definit klózokat vesszük, azoknak a halmaza kielégíthető $\Rightarrow$ kell negatív klóz is
- Tehát indulhatunk egy negatív bázisból.
- Az első lépésben csak input rezolúciót tudunk végezni $\Rightarrow$ megint negatív klózt kapunk.
- Tehát minden lépés után igaz, hogy csak negatív klózok szerepelnek a listán.
- Tehát nincs is más választásunk, mint input rezolválni egy lineáris rezolúciós levezetésben $\Rightarrow$ SLD rezolúciót végzünk.
- A $\square$ viszont garantáltan kijön lineáris rezolúcióval, ha Σ kielégíthetetlen.

Tehát: ha Σ Horn-formula, akkor SLD rezolúcióval is megkaphatjuk $\square$-t.

SLD rezolúció

- Az SLD rezolúció Horn-formulákra még akkor is teljes marad, ha a literálokat LIFO adatszerkezetben (veremben) tároljuk az aktuális munkaklózunkban. **Tehát mindig az utolsóként bekerült literált rezolváljuk tovább. Ettől „selective".**
- Viszont backtrack néha szükséges lehet:

$$\{\{\neg p, \neg q\}, \{p, \neg r\}, \{p, \neg s\}, \{q\}, \{s\}\}$$

1.	$\{\neg p, \neg q\}$	$\in \Sigma$	1.	$\{\neg p, \neg q\}$	$\in \Sigma$
2.	$\{\neg r, \neg q\}$	$\leftarrow \{p, \neg r\}$	2.	$\{\neg s, \neg q\}$	$\leftarrow \{p, \neg s\}$
3.	stuck		3.	$\{\neg q\}$	$\leftarrow \{s\}$
			4.	$\square$	$\leftarrow \{q\}$

Lehet egy stratégia, hogy mindig a legutolsóként bekerült literált rezolváljuk, a szóba jövő klózok közül pedig az elsőt, majd backtrack esetén a másodikat,... próbáljuk ki. Ebből még így lehet végtelen ciklus.

Amit így kapunk, a `Prolog`. Elsőrendű logikára. Még visszatérünk rá.

2Sat

Egy CNF-et 2Cnf-nek hívunk, ha benne minden klóz legfeljebb kételemű.

Legfeljebb kételemű klózok rezolvense is legfeljebb kételemű.

$$\frac{\{\ell_1, p\}, \{\ell_2, \neg p\}}{\{\ell_1, \ell_2\}}$$

Tehát egy 2Cnf-en indított rezolúció során minden, a listára felkerülő klóz legfeljebb kételemű lesz.

Ebből pedig csak $O(n^2)$ sok van, ha n a változók száma.

$f(n) = O(g(n))$, ha $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$

(A 2Satra is implementálható lineáris időigényű algoritmus.)

ezt majd bonyán

Conflict-driven clause learning, CDCL

A mai vezető SAT solverek több módszert kombinálnak:

- Futtatják a DPLL algoritmust
- Minden új értékadásnál a branching változó és az általa indukált unit propagation alapján felépítenek egy „implikációs gráfot”
- Ellentmondás esetén ez alapján a gráf alapján tanulnak egy új klózt
- Ezzel az új klózzal tovább szűkül a bejárandó keresési tér
- Ha az aktuális halmaz speciális alakú, arra célalgoritmust futtatnak

Néhány állítás Modról és $\vDash$ről

Az előző részben a bizonyításokban felhasználtunk néhány állítást (amiknek a bizonyítása, vagy annak vázlata legalább szóban elhangzott), például:

- Ha $\Sigma \subseteq \Delta$, akkor $\mathrm{Mod}(\Delta) \subseteq \mathrm{Mod}(\Sigma)$. (Tehát akkor $\Delta \vDash \Sigma$.)
- $\mathrm{Mod}(\Sigma \cup \Delta) = \mathrm{Mod}(\Sigma) \cap \mathrm{Mod}(\Delta)$.
- Ha $\Sigma \vDash \Delta$ és $\Delta \vDash \Gamma$, akkor $\Sigma \vDash \Gamma$.
- Ha $\Sigma \vDash \Delta$ és $\Sigma \vDash \Gamma$, akkor $\Sigma \vDash \Delta \cup \Gamma$.

Most ezeket az állításokat (és még néhány továbbit) bebizonyítjuk általánosabban.

Általánosítás

„Írj egy Int lista osztályt!”

```
trait IntList
case object EmptyIntList extends IntList
case class NonemptyIntList(head: Int, tail: IntList) extends IntList
```

„Írj egy Double lista osztályt!”

```
trait DoubleList
case object EmptyDoubleList extends DoubleList
case class NonemptyDoubleList(head: Double, tail: DoubleList) extends DoubleList
```

„függvényt, ami összeadja/szorozza egy Int/Double lista elemeit!”

```
def sum(list: IntList): Int = list match {
  case EmptyIntList => 0
  case NonemptyIntList(head, tail) =>
    head + sum(tail)
}
```

```
def sum(list: DoubleList): Double = list match
     {
  case EmptyDoubleList => 1
  case NonemptyDoubleList(head, tail) =>
    head * sum(tail)
}
```

Általánosítás

Inkább:

```
trait MyList[+T] //generikus típusparaméter, kovariáns
object EmptyList extends MyList[Nothing] //az üres lista az üres lista, minden típusnak jó
case class NonemptyList[T](head: T, tail: MyList[T]) extends MyList[T] {
  override def equals(that: Any): Boolean = that match {
    case NonemptyList(h, t) => h == head && t == tail
    case _ => false
  }
}
//...
type IntList = MyList[Int]        //ha nagyon el kell nevezni
type DoubleList = MyList[Double] //ha nagyon el kell nevezni

def fold[T](list: MyList[T], op: (T,T)=>T, base: T): T = list match {
  case EmptyList => base
  case NonemptyList(head, tail) => op(head, fold(tail, op, base))
}

//ha pl list egy MyList[Int] és összegezni kell:
println(fold[Int](list, { _+_ }, 0)) //nem cica
//ha double lista és szorozni:
println(fold[Double](list, { _*_ }, 1)) //member functionként much jobb, de ok
```

Általánosítás

A matematikai állításokban is az általánosítással a modularitást támogatjuk: ha kiemelünk néhány tulajdonságot általánosabb szintre és ezen a szinten bizonyítunk be valamit, az más „hasonló" helyzetben is alkalmazható lehet.

Nézzük a $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ definícióját:

$$\mathrm{Mod}(\Sigma) \ := \ \{\mathcal{A} : \ \forall F \in \Sigma \ \mathcal{A} \vDash F\}.$$

Ebből amit kiemelhetünk:

- vannak formulák (ez egy „típus")
- vannak értékadások (ez egy „másik típus")
- formulák és értékadások közt van egy $\vDash$ reláció
- ezt a relációt arra használjuk, hogy formulahalmazok és értékadáshalmazok közt definiáljunk kapcsolatot
- és erről a kapcsolatról szeretnénk mondani dolgokat.

Galois-kapcsolat

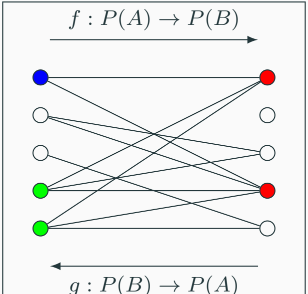
Általánosítsuk az előzőt.

Legyen A és B két halmaz, R pedig egy reláció köztük ($R \subseteq A \times B$).
Akkor R meghatároz egy $f : P(A) \to P(B)$ és egy $g : P(B) \to P(A)$ leképezést a következőképpen:

- $f(X) := \{y \in B : \ \forall x \in X \ xRy\}$
- $g(Y) := \{x \in A : \ \forall y \in Y \ xRy\}$

egy (azonos típusú elemeket tartalmazó) halmaz képe: a másik típusból azok halmaza, akik a halmaz minden elemével össze vannak kötve

Azt mondjuk ekkor, hogy f és g Galois-kapcsolatot alkotnak.



f(zöldek)=pirosak
g(pirosak)=zöldek+kék
f(zöldek+kék)=pirosak

Az előbb: A – értékadások, B – formulák
R – $\models$, g : Mod

Galois-kapcsolat

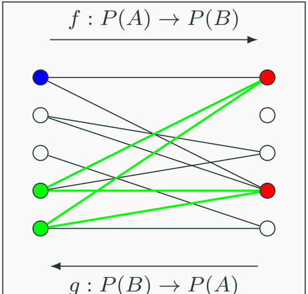
Általánosítsuk az előzőt.

Legyen A és B két halmaz, R pedig egy reláció köztük ($R \subseteq A \times B$).
Akkor R meghatároz egy $f : P(A) \to P(B)$ és egy $g : P(B) \to P(A)$ leképezést a következőképpen:

- $f(X) := \{y \in B : \ \forall x \in X \ xRy\}$
- $g(Y) := \{x \in A : \ \forall y \in Y \ xRy\}$

egy (azonos típusú elemeket tartalmazó) halmaz képe: a másik típusból azok halmaza, akik a halmaz minden elemével össze vannak kötve

Azt mondjuk ekkor, hogy f és g Galois-kapcsolatot alkotnak.



f(zöldek)=pirosak
g(pirosak)=zöldek+kék
f(zöldek+kék)=pirosak

Az előbb: A – értékadások, B – formulák
R – $\models$, $g : \mathrm{Mod}$

Galois-kapcsolat

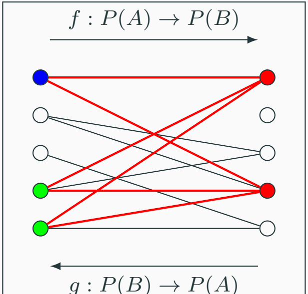
Általánosítsuk az előzőt.

Legyen A és B két halmaz, R pedig egy reláció köztük ($R \subseteq A \times B$).
Akkor R meghatároz egy $f : P(A) \to P(B)$ és egy $g : P(B) \to P(A)$ leképezést a következőképpen:

- $f(X) := \{y \in B : \ \forall x \in X \ xRy\}$
- $g(Y) := \{x \in A : \ \forall y \in Y \ xRy\}$

egy (azonos típusú elemeket tartalmazó) halmaz képe: a másik típusból azok halmaza, akik a halmaz minden elemével össze vannak kötve

Azt mondjuk ekkor, hogy f és g Galois-kapcsolatot alkotnak.



f(zöldek)=pirosak
g(pirosak)=zöldek+kék
f(zöldek+kék)=pirosak

Az előbb: A – értékadások, B – formulák
R – $\models$, g : Mod

Galois-kapcsolat

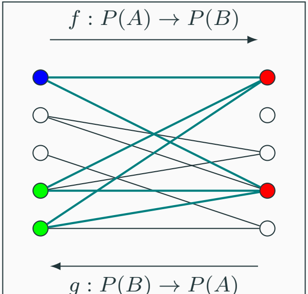
Általánosítsuk az előzőt.

Legyen A és B két halmaz, R pedig egy reláció köztük ($R \subseteq A \times B$).
Akkor R meghatároz egy $f : P(A) \to P(B)$ és egy $g : P(B) \to P(A)$ leképezést a következőképpen:

- $f(X) := \{y \in B : \ \forall x \in X \ xRy\}$
- $g(Y) := \{x \in A : \ \forall y \in Y \ xRy\}$

egy (azonos típusú elemeket tartalmazó) halmaz képe: a másik típusból azok halmaza, akik a halmaz minden elemével össze vannak kötve

Azt mondjuk ekkor, hogy f és g Galois-kapcsolatot alkotnak.



f(zöldek)=pirosak
g(pirosak)=zöldek+kék
f(zöldek+kék)=pirosak

Az előbb: A – értékadások, B – formulák
R – $\models$, $g : \mathrm{Mod}$

Galois-kapcsolat

A mi esetünkben mi most akkor f?

- Értékadásoknak egy $\mathcal{K}$ halmazához rendeli formulák egy Σ halmazát
- Az F formula akkor kerül bele ebbe a halmazba, ha $\mathcal{A} \vDash F$ teljesül minden $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$-ra

Ezt az operátort el is nevezzük: $\mathcal{K}$ elmélete („theory"), jele $\mathrm{Th}(\mathcal{K})$ lesz:

Ha $\mathcal{K}$ értékadások egy halmaza, akkor

$$\mathrm{Th}(\mathcal{K}) := \{F : \ \forall \mathcal{A} \in \mathcal{K} \ \mathcal{A} \vDash F\}$$

a $\mathcal{K}$ elmélete.

(tehát: az összes olyan formula, melyeket $\mathcal{K}$ minden egyes eleme kielégít).

Eddig tehát azt tudjuk, hogy Mod és Th Galois-kapcsolatban vannak.

Mod és Th

Példa

ha $\mathcal{A}: \ p \mapsto 1,\ q \mapsto 0,\ r \mapsto 1$ és $F = (p \to q) \lor (q \to r)$, akkor

- $\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}(F)$
- $F \in \mathrm{Th}(\mathcal{A})$

ha $\mathcal{A}_2: \ p \mapsto 0,\ q \mapsto 1,\ r \mapsto 0$, akkor

- $\mathcal{A}_2 \in \mathrm{Mod}(F)$ is és
- $F \in \mathrm{Th}(\mathcal{A}_2)$, ezért
- $F \in \mathrm{Th}(\ \{\mathcal{A}, \mathcal{A}_2\}\ )$.

note: olyan F és $\mathcal{A}$ nincs, melyekre $\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}(\ \{F, \neg F\}\ )$

a $\neg$ egy olyan művelet lesz, amivel nem tudunk mit kezdeni, csak a $\vDash$-t fogjuk nézni mint relációt

Galois-kapcsolat

Legyenek A és B halmazok, $f : P(A) \to P(B)$ és $g : P(B) \to P(A)$ pedig az $R \subseteq A \times B$ reláció által meghatározott Galois-kapcsolat függvényei.

Ha $X_1 \subseteq X_2 \subseteq A$, akkor $f(X_2) \subseteq f(X_1)$. „f antimonoton" (antitone).

- Legyen $y \in f(X_2)$. azt akarjuk belátni, hogy akkor $y \in f(X_1)$ is
- Akkor f definíciója szerint $x_2 R y$ minden $x_2 \in X_2$-re. Galois def
- Mivel $X_1 \subseteq X_2$, ezért tehát $x_1 R y$ minden $x_1 \in X_1$-re is.

  $\forall x(x \in X_1 \to x \in X_2) \wedge \forall x(x \in X_2 \to xRy) \vDash \forall x(x \in X_1 \to xRy))$
- Tehát ekkor $y \in f(X_1)$ is igaz $\Rightarrow f(X_2) \subseteq f(X_1)$. $\subseteq$ def

Persze ugyanígy g is antimonoton.

Most tehát megkaptuk azt is, hogy ha $\Sigma \subseteq \Delta$, akkor $\mathrm{Mod}(\Delta) \subseteq \mathrm{Mod}(\Sigma)$, vagyis $\Delta \vDash \Sigma$, hiszen Mod egy Galois-kapcsolatban az egyik függvény.

Továbbá, azt is megkaptuk, hogy ha $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_2$ értékadások halmazai, akkor $\mathrm{Th}(\mathcal{K}_2) \subseteq \mathrm{Th}(\mathcal{K}_1)$.

Galois-kapcsolat

Tetszőleges $X_1, X_2 \subseteq A$-ra $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$.

Bizonyítás

$$
\begin{aligned}
& y \in f(X_1 \cup X_2) & \\
\Leftrightarrow\ & xRy \text{ minden } x \in X_1 \cup X_2\text{-re} & \text{Galois def} \\
\Leftrightarrow\ & xRy \text{ minden } x \in X_1\text{-re és } xRy \text{ minden } x \in X_2\text{-re} & \text{unió} \\
\Leftrightarrow\ & y \in f(X_1) \text{ és } y \in f(X_2) & \text{Galois def} \\
\Leftrightarrow\ & y \in f(X_1) \cap f(X_2). & \text{metszet def}
\end{aligned}
$$

note unió: $\forall x((x \in X_1 \vee x \in X_2) \to xRy) \equiv \forall x((x \in X_1 \to xRy) \wedge (x \in X_2 \to xRy))$
$\equiv \forall x(x \in X_1 \to xRy) \wedge \forall x(x \in X_2 \to xRy)$

Ugyanígy, $g(Y_1 \cup Y_2) = g(Y_1) \cap g(Y_2)$.

Ezzel megkaptuk, hogy $\mathrm{Mod}(\Sigma \cup \Delta) = \mathrm{Mod}(\Sigma) \cap \mathrm{Mod}(\Delta)$.

Galois-kapcsolat

$$X \subseteq g(Y) \;\Leftrightarrow\; Y \subseteq f(X).$$

Bizonyítás

$$\begin{aligned}
X \subseteq g(Y) &\Leftrightarrow \text{ minden } x \in X\text{-re } x \in g(Y) && \text{részhalmaz def}\\
&\Leftrightarrow \text{ minden } x \in X\text{-re minden } y \in Y\text{-ra } xRy && \text{Galois def}\\
&\Leftrightarrow \text{ minden } y \in Y\text{-ra minden } x \in X\text{-re } xRy && \text{ekvivalencia}\\
&\Leftrightarrow \text{ minden } y \in Y\text{-ra } y \in f(X) && \text{Galois def}\\
&\Leftrightarrow Y \subseteq f(X). && \text{részhalmaz def}
\end{aligned}$$

Tehát így pl. $\Sigma \subseteq \mathrm{Th}(\mathcal{K}) \;\Leftrightarrow\; \mathcal{K} \subseteq \mathrm{Mod}(\Sigma)$.

$$X \subseteq g(f(X)) \text{ és } Y \subseteq f(g(Y)).$$

Írjunk az előzőbe $Y = f(X)$-et: $X \subseteq g(f(X)) \Leftrightarrow f(X) \subseteq f(X)$. A jobb oldal nyilván igaz, tehát akkor a bal is. A másik irányhoz X legyen $g(Y)$.

Galois-kapcsolat

Jelölje $f \circ g : P(B) \to P(B)$ az $Y \mapsto f(g(Y))$, $g \circ f : P(A) \to P(A)$ pedig az $X \mapsto g(f(X))$ függvényt. „odamegyünk, visszajövünk"

Tetszőleges $X_1 \subseteq X_2 \subseteq A$-ra $(g \circ f)(X_1) \subseteq (g \circ f)(X_2)$, vagyis $g \circ f$ monoton.

$$X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow f(X_2) \subseteq f(X_1) \quad \text{mert } f \text{ antimonoton}$$

$$\Rightarrow g(f(X_1)) \subseteq g(f(X_2)) \quad \text{mert } g \text{ antimonoton}$$

Teljesen hasonló módon $f \circ g$ is monoton.

Jelölje Cons ezt a $\mathrm{Th} \circ \mathrm{Mod}$ függvényt (azaz $\mathrm{Cons}(\Sigma) := \mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(\Sigma))$).

lesz értelme, nagyon is, stay tuned

Eddig azt kaptuk, hogy $\Sigma \subseteq \mathrm{Cons}(\Sigma)$, és ha $\Sigma \subseteq \Delta$, akkor $\mathrm{Cons}(\Sigma) \subseteq \mathrm{Cons}(\Delta)$.

Galois-kapcsolat

$$f(g(f(X))) = f(X).$$

„ha hármat lépünk, mintha egyet lépnénk"

$$X \subseteq g(f(X)) \subseteq g(f(g(f(X))))$$ volt ilyen „bővít lemma"

$$\Leftrightarrow f(g(f(X))) \subseteq f(X)$$ $X \subseteq g(Y) \Leftrightarrow Y \subseteq f(X)$ lemma

és $f(X) \subseteq f(g(f(X)))$ is (megint a „bővít lemma")

$$g(f(g(Y))) = g(Y).$$

(hasonlóan)

Tehát a példában nem véletlen kaptuk a harmadik lépésben vissza az első lépés eredményét: mindig így van.

Tehát $f \circ g$ és $g \circ f$ idempotens függvények: $(f \circ g)(f \circ g)(Y) = (f \circ g)(Y)$ és $(g \circ f)(g \circ f)(X) = (g \circ f)(X)$. „ha lépünk kettőt, aztán még kettőt, ugyanaz, mint csak kettőt"

Tehát, $\mathrm{Cons}(\mathrm{Cons}(\Sigma)) = \mathrm{Cons}(\Sigma)$ is igaz például.

Lezárási operátor

Egy $h : P(A) \to P(A)$ függvényt lezárási operátornak nevezünk, ha

- monoton: $X \subseteq Y \Rightarrow h(X) \subseteq h(Y)$;
- bővítő: $X \subseteq h(X)$
- és idempotens: $h(h(X)) = h(X)$.

Tehát azt kaptuk eddig, hogy

Ha f és g Galois-kapcsolatban vannak, akkor $f \circ g$ is és $g \circ f$ is lezárási operátor.

Általában a lezárási operátorok is „jelentenek" valamit, ha f és g is. Sőt, sokszor maga a lezárási operátor a „legmotiváltabb" művelet az összes közül.

A $\vDash$ által generált Galois-kapcsolatban mi a Cons lezárási operátor jelentése?

Következmények

A lezárási operátorra általában igaz, hogy:

$$a \in (g \circ f)(X) \Leftrightarrow \{a\} \subseteq g(f(X)) \qquad \text{egyelemű halmaz } \subseteq$$
$$\Leftrightarrow f(X) \subseteq f(\{a\}). \qquad X \subseteq g(Y) \Leftrightarrow Y \subseteq f(X) \text{ lemma}$$

Mit jelent ez a $\vDash$ esetében?

$F \in \mathrm{Cons}(\Sigma)$ pontosan akkor igaz, ha $\Sigma \vDash F$.

Azaz: $\mathrm{Cons}(\Sigma)$-ban épp a Σ logikai következményei vannak!

Az is igaz, hogy minden $\mathrm{Th}(\mathcal{K})$ alakú formulahalmaz egyben $\mathrm{Cons}(\Sigma)$ alakú is (a $\Sigma = \mathrm{Th}(\mathcal{K})$-ra, önmagára alkalmazva Cons-t) és persze mivel $\mathrm{Cons} = \mathrm{Th} \circ \mathrm{Mod}$, így minden $\mathrm{Cons}(\Sigma)$ alakú halmaz egyben $\mathrm{Th}(\mathcal{K})$ alakú is. Az ilyen formulahalmazokat nevezzük elméletnek.

Vagyis:

Σ elmélet, ha $\Sigma = \mathrm{Cons}(\Sigma)$, azaz ha Σ tartalmazza az összes következményét.

Elméletek

Ha Σ elmélet, $F \in \Sigma$ és $F \equiv G$, akkor $G \in \Sigma$.

Hiszen ekkor $\mathrm{Mod}(\Sigma) \subseteq \mathrm{Mod}(F) = \mathrm{Mod}(G)$.

Ha Σ elmélet, akkor tartalmazza az összes tautológiát.

Hiszen $\Sigma \vDash \uparrow$ minden Σ-ra igaz, így minden elmélet tartalmazza a $\uparrow$ formulát, és az előző állítás miatt a vele ekvivalenseket: a tautológiákat is.

Elméletek

Mivel egy elmélet is egy formulahalmaz, az lehet kielégíthető vagy kielégíthetetlen.

Ha Σ elmélet, akkor a következők ekvivalensek:

i) Σ kielégíthetetlen (ekkor ellentmondásosnak is nevezzük);

ii) $\downarrow \in \Sigma$;

iii) Σ az összes formula halmaza;

iv) van olyan F formula, hogy $F, \neg F \in \Sigma$.

i)→ii) Ha Σ kielégíthetetlen, akkor $\Sigma \vDash \downarrow$. Ha Σ elmélet, akkor tartalmazza a következményeit, tehát ekkor $\downarrow \in \Sigma$.

ii)→iii) Mivel $\downarrow \to F$ tetszőleges F-re tautológia, így Σ-beli; mivel $\{\downarrow, \downarrow \to F\} \vDash F$, így ekkor $F \in \Sigma$.

iii)→iv) ha minden formula benne van, akkor persze hogy találni ilyet

iv)→i) nincs olyan $\mathcal{A}$, mely egyszerre modellje F-nek is és $\neg F$-nek is

Galois-kapcsolatok máshol

Ha $A = B$ egy (véges dimenziós) vektortér elemei (mint pl. $A = B = \mathbb{R}^n$) és a relációnk a $\perp$ (két vektor relációban van, ha merőlegesek, skaláris szorzatuk 0), akkor:

- az f és g függvények vektorok egy U halmazához az összes, U minden elemére merőleges vektor halmazát rendelik (aminek jele $U^\perp$);
- az $f \circ g$ lezárási operátor pedig az U vektorhalmazhoz az általa kifeszített alteret rendeli (jele $\langle U \rangle$)

Akkor a Galois-kapcsolatból pl. olyanokat kapunk, hogy

- $\langle \langle U \rangle \rangle = \langle U \rangle$
- tetszőleges U vektorhalmazra $U^\perp = \langle U \rangle^\perp$
- $X \subseteq Y^\perp$ pont akkor, ha $Y \subseteq X^\perp$
- ha $U \subseteq V$, akkor $V^\perp \subseteq U^\perp$
- stb. „ingyen”

Galois-kapcsolatok máshol

Ha pl. $A = B$ egy részbenrendezett halmaz és a relációnk a $\leq$ részbenrendezés, akkor

- $f(X) = \{y : \ \forall x \in X \ x \leq y\}$ az X fölső korlátainak halmaza;
- $g(Y)$ az Y alsó korlátainak halmaza;
- a lezárási operátorok lezárják X-et „lefelé'' ill. „felfelé'' és (ha van) beveszik a szuprémumot /infimumot is – tehát $(g \circ f)(X) = \{y : \ y \leq \bigvee X\}$, ha a szuprémum létezik és hasonlóan $(f \circ g)(Y) = \{x : \ \bigwedge Y \leq x\}$

Erre az esetre a Galois-kapcsolatból azt kapjuk ingyen pl., hogy

- ha $X \subseteq Y$ és létezik a szuprémumuk/infimumuk, akkor $\bigvee X \leq \bigvee Y$ és $\bigwedge X \leq \bigwedge Y$;
- egy X halmaz felső korlátjainak infimuma az épp X szuprémuma (ha létezik);
- stb.

Lezárási operátorok

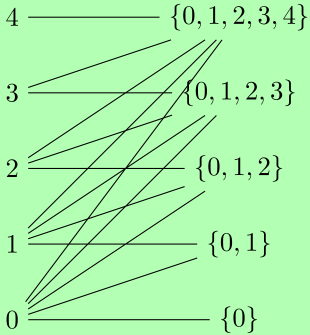
Nem csak az igaz, hogy minden (f, g) Galois-kapcsolat meghatároz egy $f \circ g$ (és egy $g \circ f$) lezárási operátort, de fordítva is:

Minden lezárási operátor előáll $X \mapsto g(f(X))$ alakban egy alkalmas R reláció által meghatározott (f, g) Galois-kapcsolatra.

- Legyen $h : P(A) \to P(A)$ egy lezárási operátor: monoton, bővítő, idempotens.
- Legyen $B = \{C \subseteq A : h(C) = C\}$ a zárt halmazok halmaza.
- Legyen a relációnk az $a \in C$: a lezárt halmazokat (mint B-beli elemeket) hozzuk relációba elemeikkel (mint A-beli elemekkel).
- Akkor $f(X) = \{C \subseteq A : C \text{ zárt}, X \subseteq C\}$ az összes olyan zárt halmaz halmaza, amiknek X része;
- Akkor $g(Y) = \{a \in A : a \in C \text{ minden } C \in Y\text{-ra}\}$. Azaz: $g(Y) = \bigcap_{C \in Y} C$ épp az Y-beli zárt halmazok metszete.

Lezárási operátorok

Ha pl. $h : P(\mathbb{N}_0) \to P(\mathbb{N}_0)$ a $h(X) := \{n : \exists m \in X \ n \leq m\}$ operátor:
$\ldots$



- $f(\{0\})$: az összes, 0-t tartalmazó zárt halmaz halmaza
- $f(\{2\})$: az összes, 2-t tartalmazó zárt halmaz halmaza
- $f(\{0, 2\})$: az összes, 0-t és 2-t is tartalmazó zárt halmaz halmaza
- $g(\{\{0, 1, 2\}, \{0, 1, 2, 3\}\})$: a két zárt halmaz metszete, $\{0, 1, 2\}$

Lezárási operátorok

Bizonyítás, tovább

- Tehát $(g \circ f)(X)$ az összes, X-et tartalmazó zárt halmaz metszete.
- Zárt halmazok metszete is zárt: ha $h(X_i)$ zárt halmazok, akkor $h(\bigcap h(X_i)) \subseteq h(h(X_i)) = h(X_i)$, tehát $h(\bigcap h(X_i)) \subseteq \bigcap h(X_i)$, mivel pedig h bővítő, így $h(\bigcap h(X_i)) = \bigcap h(X_i)$.
- Mivel $X \subseteq h(X)$ és $h(X)$ zárt halmaz, így $(g \circ f)(X) \subseteq h(X)$ is igaz.
- Tehát $X \subseteq (g \circ f)(X) \subseteq h(X)$ és az utóbbi kettő zárt halmaz.
- Akkor a monotonitás miatt $h(X) \subseteq h(g \circ f)(X) = (g \circ f)(X)$ is igaz, tehát tényleg $h(X) = (g \circ f)(X)$.

Tehát: ha lezárási operátorral találkozunk, az alatt is mindig ott egy Galois-kapcsolat.

Műveletek egy családjára való lezárás

Legyen A egy alaphalmaz, O pedig $A^n \to A$ parciális függvények egy halmaza.

parciális: nem feltétlenül mindenhol definiált

Akkor ha $X \subseteq A$, úgy $O(X)$ jelöli az

$$X \cup \{f(x_1, \ldots, x_n) : f/n \in O, x_1, \ldots, x_n \in X\}$$

halmazt.

Tehát: X-be vegyük be az összes olyan $f(x_1, \ldots, x_n)$ értéket is, amire f egy O-beli művelet, az $x_1, \ldots, x_n$ elemek pedig X-beliek.

Ha pl. az A alaphalmazunk a klózok halmaza (az összes klóz halmaza), és $\mathbf{Res}$-ben a rezolvensképzés szerepel műveletként, akkor ha Σ klózok egy halmaza, úgy $\mathbf{Res}(\Sigma) = \Sigma \cup \{R : \ R \text{ két } \Sigma\text{-beli klóz rezolvense}\}$.

Nyilván igaz, hogy $X \subseteq O(X)$ és ha $X \subseteq Y$, akkor $O(X) \subseteq O(Y)$.

Műveletek egy családjára való lezárás

Jelölje $O^*(X)$ az $\bigcup_{n\geq 0} O^n(X)$ halmazt. azaz: az $X \cup O(X) \cup O(O(X)) \cup \ldots$ halmazt.

Példa

$\mathbf{Res}^*(\Sigma)$-ban az összes, Σ-ból rezolúcióval levezethető klóz szerepel.

Véges változószámú parciális műveletek tetszőleges O családjára

O^* lezárási operátor.

- Ehhez azt elég megmutatnunk, hogy $O(O^*(X)) = O^*(X)$.
- $O(O^*(X)) = O^*(X) \cup \{f(x_1, \ldots, x_n) : f \in O, x_i \in O^*(X)\}$.
- Ha $x_1 \in O^{k_1}(X)$, $x_2 \in O^{k_2}(X)$,..., akkor mindegyik $x_i \in O^N(X)$ az $N = \max\{k_1, \ldots, k_n\}$-re.
- Akkor $f(x_1, \ldots, x_n) \in O^{N+1}(X) \subseteq O^*(X)$.
- Tehát $O(O^*(X)) = O^*(X)$. Ezért $O(O(O^*(X))) = O^*(X)$ stb, így $O^*(O^*(X)) = O^*(X)$ és O^* tényleg lezárási operátor.

Műveletek egy családjára való lezárás

A Galois-kapcsolat miatt pedig:

- az $O^*(X)$ alakú halmazok épp azok, melyek zártak O összes műveletére;
- az $O^*(X)$ halmaz pedig az összes ilyen, X-et tartalmazó zárt halmaz metszete,
- ami szintén egy zárt halmaz,
- ezt tehát mondhatjuk így is: $O^*(X)$ a legszűkebb olyan halmaz, mely tartalmazza X-et és mely zárt O összes műveletére.

(Ilyet is láttunk már: így készítettük pl. a formulák halmazát is.)

Ha egy $h : P(A) \to P(A)$ lezárási operátort fel tudunk írni $h = O^*$ alakban úgy, hogy O-ban véges sok (kiszámítható) függvény szerepel, akkor tetszőleges $X \subseteq A$-ra, ha X elemeinek generálására van algoritmus, úgy $O^*(X)$ elemeit is szisztematikusan tudjuk generálni.

Deduktív rendszerek

- Egy deduktív rendszer inputként kap egy Σ formulahalmazt és valamilyen algoritmikus módon kigenerálja Σ összes következményét. (Ez mindig egy végtelen halmaz, pl. az összes tautológia is benne van.)
- Azt tudjuk, hogy Cons egy lezárási operátor.
- A cél: műveleteknek egy olyan „kicsi" O halmazát megadni (ezeket fogja végezni a következtető rendszer), melyre $O^* = \mathrm{Cons}$.
- Ekkor a deduktív rendszer csak O műveleteit kezdi el elvégezni Σ elemein valamilyen „fair" sorrendben (fair: előbb-utóbb minden műveletsor sorra kerül), és ezzel $\mathrm{Cons}(\Sigma)$ minden elemét megkapja előbb-utóbb.
- A rezolúció önmagában nem ilyen rendszer: az nem igaz, hogy minden következményt le lehet vezetni rezolúcióval.
- Egy ilyen rendszer lesz viszont a Hilbert-rendszer. Azt viszont (szintén) csak speciális alakú formulákon definiáljuk.

Teljes rendszerek

Boole-függvények egy H rendszere teljes vagy adekvát, ha minden $n \geq 1$-változós Boole-függvény előáll

- a projekciókból — π_i jelölte az i-edik változó kiválasztását
- és H elemeiből
- alkalmas kompozícióval.

Kompozíció

Ha f/n és $g_1/k, \ldots, g_n/k$ Boole-függvények, akkor az $f \circ \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$ az a k-változós Boole-függvény, melyre

$$(f \circ \langle g_1, \ldots, g_n \rangle)(x_1, \ldots, x_k) = f(g_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_k)).$$

pl. $\wedge = \neg \circ \vee \circ \langle \neg \circ \pi_1, \neg \circ \pi_2 \rangle$, hiszen

$$\begin{aligned}(\neg \circ \vee \circ \langle \neg \circ \pi_1, \neg \circ \pi_2 \rangle)(x_1, x_2) &= \neg((\vee \circ \langle \neg \circ \pi_1, \neg \circ \pi_2 \rangle)(x_1, x_2)) \\ &= \neg((\vee((\neg \circ \pi_1)(x_1, x_2), (\neg \circ \pi_2)(x_1, x_2)))) \\ &= \neg(\vee(\neg x_1, \neg x_2))\end{aligned}$$

Teljes rendszerek

```
def inc: Double => Double = { x => x + 1 }
def dup: Double => Double = { x => x * 2 }
def combo = inc compose dup
println(combo(5)) //prints 11
```

Persze ezt az előzőt érdemesebb lehet inkább úgy kiírni kézzel, hogy

$$x_1 \wedge x_2 \;=\; \neg(\neg x_1 \;\vee\; \neg x_2).$$

„a $\wedge$ függvény kifejezhető a $\{\neg, \vee\}$ függvényekkel"

Hogy H teljes, az pont azt jelenti, hogy ha vesszük azt az O operátort, melyben a projekciók és H elemei szerepelnek, akkor erre $O^*(\emptyset)$ tartalmazza az összes Boole-függvényt. Tehát megint egy műveletcsaláddal definiált lezárási operátorról van szó.

Teljes rendszerek

Recap: Shannon-expanzió

Azt már láttuk, hogy a $\{\neg, \vee, \wedge\}$ rendszer teljes.

Teljes rendszer még pl: $\{\neg, \wedge\}$, $\{\rightarrow, \downarrow\}$, $\{$ nand $\}$, $\{$ nor $\}$.

$$x \text{ nand } y \;:=\; \neg(x \wedge y) \qquad\qquad x \text{ nor } y \;:=\; \neg(x \vee y)$$

(gyakorlaton ezeket megnézzük)

Note: hogy egy következtető algoritmus „teljes" és hogy Boole-függvények egy rendszere „teljes", az egész mást jelent!

Teljes rendszerek

Most a célunk bebizonyítani a következőt:

Ha az $f/2$ Boole-függvény egyedül is teljes rendszert alkot, akkor $f =$ nand vagy $f =$ nor .

Egy f/n Boole-függvény...

- 0-őrző, ha $f(0, 0, \ldots, 0) = 0$
- 1-őrző, ha $f(1, 1, \ldots, 1) = 1$
- monoton, ha $x_1 \leq y_1, \ldots, x_n \leq y_n \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) \leq f(y_1, \ldots, y_n)$
- önduális, ha $f(\neg x_1, \ldots, \neg x_n) = \neg f(x_1, \ldots, x_n)$
- lineáris, ha van olyan $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ halmaz és $c \in \{0, 1\}$ konstans, melyre $f(x_1, \ldots, x_n) = c + \sum\limits_{i \in I} x_i$ (itt $+$ a xor művelet)

Boole-függvények tulajdonságai, példák

- Az $\wedge$ és $\vee$ függvények őrzik a 0-t és az 1-et is: $0 \wedge 0 = 0 \vee 0 = 0$, $1 \wedge 1 = 1 \vee 1 = 1$. A $\rightarrow$ őrzi az 1-et, de nem őrzi a 0-t. A $\neg$ nem őrzi egyiket se.
- A $\wedge$ és $\vee$ függvények monotonok: ha növeljük bármelyik argumentum értékét, az eredmény nem fog csökkenni. A $\neg$ nem monoton, mert $0 \leq 1$, de $\neg 0 \not\leq \neg 1$. A $\rightarrow$ sem monoton, mert $1 = 0 \rightarrow 0 \not\leq 1 \rightarrow 0 = 0$.
- A $\neg$ függvény önduális, hiszen $f(\neg x) = \neg(\neg x) = f(\neg x)$. A $\wedge$ nem önduális, hiszen $\neg(x \wedge y) \neq \neg x \wedge \neg y$ (pl. ha $x = 1$ és $y = 0$).
- A $\neg$ függvény lineáris: $\neg x = 1 + x$. A $\wedge$ nem lineáris ($x \wedge y$ nem egyenlő semmivel, ami előáll 1, x és y közül néhánynak a xorjaként)
- A projekciók őrzik a nullát és az egyet is, monotonak, lineáriak és önduálisak is.

Boole-függvények tulajdonságai

Ha H Boole-függvények olyan halmaza, melyben minden függvény őrzi a 0-t, akkor minden olyan függvény, mely belőlük és a projekciókból áll elő kompozícióval, szintén őrzi a 0-t.

- A projekciók őrzik a 0-t: $\pi_i(0, \ldots, 0) = 0$.
- Ha $f = g \circ \langle h_1, \ldots, h_k \rangle$ a g/k, h_1/n, …, h_k/n 0-őrző függvényekre, akkor

$$
\begin{aligned}
f(0, 0, \ldots, 0) &= g(h_1(0, \ldots, 0), \ldots, h_k(0, \ldots, 0)) && \text{kompozíció def} \\
&= g(0, \ldots, 0) && \text{mert minden } h_i \text{ őrzi a } 0\text{-t} \\
&= 0 && \text{mert } g \text{ őrzi a } 0\text{-t}
\end{aligned}
$$

Tehát ha H Boole-függvényeknek egy teljes rendszere, akkor kell legyen H-ban olyan függvény, mely nem őrzi a 0-t.

pl. $\{\neg, \vee\}$-ben $\neg$, $\{\rightarrow, \downarrow\}$-ban $\rightarrow$ nem őrzi a 0-t

Boole-függvények tulajdonságai

Teljesen hasonló állítások (ugyanígy bizonyítva) igazak a másik négy tulajdonságra is.

Ha H Boole-függvényeknek egy teljes rendszere, akkor kell legyen benne...

- olyan függvény, mely nem őrzi a 0-t;
- olyan függvény, mely nem őrzi az 1-et;
- olyan függvény, mely nem monoton;
- olyan függvény, mely nem önduális;
- és olyan függvény is, mely nem lineáris.

Pl. $\{\neg, \vee\}$-ben $\neg$ nem őrzi a konstansokat és nem monoton, $\vee$ pedig nem önduális és nem is lineáris.
$\{\rightarrow, \downarrow\}$-ban $\rightarrow$ nem őrzi a 0-t, nem monoton és nem lineáris; $\downarrow$ nem őrzi az 1-et (!) és nem önduális (mert $\neg \downarrow () \neq \downarrow ()$).

nand és nor

Ezek szerint ha $f/2$ egy olyan Boole-függvény, melyre $\{f\}$ teljes, akkor

- $f(0,0) = 1$ kell legyen (különben őrizné a 0-t)
- $f(1,1) = 0$ kell legyen (különben őrizné az 1-et)
- ha $f(0,1) = 0$ és $f(1,0) = 1$, akkor $f(x,y) = 1 + y$, lineáris lenne, ez nem lehet
- ha $f(0,1) = 1$ és $f(1,0) = 0$, akkor $f(x,y) = 1 + x$, lineáris lenne, ez sem lehet
- tehát vagy $f(0,1) = 0$ és $f(1,0) = 0$ (és akkor $f = \text{nor}$)
- vagy $f(0,1) = 1$ és $f(1,0) = 1$ (és akkor $f = \text{nand}$).

Post tétele

Boole-függvények egy H rendszere pontosan akkor teljes, ha mind az öt tulajdonságra létezik benne olyan függvény, mely nem rendelkezik az adott tulajdonsággal.

Hilbert rendszere

„Hilbert-kalkulus”

Hilbert rendszere egy deduktív rendszer: az input Σ összes következményét (és csak azokat) lehet vele levezetni.

Ebben a rendszerben csak a $\rightarrow$ konnektívát és a $\downarrow$ logikai konstanst használhatjuk az ítéletváltozókon kívül.

Minden formula ilyen alakra hozható, mert a $\{\rightarrow, \downarrow\}$ rendszer teljes.

A Hilbert rendszer axiómái

$$\begin{aligned} \text{Ax1}: &\quad (F \rightarrow (G \rightarrow H)) \rightarrow ((F \rightarrow G) \rightarrow (F \rightarrow H)) \\ \text{Ax2}: &\quad F \rightarrow (G \rightarrow F) \\ \text{Ax3}: &\quad ((F \rightarrow \downarrow) \rightarrow \downarrow) \rightarrow F \end{aligned}$$

(Note: ezek a formulák tautológiák.)

Az axiómák

$$\big(F \to (G \to H)\big) \to \big((F \to G) \to (F \to H)\big)$$

Tautológia:

- Ha F hamis, akkor $1 \to (1 \to 1) = 1$
- Ha F igaz, akkor ez ekvivalens a $(G \to H) \to (G \to H)$-val, ami szintén igaz minden értékadás mellett

Az axiómák

$$F \to (G \to F)$$

Tautológia:

ha F igaz, a jobb oldal igaz; ha F hamis, a bal oldal hamis

A sorrend fontos, a $\to$ nem asszociatív!
$(F \to G) \to F$ nem tautológia: ha F hamis, G igaz, ez a formula hamis

A $\to$ konvenciója: jobb-asszociatív, $F \to G \to H$ az $F \to (G \to H)$-t jelenti, de a könnyebb olvashatóság érdekében ezt igyekszünk kerülni a példákban

Note: egyébként $F \vee (G \wedge H)$ sem ekvivalens $(F \vee G) \wedge H$-val. Pl. $1 \vee (0 \wedge 0) = 1 \vee 0 = 1$, de $(1 \vee 0) \wedge 0 = 1 \wedge 0 = 0$. Azaz a „magukban" kommutatív, asszociatív műveletek nem lesznek automatikusan azok „egymás közt" is.

Az axiómák

$$\big((F \to\downarrow) \to\downarrow\big) \to F$$

Tautológia:

Az $F \to\downarrow$ részformulát akár $\neg F$-nek is írhatnánk.
Tehát ez $\neg\neg F \to F$, a kettős negálás eliminálása, tautológia

Az axiómák példányai

A fenti három axióma egy **példánya**: valamelyik axiómában szereplő F, G, H helyére **tetszőleges formulát írunk**.

(Ugyanazon betű helyére persze ugyanazt a formulát.)

Ennek a műveletnek jelet is adunk:

Ha F egy formula, melyben a $p_1, \ldots, p_n$ változók szerepelnek, és $F_1, \ldots, F_n$ formulák, akkor

$$F[p_1/F_1, \ldots, p_n/F_n]$$

jelöli azt a formulát, melyet úgy kapunk F-ből, hogy benne minden p_i helyére az F_i formulát írjuk.

Példa

$$\big(F \to (G \to F)\big)[F/p, G/(p \to p)] = \big(p \to ((p \to p) \to p)\big).$$

A modus ponens

A leválasztási következtetés, vagy modus ponens

$$\{F, F \to G\} \models G.$$

Ez egy helyes következtetési szabály.

Levezetés Hilbert rendszerében

Legyen Σ formulák egy halmaza, F pedig egy formula. Azt mondjuk, hogy F levezethető Σ-ból Hilbert rendszerében, jelben $\Sigma \vdash F$, ha van olyan $F_1, F_2, \ldots, F_n$ formula-sorozat, melynek minden eleme

- Σ-beli vagy
- axiómapéldány vagy
- előáll két korábbiból modus ponenssel

és melyre $F_n = F$. (Ha Σ üres, akkor $\emptyset \vdash F$ helyett $\vdash F$-et is írhatunk.)

Példa

$$\vdash \ p \to p.$$

Ax1: $(F \to (G \to H)) \ \to \ ((F \to G) \to (F \to H))$

Ax2: $F \to (G \to F)$

1. $p \to \big((p \to p) \to p\big)$

   $\mathrm{Ax2}[F/p, G/(p \to p)]$

2. $\Big(p \to \big((p \to p) \to p\big)\Big) \to \Big(\big(p \to (p \to p)\big) \to (p \to p)\Big)$

   $\mathrm{Ax1}[F/p, G/(p \to p), H/p]$

3. $\big(p \to (p \to p)\big) \to (p \to p)$

   $\mathrm{MP}(1,2)$

4. $p \to (p \to p)$

   $\mathrm{Ax2}[F/p, G/p]$

5. $p \to p$

   $\mathrm{MP}(3,4)$

(Note: mindig csak a külső $\to$ mentén választhatunk le!)

Példa

$$\{p \to q\} \ \vdash \ p \to (r \to q).$$

Ax1: $(F \to (G \to H)) \ \to \ ((F \to G) \to (F \to H))$

Ax2: $F \to (G \to F)$

1. $\big(p \to (q \to (r \to q))\big) \to \big((p \to q) \to (p \to (r \to q))\big)$

   $\mathrm{Ax1}[F/p, G/q, H/(r \to q)]$

2. $q \to (r \to q)$

   $\mathrm{Ax2}[F/q, G/r]$

3. $\big(q \to (r \to q)\big) \to \big(p \to (q \to (r \to q))\big)$

   $\mathrm{Ax2}[F/(q \to (r \to q)), G/p]$

4. $p \to (q \to (r \to q)) \quad \mathrm{MP}(2,3)$

5. $(p \to q) \to (p \to (r \to q)) \quad \mathrm{MP}(1,4)$

6. $p \to q \quad \in \Sigma$

7. $p \to (r \to q) \quad \mathrm{MP}(5,6)$

Példa

$$\{p \to q,\ q \to r\} \vdash p \to r.$$

Ax1: $(F \to (G \to H)) \to ((F \to G) \to (F \to H))$

Ax2: $F \to (G \to F)$

1. $\big(p \to (q \to r)\big) \to \big((p \to q) \to (p \to r)\big)$	Ax1
2. $q \to r$	$\in \Sigma$
3. $(q \to r) \to \big(p \to (q \to r)\big)$	Ax2
4. $p \to (q \to r)$	$\mathrm{MP}(2,3)$
5. $(p \to q) \to (p \to r)$	$\mathrm{MP}(1,4)$
6. $p \to q$	$\in \Sigma$
7. $p \to r$	$\mathrm{MP}(5,6)$

Példa

$$\vdash \ \downarrow\to p.$$

(Gyakorlaton.)

- A fenti példákban p helyére tetszőleges F formulát írva minden levezetésben megkapjuk, hogy $\vdash\ (F \to F)$ és $\vdash\ (\downarrow\to F)$ minden F formulára igaz.
- Hasonlóan, ha $\Sigma\ \vdash\ F \to G$ és $\Sigma\ \vdash\ G \to H$, akkor $\Sigma\ \vdash\ F \to H$ a harmadik példa alapján.
- Ha $\Sigma \vdash F$ és $\Sigma \subseteq \Gamma$, akkor $\Gamma \vdash F$ (a nem Σ-beli elemeket nem használjuk fel)

A célunk bebizonyítani Hilbert rendszerének helyességi és teljességi tételét:

$$\Sigma \vdash F \quad \Leftrightarrow \quad \Sigma \vDash F$$

tetszőleges Σ formulahalmazra és F formulára.

persze itt a formulák csak a $\to$ és a $\downarrow$ konnektívákat tartalmazhatják

Példányosítás és kielégíthetőség

Kielégíthető formulából is kaphatunk kielégíthetetlent, vagy tautológiát:

- $F \wedge G$ kielégíthető, de $(F \wedge G)[F/p, G/\neg p] = p \wedge \neg p$ kielégíthetetlen
- $F \vee G$ nem tautológia, de $(F \vee G)[F/p, G/\neg p] = p \vee \neg p$ az

viszont

Tautológia példányai is tautológiák.

Tehát a Hilbert rendszer axióma-példányai tautológiák.

Példányosítás és kiértékelés

Az előző állítás az alábbinak a következménye:

Legyenek az F formulában szereplő változók $p_1, \ldots, p_n$, és $F_1, \ldots, F_n$ további formulák (melyekben más változók is előfordulhatnak).
Legyen $\mathcal{A}$ egy tetszőleges értékadás.
Definiáljuk a $\mathcal{B}$ értékadást a következőképpen:

$$\mathcal{B}(p_i) := \mathcal{A}(F_i).$$

(a p_i értéke $\mathcal{B}$-ben legyen az az érték, ami F_i értéke $\mathcal{A}$-ban.)
Ekkor

$$\mathcal{B}(F) \;=\; \mathcal{A}(F[p_1/F_1, \ldots, p_n/F_n])).$$

Valóban következménye, hiszen ha F tautológia, akkor ez a fenti $\mathcal{B}(F)$ minden $\mathcal{A}$ eredeti értékadásra igaz lesz.

Bizonyítás

Az F formula felépítése szerinti indukciót használunk:

- Ha $F = p_i$, akkor $F[p_1/F_1, \dots, p_n/F_n] = F_i$.
  Ekkor $\mathcal{B}(p_i) = \mathcal{A}(F_i)$ a $\mathcal{B}$ definíciója miatt.
- Ha $F = \neg G$, akkor

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(F) &= \neg\mathcal{B}(G) && \neg \text{ szemantikája szerint} \\
&= \neg\mathcal{A}(G[p_1/F_1, \dots, p_n/F_n]) && \text{indukciós feltevés szerint} \\
&= \mathcal{A}(\neg G[p_1/F_1, \dots, p_n/F_n]) && \neg \text{ szemantikája szerint} \\
&= \mathcal{A}(F[p_1/F_1, \dots, p_n/F_n]) && \text{a példányosítás def szerint}
\end{aligned}$$

- Ha $F = G \to H$, akkor

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(G \to H) &= \mathcal{B}(G) \to \mathcal{B}(H) \\
&= \mathcal{A}(G[p_1/F_1, \dots, p_n/F_n]) \to \mathcal{A}(H[p_1/F_1, \dots, p_n/F_n]) \\
&= \mathcal{A}(G[p_1/F_1, \dots, p_n/F_n] \to H[p_1/F_1, \dots, p_n/F_n]) \\
&= \mathcal{A}(F[p_1/F_1, \dots, p_n/F_n]). \text{ (többi eset hasonló)}
\end{aligned}$$

A jólmegalapozott indukció

Láttunk már indukciót

- természetes számokra: „0-ra igaz és ha n-re igaz, akkor $n+1$-re is"
- formulákra: „változókra igaz, és ha a formula közvetlen részformuláira is igaz, akkor a formulára is"
- függvények kompozícióira: „az x_i-re igaz és ha $f_1, \dots, f_k$-ra és f-re igaz, akkor igaz $f \circ \langle f_1, \dots, f_k \rangle$-ra is"

A módszer persze nem mindig működik, pl:

- „minden nemnegatív valós szám egész"
- „mert a 0 egész"
- „és az $r > 0$ valósra az $r/2$ kisebb"
  - „indukciós feltevés szerint $r/2$ tehát egész"
  - „tehát $2 \cdot (r/2) = r$ is egész"
- „tehát minden nemnegatív valós szám egész"

nyilvánvalóan hibás következtetés.

Valós számokra nem használhatunk indukciót. Miért?

A jólmegalapozott indukció

Általában egy indukciós bizonyítás a következőképp néz ki:

- van objektumoknak egy A halmaza (formulák, természetes számok,...)
- köztük egy $\prec$ reláció, $x \prec y$ kb. az „x egyszerűbb/kisebb, mint y" ($n \prec n+1$, a formula részformulái kisebbek a formulánál,...)
- az alapeset: megmutatjuk azokra az x elemekre az állítást, akiknél nincs kisebb (0-ra, a változókra,...)
- az indukciós lépés: megmutatjuk, hogy ha az összes x-nél kisebb elemre igaz az állítás, akkor x-re is
- és ezzel megmutattuk, hogy minden A-beli objektumra igaz az állítás.

A fenti általános bizonyítási módszer akkor működik, ha $\prec$-ben nincs végtelen leszálló lánc, vagyis

$$\text{nincs} \ldots \prec x_3 \prec x_2 \prec x_1 \prec x_0 \text{ sorozat.}$$

A módszer neve: jólmegalapozott indukció.

ha nincs végtelen leszálló lánc $\prec$-ben, akkor ő egy „well partial order", WPO

A teljes és a strukturális indukció

A teljes indukció

Az objektumok a természetes számok: $\{0, 1, 2, \ldots\}$, a reláció pedig $0 \prec 1 \prec 2 \prec 3 \prec \ldots$.

Itt $\prec$-ben nincs végtelen leszálló lánc (felszálló van, az nem baj)

A felépítés szerinti vagy strukturális indukció

Az objektumok a formulák és $F \prec G$, ha F a G-nek közvetlen részformulája.

Itt sincs $\prec$-ben végtelen leszálló lánc.

A felépítés szerinti indukció minden ún. „algebrai adattípusra" működik $\approx$ alap komponensekből építünk fel véges objektumokat valamilyen képzési szabályok szerint

A valós számokra azért nem, mert pl. $\ldots < 1/16 < 1/8 < 1/4 < 1/2 < 1$ egy végtelen leszálló lánc

A rezolúció helyességénél is ezt használtuk: ott $C \prec C'$ volt, ha C előbb került a listára, mint C'

Vissza a Hilbert-kalkulushoz: Helyesség

Ha $\Sigma \vdash F$, akkor $\Sigma \vDash F$

A helyesség iránya könnyű: ha $\Sigma \vdash F$, akkor $\Sigma \vDash F$, hiszen

- Legyen $F_1, \ldots, F_n$ egy Σ fölötti levezetése F-nek. Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy minden i-re $\Sigma \vDash F_i$.
- Ha $F_i \in \Sigma$, akkor $\Sigma \vDash F_i$ (ez minden Σ, F-re igaz, láttuk)
- Ha F_i axiómapéldány, akkor $\emptyset \vDash F_i$ (a tautológiák minden elméletben szerepelnek), így a monotonitás miatt $\Sigma \vDash F_i$ is igaz
- Ha pedig $F_i = \mathrm{MP}(F_j, F_k)$ a $j, k < i$ indexekre, akkor
  - Az indukciós feltevés szerint $\Sigma \vDash F_j$ és $\Sigma \vDash F_k$
  - Tehát $\Sigma \vDash \{F_j, F_k\}$
  - MP def miatt $F_k = F_j \rightarrow F_i$: $\Sigma \vDash \{F_j, F_j \rightarrow F_i\}$
  - A leválasztási következtetés: $\{F_j, F_j \rightarrow F_i\} \vDash F_i$
  - A tranzitivitás miatt tehát $\Sigma \vDash F_i$.

Ezzel beláttuk, hogy a Hilbert-rendszer helyes következtető rendszer.

Teljesség – a dedukciós tétel

A teljességhez először belátjuk a Hilbert-rendszer dedukciós tételét:

A dedukciós tétel

Tetszőleges Σ formulahalmazra és F, G formulákra

$$\Sigma \vdash (F \to G) \quad \Leftrightarrow \quad \Sigma \cup \{F\} \vdash G.$$

Ennek az állításnak megint az egyik irányát könnyebb, a másikat nehezebb belátni.

$\Sigma \vdash (F \to G) \quad \Rightarrow \quad \Sigma \cup \{F\} \vdash G$

Ha $\Sigma \vdash (F \to G)$, akkor

- $\Sigma \cup \{F\} \vdash (F \to G)$ (ugyanaz a levezetés jó)
- $\Sigma \cup \{F\} \vdash F$ (mert eleme)
- $\Sigma \cup \{F\} \vdash G$ (az előző kettőből MP)

A dedukciós tétel

$\Sigma \cup \{F\} \vdash G \quad \Rightarrow \quad \Sigma \vdash (F \to G)$

Legyen $F_1, \ldots, F_n$ a G formula $\Sigma \cup \{F\}$ fölötti levezetése. Megmutatjuk teljes indukcióval, hogy minden i-re $\Sigma \vdash (F \to F_i)$.

- Ha $F_i \in \Sigma \cup \{F\}$, akkor két eset lehetséges:
  - Ha $F_i \in \Sigma$, akkor
    - $\Sigma \vdash F_i$ (mert eleme)
    - $\Sigma \vdash F_i \to (F \to F_i)$ (Ax2)
    - $\Sigma \vdash F \to F_i$ (MP)
  - Ha $F_i = F$, akkor $\Sigma \vdash F \to F$ (öt lépésben, ezt már láttuk)
- Ha F_i axiómapéldány, akkor ugyanúgy, mint mikor Σ-beli:
  - $\Sigma \vdash F_i$ (mert axiómapéldány)
  - $\Sigma \vdash F_i \to (F \to F_i)$ (Ax2)
  - $\Sigma \vdash F \to F_i$ (MP)

nincs még kész

(Note: a második axióma példányosításának sokszor ez a célja: megvan az F formulánk és egy $G \to F$-re van szükségünk)

A dedukciós tétel

folytatás

$\Sigma \cup \{F\} \vdash G \quad \Rightarrow \quad \Sigma \vdash (F \to G)$

- Ha $F_i = \mathrm{MP}(F_j, F_k)$, ahol $j, k < i$, akkor:
  - $F_k = (F_j \to F_i)$ és az indukciós feltevés szerint $\Sigma \vdash F \to F_j$ és $\Sigma \vdash F \to (F_j \to F_i)$.
  - $\big(F \to (F_j \to F_i)\big) \to \big((F \to F_j) \to (F \to F_i)\big)$ $\mathrm{Ax1}$
  - $(F \to F_j) \to (F \to F_i)$ MP
  - $F \to F_i$ MP

done

Ezzel bebizonyítottuk a dedukciós tételt.

Ezt felhasználva most bebizonyítjuk a Hilbert-rendszer teljességét is.

A Hilbert-rendszer teljessége: H-konzisztencia

de kell hozzá még egy def

H-konzisztens halmazok

Egy Σ formulahalmazt H-konzisztensnek nevezünk, ha nem igaz, hogy $\Sigma \vdash \downarrow$.

A következők ekvivalensek tetszőleges Σ formulahalmazra:

i) Van olyan F formula, melyre $\Sigma \vdash F$ és $\Sigma \vdash (F \to \downarrow)$ is igaz.

ii) Σ nem H-konzisztens.

iii) $\Sigma \vdash F$ minden F formulára.

i)$\to$ii) Ha $\Sigma \vdash \{F, F \to \downarrow\}$, akkor ezekből MP-vel $\Sigma \vdash \downarrow$.

ii)$\to$iii) Ha $\Sigma \vdash \downarrow$, akkor mivel $\Sigma \vdash (\downarrow \to F)$ (ezt látjuk majd gyakorlaton), ezekből MP-vel $\Sigma \vdash F$ minden F formulára.

iii)$\to$i) Ha minden F levezethető, akkor pl. $\downarrow$ és $\downarrow \to \downarrow$ is

A Hilbert rendszer teljessége: maximális H-konzisztencia

meg még egy def

A bizonyítás lényege:

- kiindulunk egy H-konzisztens Σ formulahalmazból
- kibővítjük egy (potenciálisan) sokkal nagyobb Σ' H-konzisztens halmazzá
- erről a Σ'-ről megmutatjuk, hogy kielégíthető úgy, hogy adunk hozzá egy kielégítő értékadást $\Rightarrow$ mivel $\Sigma \subseteq \Sigma'$, Σ is kielégíthető lesz

Maximális H-konzisztens halmazok

Egy Σ formulahalmazt maximális H-konzisztensnek nevezünk, ha

- Σ H-konzisztens és
- minden $F \notin \Sigma$-ra $\Sigma \cup \{F\}$ már nem H-konzisztens.

belőle még nem vezethető le $\downarrow$, de ha bárkit hozzáveszünk, már az lesz

Minden Σ H-konzisztens halmazhoz van $\Sigma' \supseteq \Sigma$ maximális H-konzisztens halmaz.

minden ilyen Σ kibővíthető úgy h maximális legyen

A Hilbert-rendszer teljessége: maximális H-konzisztencia

Minden H-konzisztens Σ kibővíthető maximálissá: Bizonyítás

- Legyen $F_1, F_2, F_3, \ldots$ az összes formula egy felsorolása. megszámlálható sok van
- Legyen $\Sigma_0 := \Sigma$.
- Ha $\Sigma_i \cup \{F_{i+1}\}$ H-konzisztens, akkor legyen $\Sigma_{i+1} := \Sigma_i \cup \{F_{i+1}\}$.
- Egyébként legyen $\Sigma_{i+1} := \Sigma_i$.
- Azt állítjuk, hogy $\Sigma' := \bigcup_{i \geq 0} \Sigma_i$ egy maximális H-konzisztens halmaz.

  Note: $\Sigma_0 \subseteq \Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \subseteq \ldots$, ezért ha $\Gamma \subseteq \Sigma'$ véges, akkor van olyan i, melyre $\Gamma \subseteq \Sigma_i$
- Σ' H-konzisztens, mert:
  - $\Sigma_0 = \Sigma$ H-konzisztens;
  - ha Σ_i H-konzisztens, akkor Σ_{i+1} a sorozat definíciója szerint az
  - tehát mindegyik Σ_i H-konzisztens
  - ha $\Sigma' \vdash\downarrow$, akkor (mivel Σ'-nek csak véges sok elemét használjuk egy levezetésben) $\Sigma_i \vdash\downarrow$ valamilyen i-re, ami nem lehet, hiszen mindegyik Σ_i H-konzisztens.
- Σ' maximális, mert ha $F_i \notin \Sigma'$, akkor $\Sigma_{i-1} \cup \{F_i\} \vdash\downarrow$, tehát $\Sigma' \cup \{F_i\} \vdash\downarrow$.

A Hilbert-rendszer teljessége: H-konzisztencia

Ha Σ maximális H-konzisztens halmaz, akkor tetszőleges F formulára vagy $F \in \Sigma$, vagy $(F \to \downarrow) \in \Sigma$, de nem mindkettő.

egy maximális H-konzisztens halmazban minden formulára vagy ő, vagy a negáltja szerepel a halmazban

Bizonyítás

- Ha F, $F \to \downarrow \ \in \ \Sigma$, akkor belőlük MP-vel $\Sigma \vdash \downarrow$, ami ellentmond a H-konzisztenciának. tehát „nem mindkettő" done
- Tegyük fel, hogy se F, se $F \to \downarrow$ nincs Σ-ban. indirekt
  - Mivel Σ maximális, ezért tehát $\Sigma \cup \{F\} \vdash \downarrow$ és $\Sigma \cup \{F \to \downarrow\} \vdash \downarrow$.
  - Akkor a dedukciós tétel szerint:
    - $\Sigma \vdash F \to \downarrow$
    - $\Sigma \vdash (F \to \downarrow) \to \downarrow$
    - $\Sigma \vdash \downarrow$ (MP-vel ebből a kettőből)

  ami ellentmond annak, hogy Σ H-konzisztens.

A Hilbert-rendszer teljessége: H-konzisztencia

Tetszőleges Σ formulahalmaz pontosan akkor kielégíthető, ha H-konzisztens.

- Ha Σ kielégíthető, akkor $\Sigma \not\models \downarrow$, tehát $\Sigma \not\vdash \downarrow$ (a Hilbert-rendszer helyessége miatt).
  egyik irány kész is
- Legyen Σ egy H-konzisztens formulahalmaz.
  be akarjuk bizonyítani, hogy kielégíthető
- Akkor Σ kibővíthető egy $\Sigma' \supseteq \Sigma$ maximális H-konzisztens halmazzá.
  lehet, hogy többféleképp is, válasszunk egyet
- Ebben minden p változó (mint formula) vagy szerepel, vagy nem (akkor pedig $p \to \downarrow$ szerepel benne).
  ezért bővítettük ki maximálissá
- Legyen $\mathcal{A}$ a következő értékadás:

$$\mathcal{A}(p) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad p \in \Sigma'.$$

nincs még kész, most jön h ellenőrizzük: ez az értékadás kielégíti Σ'-t

A Hilbert-rendszer teljessége

- Azt állítjuk, hogy $\mathcal{A} \vDash F$ pontosan akkor igaz F-re, ha $F \in \Sigma'$.
- Ezt F felépítése szerinti indukcióval látjuk be.
- Ha $F = \downarrow$, akkor $\mathcal{A} \not\vDash \downarrow$ és $\downarrow \notin \Sigma'$

  első rész minden $\mathcal{A}$-ra igaz, második mert Σ' H-konzisztens
- Ha $F = p$ változó, akkor az állítás $\mathcal{A}$ definíciója miatt igaz.
- Ha $F = (F_1 \rightarrow F_2) \in \Sigma'$, akkor:
  - indirekten tegyük fel, hogy $\mathcal{A} \not\vDash (F_1 \rightarrow F_2)$.
  - Ekkor $\mathcal{A} \vDash F_1$ és $\mathcal{A} \not\vDash F_2$. $\rightarrow$ szemantikája miatt
  - Az indukciós feltevés szerint $F_1 \in \Sigma'$ és $F_2 \notin \Sigma'$.
  - Tehát mivel Σ' maximális, $F_2 \rightarrow \downarrow \in \Sigma'$. ezért bővítettük ki Σ-t
  - Ekkor $F_1,\ F_1 \rightarrow F_2,\ F_2,\ F_2 \rightarrow \downarrow,\ \downarrow$ egy Σ' fölötti levezetése $\downarrow$-nak

    $\in,\ \in,\ \mathrm{MP},\ \in,\ \mathrm{MP}$ sorrendben
  - Ami ellentmond annak, hogy Σ' H-konzisztens!

    tehát ha $F_1 \rightarrow F_2 \in \Sigma'$, akkor $\mathcal{A} \vDash F_1 \rightarrow F_2$

nincs még kész

A Hilbert-rendszer teljessége

- Ha $F = (F_1 \to F_2) \notin \Sigma'$, akkor:
  - Mivel Σ' maximális, ezért $(F_1 \to F_2) \to\downarrow \in \Sigma'$.
  - Indirekten tegyük fel, hogy $\mathcal{A} \vDash (F_1 \to F_2)$.
  - Tehát $\mathcal{A} \nvDash F_1$ vagy $\mathcal{A} \vDash F_2$ (vagy mindkettő). $\to$ szemantikája
  - Ha $\mathcal{A} \vDash F_2$:
    - az indukciós feltevés szerint $F_2 \in \Sigma'$.
    - Akkor Σ' nem H-konzisztens, mert $F_2,\ F_2 \to (F_1 \to F_2),\ F_1 \to F_2,\ (F_1 \to F_2) \to\downarrow,\ \downarrow$ egy Σ' fölötti levezetése $\downarrow$-nak.
  - Ha $\mathcal{A} \nvDash F_1$:
    - Az indukciós feltevés szerint tehát $(F_1 \to\downarrow) \in \Sigma'$.
    - De $\Sigma' \vdash (\downarrow\to F_2)$ is igaz. mert $\downarrow\to F$ alakú
    - Tehát $\Sigma' \vdash F_1 \to\downarrow$ és $\Sigma' \vdash\downarrow\to F_2$, emiatt $\Sigma' \vdash F_1 \to F_2$ az egyik korábbi példa szerint volt: $\Sigma \vdash F \to G$, $\Sigma \vdash G \to H \Rightarrow \Sigma \vdash F \to H$
    - Mivel $(F_1 \to F_2) \to\downarrow\ \in\ \Sigma'$, így $\Sigma' \vdash\downarrow$, ez az ág is ellentmond a H-konzisztenciának.

Tehát ha $(F_1 \to F_2) \notin \Sigma'$, akkor $\mathcal{A} \not\vDash F$ és ezzel az állítást igazoltuk.

done, easy

A Hilbert-rendszer teljessége

Mondjuk ki az állítást még egyszer:

Tetszőleges Σ formulahalmaz pontosan akkor kielégíthető, ha H-konzisztens.

Ennek következménye:

A Hilbert-rendszer helyességi és teljességi tétele

Tetszőleges Σ formulahalmazra és F formulára

$$\Sigma \vDash F \quad \Leftrightarrow \quad \Sigma \vdash F.$$

$$
\begin{aligned}
\Sigma \vDash F &\Leftrightarrow \Sigma \cup \{F \to \downarrow\} \vDash \downarrow && \text{következmény vs kielégíthetetlenség} \\
&\Leftrightarrow \Sigma \cup \{F \to \downarrow\} \vdash \downarrow && \text{előző állítás} \\
&\Leftrightarrow \Sigma \vdash (F \to \downarrow) \to \downarrow && \text{dedukciós tétel} \\
&\Leftrightarrow \Sigma \vdash F && \text{ezt mindjárt.}
\end{aligned}
$$

A Hilbert-rendszer teljessége

$\Sigma \vdash (F \rightarrow\downarrow) \rightarrow\downarrow \quad \Leftrightarrow \quad \Sigma \vdash F$

Elég belátnunk, hogy $\{(F \rightarrow\downarrow) \rightarrow\downarrow\} \vdash F$ és $\{F\} \vdash (F \rightarrow\downarrow) \rightarrow\downarrow$.

- $\{(F \rightarrow\downarrow) \rightarrow\downarrow\} \vdash F$:
  - dedukciós tétel szerint ez pontosan akkor igaz, ha $\vdash ((F \rightarrow\downarrow) \rightarrow\downarrow) \rightarrow F$
  - ami igaz (Ax3)
- $\{F\} \vdash (F \rightarrow\downarrow) \rightarrow\downarrow$:
  - dedukciós tétel szerint ez pontosan akkor igaz, ha $\{F,\ F \rightarrow\downarrow\} \vdash \downarrow$
  - ami igaz ($\in,\ \in,\ \mathrm{MP}$)

Ezzel a Hilbert-rendszer teljességét beláttuk: tetszőleges Σ halmazból Hilbert rendszerében pontosan Σ következményei vezethetőek le.

done, easy

A kompaktsági tétel

A bizonyításban most sehol nem használtuk, hogy Σ véges-e!

Egy Hilbert-rendszerbeli $\Sigma \models F$ bizonyításban viszont csak véges sok Σ-beli formulát használunk.

Tehát:

Az ítéletkalkulus kompaktsági tétele

Tetszőleges Σ formulahalmaznak pontosan akkor logikai következménye egy F formula, ha már egy véges részhalmazának is következménye.

A tételnek egy másik, ekvivalens alakja:

Az ítéletkalkulus kompaktsági tétele

Egy Σ formulahalmaz pontosan akkor kielégíthetetlen, ha van véges kielégíthetetlen részhalmaza.

A kompaktsági tétel

A két alak tényleg ekvivalens:

- A tétel első alakjából következik a második:

$$
\begin{aligned}
\Sigma \text{ kielégíthetetlen } &\Leftrightarrow \Sigma \vDash\downarrow && \text{(ezt tudjuk)}\\
&\Leftrightarrow \text{van véges } \Sigma_0 \subseteq \Sigma, \text{ melyre } \Sigma_0 \vDash\downarrow && \text{első alak}\\
&\Leftrightarrow \text{van véges kielégíthetetlen } \Sigma_0 \subseteq \Sigma.
\end{aligned}
$$

- A tétel második alakjából következik az első:

$$
\begin{aligned}
\Sigma \vDash F \Leftrightarrow \Sigma \cup \{\neg F\} \vDash\downarrow & && \text{(ezt tudjuk)}\\
&\Leftrightarrow \text{van véges kielégíthetetlen } \Sigma_0 \subseteq \Sigma \cup \{\neg F\} && \text{második alak}\\
&\Leftrightarrow \text{van véges } \Sigma_0 \subseteq \Sigma, \text{ melyre } \Sigma_0 \cup \{\neg F\} \vDash\downarrow && F\text{-et külön vesszük}\\
&\Leftrightarrow \text{van véges } \Sigma_0 \subseteq \Sigma, \text{ melyre } \Sigma_0 \vDash F && \text{indirekt következtetés}
\end{aligned}
$$

A kompaktsági tétel haszna

A kompaktsági tétel egy újabb alakja:

Az ítéletkalkulus kompaktsági tétele

Egy Σ formulahalmaz pontosan akkor kielégíthető, ha minden véges részhalmaza kielégíthető.

A tétel haszna

ha van

- egy végtelen Σ formulahalmazunk (nemsokára látunk ilyeneket), melynek az elemeit egy algoritmus generálja
- és egy olyan következtető algoritmusunk, ami input véges Σ_0-ra és F-re el tudja dönteni véges idő alatt, hogy igaz-e $\Sigma_0 \vDash F$,

akkor van olyan algoritmusunk, ami inputként kap egy (akár végtelen) Σ-t (ha végtelen, akkor egy generátor algoritmust kap), és egy F formulát, és

- ha $\Sigma \vDash F$, akkor ezt véges időn belül mindenképp megmutatja
- ha $\Sigma \nvDash F$, akkor végtelen ciklusba esik

A kompaktsági tétel haszna

- Később (számtud, bonyelm) az ilyen Σ halmazokat, melyre van az elemeit generáló algoritmus, rekurzívan felsorolható halmaznak fogjuk hívni
- Az olyan problémákat, melyekre van olyan A algoritmus, hogy tetszőleges I inputra
  - ha I-re a válasz „igen" kellene legyen, akkor A az I-n futtatva „igen"-t mond,
  - ha I-re a válasz „nem" kellene legyen, akkor A az I-n futtatva végtelen ciklusba esik,

  pedig félig eldönthető problémáknak fogjuk hívni.

Tehát az előző dián szereplő állítás röviden:

Félig eldönthető a következő probléma:

- Input: egy rekurzívan felsorolható Σ formulahalmaz és egy F formula
- Output: igaz-e $\Sigma \vDash F$?

Elsőrendű logika

Elsőrendű logika

Informálisan:

- Ítéletkalkulusban a változók a $\{0,1\}$ halmazból vettek fel értékeket, ezeket a logikai konnektívákkal kapcsoltuk össze
- Elsőrendű logikában, avagy predikátumkalkulusban viszont
    - a változók objektumoknak egy univerzumából vagy alaphalmazából veszik fel az értékeiket; (pl. természetes számok, stringek, stb.)
    - az objektumokat függvények transzformálhatják más objektumokká; (pl. összeadás, stringek összefűzése stb.)
    - az objektumokból predikátumok képeznek igazságértéket (pl. páros-e a szám, alfanumerikus-e a string, stb.)
    - és a változókat kvantálni is lehet (minden számnál van nagyobb, van üres string, stb.)
- A kiértékelés sokkal komplexebbé válik (nem is mindig létezik rá algoritmus, ha az alaphalmaz végtelen)
- Ezért megint a kielégíthetetlenségre fogunk nézni (féligeldöntő) algoritmusokat

Szintaxis

- Elsőrendű változók, vagy individuum változók, mostantól röviden csak „változók”: $x, y, z, \ldots, x_1, y_5, \ldots$
- Függvényjelek: $f, g, \ldots, f_1, g_5, \ldots$
- Predikátumjelek: $p, q, r, \ldots, p_1, q_5, \ldots$
- Konnektívák: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\neg$
- Kvantorok: $\forall$, $\exists$
- Logikai konstansjelek: $\uparrow$, $\downarrow$

Használunk még zárójeleket és vesszőket az egyértelmű olvashatóság kedvéért.

- Minden függvényjelnek és predikátumjelnek van egy aritása, avagy rangja, változószáma. Ha f egy n-változós jel, ezt f/n jelöli.
- A 0-aritású függvényjeleket konstansjelnek nevezzük.
- A 0-aritású predikátumjeleket logikai változóknak.

Minden jelből megszámlálható sok van: ez annyit jelent, hogy algoritmikusan generálni tudjuk az első, második,... (n-változós) jelet.

Szintaxis: termek

Elsőrendű logikában két szintaktikus kategória van: a termek és a formulák halmaza.
(Kiértékeléskor a termek vesznek fel objektumot értékként, a formulák pedig igazságértéket.)

A termek

- Minden változó term.
- Ha f/n függvényjel, $t_1, \ldots, t_n$ pedig termek, akkor $f(t_1, \ldots, t_n)$ is term.
- Más term nincs.

Például ha x, y változók, $c/0$, $f/1$ és $g/2$ függvényjelek, akkor $g(f(x), g(c(), y))$ term.

Ha $c/0$ konstansjel, akkor $c()$ helyett csak c-t írunk. A $p/0$-nál is $p()$ helyett csak p-t.

Szintaxis: formulák

A formulák

- Ha p/n predikátumjel, $t_1, \ldots, t_n$ pedig termek, akkor $p(t_1, \ldots, t_n)$ egy (atomi) formula.
- Ha F formula, akkor $\neg F$ is az.
- Ha F és G formulák, akkor $F \vee G$, $F \wedge G$, $F \to G$, $F \leftrightarrow G$ is az.
- $\downarrow$ és $\uparrow$ is formulák.
- Ha F formula és x változó, akkor $\exists x F$ és $\forall x F$ is formulák.
- Más formula nincs.

(Az egyértelmű olvashatóság kedvéért itt is zárójelezünk.)

Például ha $p/1$ és $q/2$ predikátumjelek és $f/1$ függvényjel, akkor

$$\exists x \big(p(x) \wedge \forall y q(f(x), y) \big)$$

egy formula.

Szemantika: struktúrák

Egy elsőrendű formulát egy struktúrában értékelünk ki.

Struktúra

Egy $\mathcal{A} = (A, I, \varphi)$ hármas, ahol

- A egy nemüres halmaz, az univerzum, vagy alaphalmaz — az objektumoké
- φ a változóknak egy „default'' értékadása, minden x változóhoz egy $\varphi(x) \in A$ objektumot rendel
- I az interpretációs függvény, ez rendel a függvény- és predikátumjelekhez szemantikát, „értelmet'' az adott struktúrában:
  - ha f/n függvényjel, akkor $I(f)$ egy $A^n \to A$ függvény;
  - ha p/n predikátumjel, akkor $I(p)$ egy $A^n \to \{0, 1\}$ predikátum (vagy „reláció''). — nem pedig "interpolációs'' ffs

  Erre van egy megkötésünk:

  Az $=$ bináris predikátumjelet minden struktúrában ténylegesen az egyenlőséggel kell interpretálnunk!

Szemantika: termek kiértékelése

Ha t egy term, $\mathcal{A} = (A, I, \varphi)$ pedig egy struktúra, akkor t értéke $\mathcal{A}$-ban egy A-beli objektum lesz, melyet $\mathcal{A}(t)$-vel is jelölünk és felépítés szerinti indukcióval definiálunk:

A t term értéke az $\mathcal{A}$ struktúrában, $\mathcal{A}(t)$

- Ha $t = x$ változó, akkor $\mathcal{A}(t) = \varphi(x)$ (tehát: a változók értékét φ szabja meg)
- Ha $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, akkor $\mathcal{A}(t) = I(f)\big(\mathcal{A}(t_1), \ldots, \mathcal{A}(t_n)\big)$
(tehát: rekurzívan kiértékeljük a $t_1, \ldots, t_n$ termeket a struktúrában, kapjuk az $a_1, \ldots, a_n \in A$ objektumokat; ezeket behelyettesítjük az $I(f)$ függvénybe, amit ebben a struktúrában az f jel jelöl.)

Szemantika: termek kiértékelése

Például: ha $+/2$, $\times/2$, $'/1$ függvényjelek, $0/0$ és $1/0$ konstansjelek, x és y pedig változók, akkor egy struktúra lehet pl. $\mathcal{A} = (\mathbb{N}_0, I, \varphi)$, ahol

- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ a természetes számok halmaza;
- $\varphi(x) = 2$, $\varphi(y) = 3$, $\varphi(z) = 6$,...
- $I(+)$, $I(\times)$ és $I(')$ rendre az összeadás, szorzás és az $n \mapsto n+1$ rákövetkezés függvények,
- $I(0) = 0$ és $I(1) = 1$.

Ha „ismert" bináris függvény- vagy predikátumjelekkel van dolgunk a példákban, azokat infix is írjuk a könnyebb olvashatóság kedvéért, pl. $+(x, y)$ helyett $x + y$-t. Akkor pl.

- $\mathcal{A}((x+1) \times y) = 9$, hiszen $\mathcal{A}(x) = 2$, $\mathcal{A}(1) = 1$, akkor $\mathcal{A}(x+1) = I(+)(2, 1) = 2 + 1 = 3$, $\mathcal{A}(y) = 3$ és $\mathcal{A}((x+1) \times y) = I(\times)(3, 3) = 9$.
- $\mathcal{A}((x \times y) + 0) = 6$,
- $\mathcal{A}((0+1) \times 1) = 1$.

Szemantika: termek kiértékelése

Általában is elég csak a ténylegesen használt változók értékét specifikálnunk φ-ben:

Ha t term, $\mathcal{A} = (A, I, \varphi)$ és $\mathcal{A}' = (A, I, \varphi')$ pedig olyan struktúrák, melyekre minden t-beli x-re $\varphi(x) = \varphi'(x)$, akkor $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}'(t)$.

Bizonyítás: t felépítése szerinti indukcióval

- Ha $t = x$: ekkor $\mathcal{A}(t) = \varphi(x) = \varphi'(x) = \mathcal{A}'(t)$
- Ha $t = f(t_1, \ldots, t_n)$: ekkor minden i-re t_i összes x változójára $\varphi(x) = \varphi'(x)$ is igaz. Így az indukciós feltevés szerint $\mathcal{A}(t_i) = \mathcal{A}'(t_i)$ minden i-re, és ekkor

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(t) &= I(f)(\mathcal{A}(t_1), \ldots, \mathcal{A}(t_n))\\ &= I(f)(\mathcal{A}'(t_1), \ldots, \mathcal{A}'(t_n))\\ &= \mathcal{A}'(t).\end{aligned}$$

Szemantika: termek kiértékelése

Ezért ha t-ben nincs változó, úgy a φ megadása is felesleges, ilyenkor csak $\mathcal{A} = (A, I)$-nek írjuk a struktúrát.

Pl. az előbb $(0+1)\times 1$ egy változómentes term volt; ezeket a termeket alaptermeknek vagy ground termeknek nevezzük.

alapterm

Azokat a termeket, melyek nem tartalmaznak változót, alaptermeknek nevezzük.

Szemantika: formulák kiértékelése

A két kvantor kiértékelésének definíciójához szükségünk lesz a következő jelölésre:

Ha $\mathcal{A} = (A, I, \varphi)$ struktúra, x változó és $a \in A$ objektum, akkor $\mathcal{A}_{[x \mapsto a]}$ jelöli azt az (A, I, φ') struktúrát, melyben

$$\varphi'(y) := \begin{cases} a & \text{ha } y = x, \\ \varphi(y) & \text{különben.} \end{cases}$$

Vagyis: $\mathcal{A}_{[x \mapsto a]}$-t úgy kapjuk $\mathcal{A}$-ból, hogy benne az x változó default értékét a-ra változtatjuk, mást nem változtatunk meg.
Ha több változónak is beállítunk értéket, akkor ${\mathcal{A}_{[x \mapsto a]}}_{[y \mapsto b]}$ helyett $\mathcal{A}_{[x \mapsto a, y \mapsto b]}$-t írunk, hogy olvasható maradjon.

A sorrend számít, ha a változók közt van átfedés! $\mathcal{A}_{[x \mapsto 2, x \mapsto 3]}$-ban x default értéke 3 lesz.

Szematika: formulák kiértékelése

Formula értéke struktúrában

Ha F formula, $\mathcal{A} = (A, I, \varphi)$ pedig struktúra, akkor az F értéke $\mathcal{A}$-ban egy igazságérték, amit $\mathcal{A}(F)$ jelöl és az F felépítése szerinti indukcióval adunk meg:

- Logikai konstansok: $\mathcal{A}(\uparrow) = 1$, $\mathcal{A}(\downarrow) = 0$
- Konnektívák: $\mathcal{A}(F \wedge G) = \mathcal{A}(F) \wedge \mathcal{A}(G)$, $\mathcal{A}(\neg F) = \neg\mathcal{A}(F)$, ...
- Atomi formulák:

$$\mathcal{A}(p(t_1, \ldots, t_n)) \ := \ I(p)(\mathcal{A}(t_1), \ldots, \mathcal{A}(t_n)).$$

  Vagyis: $\mathcal{A}$-ban először kiértékeljük a $t_1, \ldots, t_n$ termeket, kapjuk az $a_1, \ldots, a_n$ objektumokat és ezeket behelyettesítjük abba a predikátumba (és kapunk egy igazságértéket), amit ebben a struktúrában a p jelöl.

Szemantika: formulák kiértékelése

Formula értéke strukturában, tovább

- Kvantorok:

$$\mathcal{A}(\exists x F) := \begin{cases} 1 & \text{ha van olyan } a \in A \text{, melyre } \mathcal{A}_{[x \mapsto a]}(F) = 1; \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Tehát: akkor igaz, ha x értékét be tudjuk állítani úgy $\mathcal{A}$-ban, hogy a megváltoztatott struktúra kielégítse F-et.

$$\mathcal{A}(\forall x F) := \begin{cases} 1 & \text{ha minden } a \in A \text{-ra igaz, hogy } \mathcal{A}_{[x \mapsto a]}(F) = 1; \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Tehát: akkor igaz, ha x értékét bármire is állítjuk be $\mathcal{A}$-ban, a megváltoztatott struktúra kielégíti F-et.

Formulák kiértékelése, példa

- Legyen $\mathcal{A} = (\mathbb{N}_0, I, \varphi)$ a természetes számok szokásos struktúrája: $I(0) = 0$, $I(1) = 1$, $I(+)$ összeadás, stb
- $I(<)$ a szokásos „kisebb'' reláció
- $I(=)$ az egyenlőség (más nem is lehet)
- $\varphi(x) = 5$, $\varphi(y) = 6$

akkor pl. $\mathcal{A}$-ban

- $\mathcal{A}(x < y) = 1$, hiszen $\mathcal{A}(x) = 5$, $\mathcal{A}(y) = 6$ és $I(<)(5, 6)$ igaz
- $\mathcal{A}(\exists z(y < z))$ igaz, hiszen pl. az $\mathcal{A}_{[z \mapsto 20]}(y < z)$ igaz lesz: $6 < 20$
- $\mathcal{A}(\exists x(x < x))$ hamis
- $\mathcal{A}(\forall x(y < x))$ hamis, hiszen pl. $\mathcal{A}_{[x \mapsto 5]}(x < y)$ hamis ($5 < 6$ nem igaz)

Formulák kiértékelése, példa

$\mathcal{A}$-ban...

- $\exists x(1 < x \ \wedge \ x + x = z)$ pontosan akkor igaz, ha $\varphi(z)$ egy 2-nél nagyobb páros szám, jelölje ezt $\mathrm{Even}(z)$
- $\exists x(x \times x = z)$ pontosan akkor igaz, ha $\varphi(z)$ négyzetszám
- $\exists x(x \times y = z)$ pontosan akkor igaz, ha $\varphi(y)$ osztja $\varphi(z)$-t, jelölje ezt a formulát $y|z$
- $\neg\exists x(1 < x \ \wedge \ x < y \ \wedge x|y)$ pontosan akkor igaz, ha $\varphi(y)$ prímszám, jelölje ezt $\mathrm{Prime}(y)$

$$\mathcal{A}\Big(\forall x\big(\mathrm{Even}(x) \to \exists z_1 \exists z_2(\mathrm{Prime}(z_1) \wedge \mathrm{Prime}(z_2) \wedge z_1 + z_2 = x)\big)\Big) = ?$$

Formulák kiértékelése, példa

„minden 2-nél nagyobb páros szám felírható két prímszám összegeként”

Ez az ún. Goldbach-sejtés, nem ismert, hogy igaz-e.

- De miért nem értékeljük egyszerűen ki ezt a formulát, hogy megtudjuk?
- Mert nem lehet automatikusan: pl. a természetes számok szokásos struktúrájában (ha van összeadás, szorzás, mondjuk 0, 1, és mondjuk a $<$ rendezés) nincs olyan algoritmus, mely ki tudna értékelni tetszőleges input formulát.
- (Itt a „nincs” azt jelenti: matematikailag be van bizonyítva, hogy ilyen algoritmus nem létezik.)
- Fact: ha csak összeadást használunk, akkor arra van ilyen algoritmus. (Ezt hívják Presburger aritmetikának.)
- Fact: ha a természetes számok helyett a valós számokat vesszük az alaphalmaznak, akkor arra is van. (ez meg a Tarski-Seidenberg tétel).
- Open: ha a valós számokon még bevesszük függvénynek az $x \mapsto e^x$ függvényt is, nem tudjuk, hogy arra van-e kiértékelő algoritmus.

Prenex alakú formulák kiértékelése, játékelmélet

Legyen $F = Q_1x_1Q_2x_2\dots Q_nx_nF'$ egy prenex alakú formula, $\mathcal{A}$ pedig egy struktúra.
Két egymással versenyző játékos, $\exists$ és $\forall$ játssza F-en és $\mathcal{A}$-n a következő játékot:

- a játék n körig tart
- az i. körben x_i értékét állítjuk be
- ha $Q_i = \exists$, akkor $\exists$ mondja meg x_i értékét
- ha $Q_i = \forall$, akkor pedig $\forall$
- miután lement az n kör, kiértékeljük F'-t az így kialakult $\mathcal{A}'$ struktúrában

  azaz $\mathcal{A}' = \mathcal{A}_{[x_1\mapsto a_1,\dots,x_n\mapsto a_n]}$-ben, ha x_i értéke a_i
- ha igaz lett, $\exists$ nyer, ha hamis, $\forall$ nyer.

A játékban valamelyik játékosnak van nyerő stratégiája.

$\mathcal{A} \models F$ pontosan akkor igaz, ha a fenti játékot F-en és $\mathcal{A}$-n játszva $\exists$-nek van nyerő stratégiája.

Ehrenfeucht-Fraïssé játék, példa

Legyen $\mathcal{N}$ a természetes számok standard struktúrája.

- $\mathcal{N} \vDash \forall x \exists y (x < y)$: ha először $\forall$ választja ki x-et, $\exists$ választhatja y-nak az eggyel nagyobb számot és így kihozza igazra a formula magját
- $\mathcal{N} \nvDash \exists y \forall x (x < y)$: ha először $\exists$ választja ki y-t, akkor utána $\forall$ választhatja pl. az y-nál eggyel nagyobb számot x-nek és így kihozza hamisra a formula magját

Formulák kielégíthetetlensége

Mint ítéletkalkulusban is, $\mathcal{A}(F) = 1$-et úgy is írjuk, hogy $\mathcal{A} \vDash F$, vagy $\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}(F)$, szóban „$\mathcal{A}$ modellje F-nek".
Ismét, $\Sigma \vDash F$ a $\mathrm{Mod}(\Sigma) \subseteq \mathrm{Mod}(F)$ logikai következménynek a jele.

Tehát: már nagyon „egyszerű" $\mathcal{A}$ struktúrákra is reménytelenül nehéz lehet eldönteni, hogy $\mathcal{A} \vDash F$ igaz-e egy input F formulára vagy sem.
Ezért a következő stratégiát szoktuk követni:

- Leírunk néhány formulát egy Σ halmazba, melyre $\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}(\Sigma)$ (azaz Σ-ba felveszünk olyan formulákat, melyeket $\mathcal{A}$ kielégít)
- Megpróbáljuk bebizonyítani, hogy $\Sigma \vDash F$.
- Ha igen, akkor $\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}(\Sigma) \subseteq \mathrm{Mod}(F)$ miatt $\mathcal{A} \vDash F$ is igaz.
- Ha nem... hát akkor vagy $\Sigma \vDash \neg F$-et próbáljuk igazolni, vagy bővítjük még Σ-t, hátha van olyan tulajdonsága $\mathcal{A}$-nak, melyet még nem vettünk figyelembe.

A Peano-axiómák

Pl. a természetes számok struktúrájában állítások bizonyítására a következő Σ formulahalmazból szoktunk kiindulni mint „axiómákból”:

- $\forall x(\neg(x' = 0))$
- $\forall x \forall y(x' = y' \to x = y)$
- $\forall x(x + 0 = x)$
- $\forall x \forall y(x + y' = (x + y)')$
- $\forall x(x \cdot 0 = 0)$
- $\forall x \forall y(x \cdot y' = x \cdot y + x)$
- $\forall x(x \leq 0 \to x = 0)$
- $\forall x \forall y(x \leq y' \to (x \leq y \vee x = y'))$
- $\forall x \forall y(x < y \ \vee \ x = y \ \vee \ y < x)$
- Indukciós axióma séma: $(F(0) \wedge \forall x(F(x) \to F(x'))) \to \forall x F(x)$, ahol $F(x)$ olyan formula, melyben legfeljebb az x változó fordul elő szabadon, és $F(0)$, $F(x')$ úgy állnak elő, hogy x helyébe 0-t ill. x'-t helyettesítünk (ld. később).

Formulák kielégíthetetlensége

Az ítéletkalkulusból ismert összefüggések a $\vDash$-ra továbbra is igazak maradnak, így pl.:

- $\Sigma \vDash \downarrow$ pontosan akkor, ha Σ kielégíthetetlen;
- $\Sigma \vDash F$ pontosan akkor, ha $\Sigma \cup \{\neg F\}$ kielégíthetetlen;
- ha $\Sigma \vDash F$ és $\Sigma \subseteq \Gamma$, akkor $\Gamma \vDash F$;

ezért ha a $\Sigma \vDash F$ logikai következményt akarjuk bizonyítani, akkor azt megtehetjük úgy, hogy a $\Sigma \cup \{\neg F\}$ formulahalmaz (egy részhalmazáról) mutatjuk meg, hogy kielégíthetetlen.

Erre fogunk (féligeldöntő) algoritmusokat nézni.

Szabad és kötött változóelőfordulások

Szabad változók

Egy F formulában egy x változóelőfordulás szabad, ha nincs $\exists x$ kvantor hatáskörében; egyébként kötött, és a legbelső ilyen $\exists x$ kvantor köti.

$$\forall x\Big(p(x, f(y)) \ \wedge \ p(x, z) \ \wedge \ \exists y \forall x p(x, y)\Big)$$

A színes változóelőfordulások kötöttek, a fekete változóelőfordulások szabadok, a fekete nem szín.

Kötött változók default értékadása nem számít

Mint a termek kiértékelésénél is, a formulákénál sem feltétlen kell teljesen specifikálnunk a φ default értékadást: elég csak azokat a változókat megadni, melyek előfordulnak a formulában szabadon.

Ha $\mathcal{A} = (A, I, \varphi)$ és $\mathcal{A}' = (A, I, \varphi')$ struktúrák és F formula úgy, hogy minden F-ben szabadon előforduló x változóra $\varphi(x) = \varphi'(x)$, akkor $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}'(F)$.

F felépítése szerinti indukcióval

- Ha $F = \uparrow$, akkor mindkét oldal 1, ha $\downarrow$, mindkét oldal 0
- Ha $F = \neg G$, akkor F-ben és G-ben ugyanazok a változók fordulnak elő szabadon; az indukciós feltevés szerint $\mathcal{A}(F) = \neg\mathcal{A}(G) = \neg\mathcal{A}'(G) = \mathcal{A}'(\neg G)$.

Kötött változók default értékadása nem számít

Bizonyítás F felépítése szerinti indukcióval

- Ha pl. $F = G \vee H$, akkor a G-ben / H-ban szabadon szereplő változók szabadok F-ben is. Tehát ezekre a változókra φ és φ' megegyezik. Alkalmazva az indukciós feltevést:

$$\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G) \vee \mathcal{A}(H) = \mathcal{A}'(G) \vee \mathcal{A}'(H) \ = \mathcal{A}'(F).$$

  A többi bináris konnektívára is ugyanígy.

- Ha $F = p(t_1, \ldots, t_n)$ atomi formula, akkor benne minden változó szabad, tehát φ és φ' megegyezik minden olyan változóra, aki bármelyik t_i-ben is szerepel. A termeknél már láttuk, hogy ekkor $\mathcal{A}(t_i) = \mathcal{A}'(t_i)$ minden i-re és így

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(F) &= I(p)(\mathcal{A}(t_1), \ldots, \mathcal{A}(t_n)) \\ &= I(p)(\mathcal{A}'(t_1), \ldots, \mathcal{A}'(t_n)) \\ &= \mathcal{A}'(F).\end{aligned}$$

Kötött változók default értékadása nem számít

Bizonyítás F felépítése szerinti indukcióval

- Ha $F = \exists x G$ vagy $F = \forall x G$, és F-ben a szabadon előforduló változók halmaza X, akkor G-ben vagy X, vagy $X \cup \{x\}$. (Attól függően, hogy G-ben van-e szabadon x vagy nincs.) Persze $x \notin X$.
  Nézzük az $\mathcal{A}_{[x \mapsto a]}$ és az $\mathcal{A}'_{[x \mapsto a]}$ alakú struktúrákat! Ezek default értékadása megegyezik $X \cup \{x\}$-en, hiszen
  - X-en eleve megegyezik $\mathcal{A}$-ban és $\mathcal{A}'$-ben, az új struktúrákban meg az X-beli változók értéke ugyanaz marad;
  - x-en mindkét struktúra default értéke a.

  Tehát minden a-ra az indukciós feltevés szerint

$$\mathcal{A}_{[x \mapsto a]}(G) = \mathcal{A}'_{[x \mapsto a]}(G).$$

  Amiből kapjuk, hogy $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}'(F)$.

Mondatok kiértékelése

Mondat

Egy formulát mondatnak vagy zárt formulának nevezünk, ha nem szerepel benne változó szabadon.

(Pl. a Peano axiómák mondatok voltak.)

Az előző állítás szerint ha egy F formula mondat, akkor hogy a $\mathcal{A} \vDash F$ fennáll-e, nem függ az $\mathcal{A} = (A, I, \varphi)$ struktúra φ-jétől.

Ezért ilyenkor a struktúrákat sokszor csak $\mathcal{A} = (A, I)$ formában írjuk.

Ezért beszéltünk az előbb „a'' természetes számok struktúrájáról: lehetne a φ változtatásával sok különböző struktúrát kapni, de ha mondatokat értékelünk ki, a φ nem számít.

Az ítéletkalkulus az elsőrendű logikában

Nem véletlenül jelöljük a predikátumjeleket ugyanúgy p, q, r-rel, mint korábban az ítéletváltozókat, ugyanis

Az ítéletkalkulus az elsőrendű logikának az a speciális esete, amikor minden predikátumjel 0-változós.

Hiszen ekkor

- az atomi formulák $p()$, tehát egyszerűen p alakúak;
- a termeket nincs hova behelyettesíteni, így a függvényszimbólumok interpretációja nem lényeges, sőt az objektumok alaphalmaza sem az;
- így az individuumváltozók sem szerepelnek egy formulában sem;
- ha pedig x nem szerepel F-ben szabadon, úgy az előző állítás szerint $\forall xF$ és $\exists xF$ is ekvivalensek F-fel, tehát kvantorokat sem kell használnunk. Itt fontos, hogy az univerzum mindig nemüres.

Tehát ebben az esetben pontosan azokat a formulákat kapjuk, mint ítéletkalkulusban; egy „értékadást” tekinthetünk mint egy struktúrát.

Mod, Th és Cons az elsőrendű logikában

- Ha Σ mondatok egy halmaza, akkor $\mathrm{Mod}(\Sigma)$, Σ modelljei az olyan $\mathcal{A} = (A, I)$ alakú struktúrák osztálya, melyek Σ összes elemét kielégítik:

$$\mathrm{Mod}(\Sigma) \;:=\; \{\mathcal{A} = (A, I) :\; \forall F \in \Sigma \; \mathcal{A} \vDash F\}$$

- Ha $\mathcal{K}$ az $\mathcal{A} = (A, I)$ alakú struktúrák egy osztálya, akkor $\mathrm{Th}(\mathcal{K})$, $\mathcal{K}$ elmélete az összes olyan F mondat halmaza, mely igaz $\mathcal{K}$ minden elemében:

$$\mathrm{Th}(\mathcal{K}) \;:=\; \{F :\; \forall \mathcal{A} \in \mathcal{K} \; \mathcal{A} \vDash F\}$$

- Ha Σ mondatok egy halmaza, akkor $\mathrm{Cons}(\Sigma)$ a Σ összes következményének a halmaza (szintén mondatokat tartalmaz):

$$\mathrm{Cons}(\Sigma) \;:=\; \{F :\; \Sigma \vDash F\}.$$

Minden, amit ítéletkalkulusra láttunk erre a három operátorra vonatkozóan, igaz marad elsőrendű logikára is (mert továbbra is a $\vDash$ által meghatározott Galois-kapcsolatról van szó).

Th **vs.** Cons

- Általában arra vagyunk kíváncsiak, hogy egy F mondat igaz-e egy konkrét $\mathcal{A}$ struktúrában (mint pl. a természetes számokéban) vagy struktúrák egy konkrét $\mathcal{K}$ osztályában (mint pl. „igaz-e minden rendezett halmazra?")
- Tehát, hogy $F \in \mathrm{Th}(\mathcal{K})$ igaz-e, F benne van-e $\mathcal{K}$ elméletében.
  - csoportelmélet: $\mathcal{K}$ a csoportok osztálya
  - számelmélet vagy aritmetika: $\mathcal{A}$ a természetes számok struktúrája (összeadás, szorzás, rákövetkezés, rendezés)
  - halmazelmélet...
- Mivel a struktúrákban (pláne végtelen sokban) kiértékelni nehéz (nagyon sokszor algoritmikusan nem is lehetséges), ezért a kérdést nem így vizsgáljuk, hanem konstruálunk egy $\Sigma \subseteq \mathrm{Th}(\mathcal{K})$ halmazt és a $\Sigma \vDash F$ kérdést próbáljuk eldönteni.
- Tehát azt, hogy $F \in \mathrm{Cons}(\Sigma)$ igaz-e.

Axiomatizálhatóság

- Például a számelmélet kérdéseit sokszor úgy vizsgáljuk, hogy a kérdéses F mondat következik-e a Peano axiómákból.
- A legjobb eset az, amikor találunk egy olyan véges Σ mondathalmazt, melyre $\mathrm{Mod}(\Sigma) = \mathcal{K}$, hiszen ekkor $\mathrm{Cons}(\Sigma) = \mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(\Sigma)) = \mathrm{Th}(\mathcal{K})$, vagyis pontosan a Σ következményei adják a $\mathcal{K}$ elméletét.
- Ekkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{K}$ végesen axiomatizálható, és Σ a $\mathcal{K}$-nak egy véges axiómarendszere.
- Ha van olyan Σ, melyre $\mathrm{Mod}(\Sigma) = \mathcal{K}$, de Σ nem feltétlenül véges, azt mondjuk, hogy $\mathcal{K}$ gyengén axiomatizálható. (Ez algoritmikus szemszögből egy sokkal rosszabb helyzet.)
- Látni fogjuk, hogy pl. a természetes számok $\mathcal{N}$ struktúrája még gyengén se axiomatizálható (ez meg egy még rosszabb helyzet).

Egy példa

```
//@ requires n >= 0
//@ ensures \result == n*n
int wut( int n ) {
  int i = 0;
  int d = 1;
  int r = 0;
  //@ maintaining i*i == r &&
       i*2+1 == d
  while( i != n ){
    r = r + d;
    i = i + 1;
    d = d + 2;
  }
  return r;
}
```

NEM KELL UNIT TESZT!

Egy következtető rendszer

- levezeti a ciklusmagra: $\forall i \forall r \forall d \big(\mathrm{inv}(i,r,d) \to \mathrm{inv}(i+1, r+d, d+2)\big)$, ahol
- $\mathrm{inv}(i,r,d)$ az $i*i = r \wedge i*2+1 = d$ formula
- $(i+1)*(i+1) = i*i+i*2+1$, $(i+1)*2+1 = i*2+1+2$, Peano axiómákból kijön
- levezeti, hogy $\mathrm{inv}(0,0,1)$ igaz a ciklusmagba belépéskor
- végül, a kilépéskor $i == n$, tehát $r = n*n$ tényleg.

CNF elsőrendben

- Az elsőrendű logika esetére is szeretnénk következtető rendszereket építeni.
- Ehhez ismét normálformákra lesz szükségünk.
- A legegyszerűbb eset: ha a formulában nincs kvantor.

CNF elsőrendben

Ismét:

- Literál: atomi formula (ekkor pozitív) vagy negáltja (ekkor negatív), pl. $p(x, c)$, $\neg q(x, f(x), z)$
- Klóz: literálok véges diszjunkciója, pl. $p(x) \ \vee \ \neg q(y, c)$
- CNF: klózok konjunkciója, pl. $(p(x) \vee \neg q(y, c)) \ \wedge \ \neg p(x)$

Kvantormentes elsőrendű logikai formulát az ítéletkalkulusban megszokott módon hozhatunk CNF-re:

- Nyilak eliminálása
- Negálások bevitele deMorgan azonosságokkal $\Rightarrow$ NNF
- az NNF-ből CNF készítése disztributivitással

CNF elsőrendben, példa

$$\Big(p(x, f(x)) \vee q(y)\Big) \leftrightarrow \Big(\big(p(x, y) \to q(x)\big) \wedge p(x, c)\Big)$$

Nyilak eliminálása:

$$\left(\neg\Big(p(x, f(x)) \vee q(y)\Big) \vee \Big(\big(\neg p(x, y) \vee q(x)\big) \wedge p(x, c)\Big)\right)$$

$$\wedge \left(\Big(p(x, f(x)) \vee q(y)\Big) \vee \neg\Big(\big(\neg p(x, y) \vee q(x)\big) \wedge p(x, c)\Big)\right)$$

CNF elsőrendben, példa

$$\Big(\neg\big(p(x,f(x)) \vee q(y)\big) \vee \big((\neg p(x,y) \vee q(x)) \wedge p(x,c)\big)\Big)$$

$$\wedge \Big(\big(p(x,f(x)) \vee q(y)\big) \vee \neg\big((\neg p(x,y) \vee q(x)) \wedge p(x,c)\big)\Big)$$

Negációk bevitele:

$$\Big(\big(\neg p(x,f(x)) \wedge \neg q(y)\big) \vee \big((\neg p(x,y) \vee q(x)) \wedge p(x,c)\big)\Big)$$

$$\wedge \Big(\big(p(x,f(x)) \vee q(y)\big) \vee \big((p(x,y) \wedge \neg q(x)) \vee \neg p(x,c)\big)\Big)$$

Egy atomi formula pontosan akkor lesz negatív, és egy $\wedge/\vee$ pontosan akkor vált a másikra, ha páratlan sok negáció belsejében van.

CNF elsőrendben, példa

$$\Big(\underline{\big(\underline{\neg p(x,f(x))}\wedge\underline{\neg q(y)}\big)}\vee\underline{\big(\underline{(\neg p(x,y)\vee q(x))}\wedge\underline{p(x,c)}\big)}\Big)$$

$$\wedge\Big(\underline{\underline{\big(p(x,f(x))\vee q(y)\big)}}\vee\big(\underline{(\underline{p(x,y)}\wedge\underline{\neg q(x)})}\vee\underline{\underline{\neg p(x,c)}}\big)\Big)$$

(Klózok pirossal, CNF-ek kékkel aláhúzva)

Disztributivitás:

$$
\begin{aligned}
&(\neg p(x,f(x)) \vee \neg p(x,y) \vee q(x)) \\
\wedge\ &(\neg p(x,f(x)) \vee p(x,c)) \\
\wedge\ &(\neg q(y) \vee \neg p(x,y) \vee q(x)) \\
\wedge\ &(\neg q(y) \vee p(x,c)) \\
\wedge\ &(p(x,f(x)) \vee q(y) \vee p(x,y) \vee \neg p(x,c)) \\
\wedge\ &(p(x,f(x)) \vee q(y) \vee \neg q(x) \vee \neg p(x,c))
\end{aligned}
$$

Kielégíthetetlenség def szerint

Elsőrendű formulák kielégíthetetlenségének bizonyítására egy módszer lehet a szemantika szerinti kifejtés:

$$F \;=\; \forall x p(x) \;\wedge\; \exists y(p(y) \to q(f(y))) \;\wedge\; \forall z \neg q(z)$$

egy kielégíthetetlen formula, mert:

- Tegyük fel indirekten, hogy F kielégíthető.
- Akkor van modellje: legyen $\mathcal{A} = (A, I, \varphi)$ egy struktúra, melyre $\mathcal{A}(F) = 1$.
- Mivel F három formula konjukciója, így
  - $\mathcal{A}(\forall x p(x)) = 1$
  - $\mathcal{A}(\exists y(p(y) \to q(f(y)))) = 1$
  - és $\mathcal{A}(\forall z \neg q(z)) = 1$.

nincs kész még

Kielégíthetetlenség def szerint

- $\mathcal{A}(\exists y(p(y) \to q(f(y)))) = 1$ szerint van olyan $a \in A$, melyre

$$\mathcal{A}_{[y \mapsto a]}(p(y) \to q(f(y))) = 1.$$

- Tehát erre az $a \in A$-ra
  - vagy $\mathcal{A}_{[y \mapsto a]}(p(y)) = 0$, azaz $I(p)(a) = 0$,
  - vagy $\mathcal{A}_{[y \mapsto a]}(q(f(y))) = 1$, azaz $I(q)(I(f)(a)) = 1$

  teljesül.
- Ugyanakkor, $\mathcal{A}(\forall x p(x)) = 1$ szerint minden $b \in A$ objektumra $\mathcal{A}_{[x \mapsto b]}(p(x)) = 1$, tehát $I(p)(b) = 1$.
- Speciálisan ha minden b-re, akkor $b := a$-ra is $I(p)(a) = 1$, így $I(p)(a) \neq 0$.
- Emiatt $I(q)(I(f)(a)) = 1$ kell legyen.

nincs kész még

Kielégíthetetlenség def szerint

- Továbbá, $\mathcal{A}(\forall z \neg q(z)) = 1$ szerint minden $c \in A$ objektumra $\mathcal{A}_{[z \mapsto c]}(\neg q(z)) = 1$, tehát $\mathcal{A}_{[z \mapsto c]}(q(z)) = 0$, vagyis $I(q)(c) = 0$.
- Ha minden c-re, akkor $c := I(f)(a)$-ra is, emiatt pedig $I(q)(I(f)(a)) = 0$, ami ellentmondás.

Tehát a formula kielégíthetetlen.

done, easy

Helyettesítés: értékadás szintaktikai szinten

- Az előző módszerben egy kényelmetlen részlet az értékadás.
- A következtető algoritmusainkban tisztán formulákkal szeretnénk dolgozni, objektum-értékek és interpretációs függvények nélkül.
- Ezért definiáljuk a helyettesítést: ha x változó és t term, akkor
  - ha u term, akkor $u[x/t]$ egy term lesz, melyre
  $$\mathcal{A}_{[x\mapsto\mathcal{A}(t)]}(u) = \mathcal{A}(u[x/t])$$
  - ha pedig F formula, akkor $F[x/t]$ egy formula lesz, melyre
  $$\mathcal{A}_{[x\mapsto\mathcal{A}(t)]}(F) = \mathcal{A}(F[x/t]).$$

  Vagyis: az új term/formula értéke az eredeti struktúrában ugyanaz legyen, mintha a struktúrában elvégeztünk volna egy értékadást, és a megváltozott struktúrában értékelnénk ki az eredeti termet/formulát.
- Értékadás helyett helyettesítéssel dolgozva nem kell majd az eredeti struktúrához nyúlnunk.

Helyettesítés termekben

Hasonlóan a korábbiakhoz, a termek esete az egyszerűbb.

az $u[x/t]$ term

- Ha u és t termek, x pedig változó, akkor az $u[x/t]$ termet az u term felépítése szerinti indukcióval definiáljuk:
- Ha u az x változó, akkor $u[x/t] := t$.
- Ha $u = y \neq x$ egy másik változó, akkor $u[x/t] := u$.
- Ha $u = f(t_1, \ldots, t_n)$, akkor

$$u[x/t] \;:=\; f(t_1[x/t], \ldots, t_n[x/t]).$$

(Vagyis: végezzük el a helyettesítést rekurzívan az összes résztermjében.)

Például $f(x, g(x, y))\ [x/g(c, y)] \;=\; f(g(c, y), g(g(c, y), y))$.

Praktice úgy kapjuk $u[x/t]$-t, hogy u-ban minden x-et t-re cserélünk.

Helyettesítés termekben

Tetszőleges $\mathcal{A}$ struktúrára, x változóra és u, t termekre

$$\mathcal{A}(u[x/t]) \ = \ \mathcal{A}_{[x \mapsto \mathcal{A}(t)]}(u).$$

u felépítése szerinti indukciót alkalmazunk:

- Ha $u = x$, akkor $u[x/t] = t$ és $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}_{[x \mapsto \mathcal{A}(t)](x)}$ igaz.
- Ha $u = y \neq x$ változó, akkor $u[x/t] = u$ és $\mathcal{A}(y) = \mathcal{A}_{[x \mapsto \mathcal{A}(t)]}(y)$ igaz.
- Ha $u = f(t_1, \ldots, t_n)$, akkor pedig

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(u[x/t]) &= \mathcal{A}(f(t_1[x/t], \ldots, t_n[x/t])) \\
&= I(f)(\mathcal{A}(t_1[x/t]), \ldots, \mathcal{A}(t_n[x/t])) && \text{term kiértékelés} \\
&= I(f)(\mathcal{A}_{[x \mapsto \mathcal{A}(t)]}(t_1), \ldots, \mathcal{A}_{[x \mapsto \mathcal{A}(t)]}(t_n)) && \text{indukciós feltevés} \\
&= \mathcal{A}_{[x \mapsto \mathcal{A}(t)]}(f(t_1, \ldots, t_n)) && \text{term kiértékelés}
\end{aligned}$$

Helyettesítés formulákban

A formulák esetében (a kvantorok miatt) a helyettesítési algoritmus ennél bonyolultabb.

- „cseréljük az összes x-et t-re" nem felel meg az értékadásnak: pl. ha a formulánk $\forall x(1 \leq x)$ – ami a természetes számok struktúrájában hamis, és az $[x/(y+1)]$ helyettesítést szeretnénk végrehajtani így:
- $\forall(y+1)(1 \leq (y+1))$ (common ZH és vizsga „megoldás") wut? ez még csak nem is formula, kvantor csak változót köthet le
- $\forall x(1 \leq (y+1))$ – ez viszont igaz lesz a természetes számok struktúrájában, akkor is, ha az x-nek az $\varphi(y)+1$ értékét adjuk default értéknek. Tehát ez se jó így.

Helyettesítés formulákban

Az előző problémát az okozta, hogy az $\mathcal{A}_{[x \mapsto \mathcal{A}(t)]}$ struktúrákban ha kiértékelünk egy formulát, abban csak a szabad x-ek értéke kellene $\mathcal{A}(t)$-re változzon.

- „cseréljük az összes szabad x-et t-re"
- Jól hangzik, de nézzük a természetes számok struktúráját a $\varphi(x) = 1$, $\varphi(y) = 42$ default értékekkel, és az $[x/y + y + 1]$ helyettesítést mondjuk a következő formulában:
$$\forall y(x \geq y + 1)$$
- A szemantikai szinten: $\mathcal{A}_{[x \mapsto \mathcal{A}(y+y+1)]}$-ben x új default értéke 85. A formula pedig hamis, hiszen 85 nem nagyobb minden y-ra, mint $y + 1$ (pl. $y = 314$-re kisebb).
- Ha viszont cseréljük a szabad x-et $y + y + 1$-re:
$$\forall y(y + y + 1 \geq y + 1)$$
Ez a formula igaz.
- Tehát ez se jó értékadás kiváltására.

Helyettesítés formulákban

Az előző problémát pedig az okozta, hogy x meg kellene kapja az $\mathcal{A}(t)$ értékét, de t-ben szerepel egy y, aminek t kiértékelésekor az y default értékét kellene kapnia.

- Viszont az előbb belekerült a lecserélt t egy $\forall y$ hatáskörébe, így nem a default y-t kapta értékül.
- A megoldás: ha egy t-beli változó „lekötődik”, akkor nevezzük át a kötő kvantor változóját valami egészen újra.

Tehát ha F formula, x változó és t term, akkor $F[x/t]$-t F felépítése szerinti indukcióval a következőképp definiáljuk:

- Ha $F = \uparrow$ vagy $F = \downarrow$, akkor $F[x/t] := F$. (Nothing to do here.)
- Ha $F = \neg G$, akkor $F[x/t] := \neg(G[x/t])$. (Rekurzívan elvégezzük a helyettesítést.)
- Ha $F = G \vee H$, akkor $F[x/t] := G[x/t] \vee H[x/t]$. (Rekurzívan elvégezzük.) A többi bináris konnektívára ugyanígy.

Helyettesítés formulákban

$F[x/t]$

- Ha $F = p(t_1, \ldots, t_n)$, akkor

$$F[x/t] := p(t_1[x/t], \ldots, t_n[x/t]).$$

(Elvégezzük a termekben a helyettesítést.)

- Ha $F = \forall x G$ vagy $F = \exists x G$ (tehát ha ugyanaz az x a kötött változó, mint akit most helyettesítünk), akkor $F[x/t] := F$.
  (Csak a szabad x-eket akarjuk cserélni, ebben a formulában nincs x szabadon, így marad.)
- Ha $F = \forall y G$ vagy $F = \exists y G$, $y \neq x$ és y nem szerepel t-ben, akkor

$$F[x/t] := \forall y (G[x/t])$$

(vagy $\exists y (G[x/t])$, értelemszerűen).

Helyettesítés formulákban

$F[x/t]$

- Végül, ha $F = \forall y G$ vagy $F = \exists y G$, $y \neq x$ és y szerepel t-ben, akkor:
  - Legyen z egy olyan változó, ami nem szerepel se F-ben, se t-ben és nem is x.

    $$F[x/t] \ := \ \forall z(G[y/z][x/t]).$$

    (értelemszerűen, $\exists$ esetben $\exists$ kvantorral kezdünk.)

  Vagyis: először keressünk egy új z változót, nevezzük át a kötött y-t erre a z-re F-ben, majd így már elvégezhetjük a helyettesítést.
  (Ha egy determinisztikus algoritmust szeretnénk mindenképpen, akkor mondhatjuk, hogy „legyen z az első ilyen változó".)

Helyettesítés formulákban

Ez a bonyolultabb algoritmus már megvalósítja az értékadást a szintaktikai szinten:

Ha $\mathcal{A}$ struktúra, F formula, x változó és t term, akkor

$$\mathcal{A}_{[x\mapsto\mathcal{A}(t)]}(F) \;=\; \mathcal{A}(F[x/t]).$$

Bizonyítás F felépítése szerinti indukcióval

- Ha $F = \uparrow$ $(\downarrow)$, mindkét oldal 1 (0), OK
- Ha $F = (\neg G)$, akkor szokás szerint

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(F[x/t]) &= \mathcal{A}(\neg(G[x/t])) && [x/t] \text{ def negálásra}\\
&= \neg\mathcal{A}(G[x/t]) && \neg \text{ szemantika}\\
&= \neg\mathcal{A}_{[x\mapsto\mathcal{A}(t)]}(G) && \text{indukciós feltevés}\\
&= \mathcal{A}_{[x\mapsto\mathcal{A}(t)]}(\neg G) = \mathcal{A}_{[x\mapsto\mathcal{A}(t)]}(F) && \neg \text{ szemantika}
\end{aligned}$$

Bizonyítás F felépítése szerinti indukcióval

- Ha pl. $F = G \vee H$, szintén ugyanígy

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(F[x/t]) &= \mathcal{A}(G[x/t] \vee H[x/t]) && [x/t] \text{ def vagyra} \\
&= \mathcal{A}(G[x/t]) \vee \mathcal{A}(H[x/t]) && \vee \text{ szemantika} \\
&= \mathcal{A}_{[x \mapsto \mathcal{A}(t)]}(G) \vee \mathcal{A}_{[x \mapsto \mathcal{A}(t)]}(H) && \text{indukciós feltevés} \\
&= \mathcal{A}_{[x \mapsto \mathcal{A}(t)]}(G \vee H) = \mathcal{A}_{[x \mapsto \mathcal{A}(t)]}(F) && \vee \text{ szemantika}
\end{aligned}$$

- A többi bináris konnektívára is ugyanígy
- Ha $F = p(t_1, \ldots, t_n)$, akkor

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}(F[x/t]) \\
&= \mathcal{A}(p(t_1[x/t], \ldots, t_n[x/t])) && [x/t] \text{ def atomira} \\
&= I(p)(\mathcal{A}(t_1[x/t]), \ldots, \mathcal{A}(t_n[x/t])) && \text{atomi szemantika} \\
&= I(p)(\mathcal{A}_{[x \mapsto \mathcal{A}(t)]}(t_1), \ldots, \mathcal{A}_{[x \mapsto \mathcal{A}(t)]}(t_n)) && \text{termekre ezt tudjuk} \\
&= \mathcal{A}_{[x \mapsto \mathcal{A}(t)]}(p(t_1, \ldots, t_n)) = \mathcal{A}_{[x \mapsto \mathcal{A}(t)]}(F) && \text{atomi szemantika}
\end{aligned}$$

Bizonyítás F felépítése szerinti indukcióval

- Ha $F = \forall xG$ vagy $F = \exists xG$, akkor x nem szabad F-ben. Ekkor tudjuk, hogy $\mathcal{A}_{[x \mapsto \mathcal{A}(t)]}(F) = \mathcal{A}(F)$, mert a két struktúra olyan változó default értékén tér csak el, mely nem szabad F-ben. Tehát mivel ekkor $F = F[x/t]$, így $\mathcal{A}_{[x \mapsto \mathcal{A}(t)]}(F) = \mathcal{A}(F[x/t])$.
- Ha $F = \forall yG$ vagy $F = \exists yG$, $x \neq y$ és y nem szerepel t-ben, akkor tetszőleges $a \in A$-ra $\mathcal{A}_{[x \mapsto \mathcal{A}(t), y \mapsto a]} = \mathcal{A}_{[y \mapsto a, x \mapsto \mathcal{A}(t)]}$, hiszen $\mathcal{A}(t)$ értéke nem függ a benne szereplő y értékétől, a értéke meg nem függ x-étől, tehát az értékadások sorrendje nem számít. Tehát ekkor

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_{[y \mapsto a]}(G[x/t]) &= \mathcal{A}_{[y \mapsto a, x \mapsto \mathcal{A}(t)]}(G) && \text{indukciós feltevés} \\
&= \mathcal{A}_{[x \mapsto \mathcal{A}(t), y \mapsto a]}(G) && \text{mert } y \text{ nincs } t\text{-ben} \\
&= \mathcal{A}_{[x \mapsto \mathcal{A}(t)]_{[y \mapsto a]}}(G) && \text{külön vettük,}
\end{aligned}
$$

és ha ez minden a-ra igaz, akkor $\mathcal{A}(F[x/t]) = \mathcal{A}_{[x \mapsto \mathcal{A}(t)]}(F)$ is fennáll.

nincs még kész

Bizonyítás F felépítése szerinti indukcióval

- Végül, ha $F = \forall y G$ vagy $F = \exists y G$, és y szerepel t-ben, akkor ha $z \neq x$ olyan változó, mely sem F-ben, sem t-ben nem szerepel, akkor tetszőleges $a \in A$-ra:

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{A}_{[z \mapsto a]}(G[y/z][x/t]) & \\
= {} & \mathcal{A}_{[z \mapsto a, x \mapsto \mathcal{A}(t)]}(G[y/z]) & \text{indukciós feltevés} \\
= {} & \mathcal{A}_{[x \mapsto \mathcal{A}(t), z \mapsto a]}(G[y/z]) & z, x \text{ felcserélhetők} \\
= {} & \mathcal{A}_{[x \mapsto \mathcal{A}(t), z \mapsto a, y \mapsto a]}(G) & \text{indukciós feltevés} \\
= {} & \mathcal{A}_{[x \mapsto \mathcal{A}(t), y \mapsto a]}(G) & z\text{-től nem függ már semmi} \\
= {} & \mathcal{A}_{[x \mapsto \mathcal{A}(t)]_{[y \mapsto a]}}(G) & \text{külön vettük,}
\end{aligned}
$$

  és ha ez minden a-ra igaz, akkor $\mathcal{A}(F[x/t]) = \mathcal{A}_{[x \mapsto \mathcal{A}(t)]}(F)$ is fennáll.

Ez volt az utolsó eset.

- Tehát: van egy (összetett) algoritmusunk helyettesítésre, ami kiváltja az értékadást.
- (Legalábbis akkor, ha az x-nek adni kívánt értéket jelöli valamilyen term a struktúrában, de ez nekünk épp elég lesz.)
- Ebből kijön az is (amit eddig is „érezni lehetett”), hogy változót átnevezni ekvivalens átalakítás:

Ha $F = \forall x G$ (vagy $\exists x G$) formula és y nem fordul elő szabadon G-ben, akkor $F \equiv \forall y(G[x/y])$. ($\exists$ esetben $\exists$, persze.)

Azt elég belátnunk, hogy tetszőleges $\mathcal{A}$ struktúrára és $a \in A$-ra $\mathcal{A}_{[x\mapsto a]}(G) = \mathcal{A}_{[y\mapsto a]}(G[x/y])$. De persze

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{[y\mapsto a]}(G[x/y]) &= \mathcal{A}_{[y\mapsto a, x\mapsto a]}(G) && \text{a helyettesítési lemma szerint} \\ &= \mathcal{A}_{[x\mapsto a]}(G) && \text{mert } y \text{ nincs } G\text{-ben szabadon.} \end{aligned}$$

Változóátnevezés

A $\forall x G \equiv \forall y(G[x/y])$ képletben (ha y nincs G-ben szabadon) persze oda kell figyelni a részletekre, pl. ha

$$G \;=\; p(x,z) \wedge \forall x p(x,z) \wedge \exists y p(y,y),$$

akkor az átnevezés eredménye:

$$\forall x G \;\equiv\; \forall y\big(p(y,z) \wedge \forall x(p(x,z)) \wedge \exists z p(y,z)\big)$$

lesz.

Normálformák elsőrendben

Hogy egy formulával dolgozni tudjunk, ún. zárt Skolem alakra fogjuk hozni. Ennek lépései:

- Nyilak eliminálása – a szokásos módon
- Kiigazítás – hogy ne legyen változónév-ütközés
- Prenex alakra hozás – ekkor az összes kvantor előre kerül
- Skolem alakra hozás – ekkor az összes kvantor elöl lesz és mind $\forall$
- Lezárás – ne maradjon szabad változó-előfordulás

Kiigazítás

Egy formula kiigazított, ha

- Különböző helyen lévő kvantorok különböző változókat kötnek és
- Nincs olyan változó, mely szabadon is és kötötten is előfordul.

$$\exists x p(x,y) \;\wedge\; \forall x q(f(x),x) \;\wedge\; \exists y p(y,f(y))$$

nem kiigazított, mert pl.

- az x változót két különböző helyen is köti kvantor,
- az y pedig előfordul kötötten is és szabadon is.

(A fenti kettő közül az egyik is elég lenne.)

$$\exists x_1 p(x_1,y) \;\wedge\; \forall x_2 q(f(x_2),x_2) \;\wedge\; \exists y_1 p(y_1,f(y_1))$$

egy ekvivalens kiigazított formula.

Kiigazítás

Általában is igaz:

Tetszőleges F formulát ekvivalens kiigazított alakra hozhatunk a kötött változók új változókra való átnevezésével.

A gyakorlatban pl. ezt indexeléssel érjük el.

Fontos, hogy a szabad változókat nem nevezhetjük át! Akkor nem lesz ekvivalens a formula az eredetivel.

Prenex alak

Egy formula prenex alakú, ha $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n F$ alakú, ahol F kvantormentes és mindegyik Q_i kvantor (vagy $\forall$, vagy $\exists$).

Tehát prenex, ha minden kvantor elöl van.

Note: a

$$\forall x p(x) \ \wedge \ q(y)$$

formula nincs prenex alakban, mert a $q(y)$ már nincs a $\forall x$ hatáskörében!

Prenex alakra hozás

Állítás

Minden formula ekvivalens prenex alakra hozható.

A prenex alakra hozás első lépéseként ki kell igazítsuk a formulát. Ez pl. a következők miatt fontos:

- Nem igaz, hogy $\exists xF \ \wedge \ \exists xG \equiv \exists x(F \wedge G)$. Például, ha $F = (x < 0)$ és $G = (x > 0)$, az egész számok szokásos struktúrájában kiértékelve
  - a bal oldal: „van negatív szám és van pozitív szám", ez igaz,
  - a jobb oldal: „van olyan szám, ami negatív és pozitív", ez hamis.

  Tehát ha különböző kvantorok különböző változókat kötnek, nem feltétlen lehet azokat „összeolvasztani".
- Egyébként $\exists xF \ \vee \exists xG \equiv \exists x(F \vee G)$ igaz. Az univerzális kvantor esetében is hasonló a helyzet: $\forall xF \ \wedge \ \forall xG \equiv \forall x(F \wedge G)$ igaz, de $\forall xF \ \vee \ \forall xG \equiv \forall x(F \vee G)$ nem mindig igaz.

Prenex alakra hozás

- Az sem mindig igaz, hogy $\exists xF \ \wedge G \equiv \exists x(F \wedge G)$.
  Például, ha $F = (x < 0)$ és $G = (x > 0)$ (tehát G-ben x szabadon fordul elő!), akkor az egész számok szokásos struktúrájában a $\varphi(x) = 42$ default értékadással
  - A bal oldal: „van negatív szám, és $42 > 0$", ez igaz,
  - A jobb oldal: „van olyan szám, ami negatív és pozitív", ez hamis.
- Itt pedig az okozza a problémát, hogy az eredetileg G-ben szabad x előfordulást ha leköti egy kvantor, akkor már nem a struktúra φ komponense adja neki az értéket, tehát a szemantika (jó eséllyel) egész más lesz.

Ez a két ok az, amiért a kiigazításkor épp azt szeretnénk elérni, hogy

- különböző kvantor-előfordulások különböző változókat kössenek le
- és ne legyen olyan változó, mely szabadon is és kötötten is előfordul.

Prenex alakra hozás

A következők viszont igazak:

$$\neg\exists x F \equiv \forall x \neg F$$

$$\neg\forall x F \equiv \exists x \neg F$$

$\exists x F \ \vee \ G \equiv \exists x (F \vee G)$ ha x nem szerepel G-ben szabadon

$\exists x F \ \wedge \ G \equiv \exists x (F \wedge G)$ ha x nem szerepel G-ben szabadon

$\forall x F \ \vee \ G \equiv \forall x (F \vee G)$ ha x nem szerepel G-ben szabadon

$\forall x F \ \wedge \ G \equiv \forall x (F \wedge G)$ ha x nem szerepel G-ben szabadon

$F \ \vee \ \exists x G \equiv \exists x (F \vee G)$ ha x nem szerepel F-ben szabadon

$F \ \wedge \ \exists x G \equiv \exists x (F \wedge G)$ ha x nem szerepel F-ben szabadon

$F \ \vee \ \forall x G \equiv \forall x (F \vee G)$ ha x nem szerepel F-ben szabadon

$F \ \wedge \ \forall x G \equiv \forall x (F \wedge G)$ ha x nem szerepel F-ben szabadon

Prenex alakra hozás

Az előző fólia ekvivalenciái közül csak néhányat nézünk meg.

$$\neg\exists x F \equiv \forall x \neg F$$

Tetszőleges $\mathcal{A}$ struktúrára

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\neg\exists x F) = 1 &\Leftrightarrow \mathcal{A}(\exists x F) = 0 && \neg \text{ szemantikája} \\
&\Leftrightarrow \text{minden } a \in A\text{-ra } \mathcal{A}_{[x\mapsto a]}(F) = 0 && \exists \text{ szemantikája} \\
&\Leftrightarrow \text{minden } a \in A\text{-ra } \mathcal{A}_{[x\mapsto a]}(\neg F) = 1 && \neg \text{ szemantikája} \\
&\Leftrightarrow \mathcal{A}(\forall x \neg F) = 1 && \forall \text{ szemantikája}
\end{aligned}$$

Prenex alakra hozás

$\exists x F \ \wedge G \equiv \exists x(F \wedge G)$, ha x nem szerepel G-ben szabadon

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}(\exists x F \ \wedge \ G) = 1 \\
&\Leftrightarrow \mathcal{A}(\exists x F) = 1 \text{ és } \mathcal{A}(G) = 1 \\
&\Leftrightarrow \text{valamilyen } a \in A\text{-ra } \mathcal{A}_{[x \mapsto a]}(F) = 1 \text{ és } \mathcal{A}(G) = 1 \\
&{\color{red}\Leftrightarrow} \text{ valamilyen } a \in A\text{-ra } (\mathcal{A}_{[x \mapsto a]}(F) = 1 \text{ és } \mathcal{A}_{[x \mapsto a]}(G) = 1) \\
&\Leftrightarrow \mathcal{A}(\exists x(F \wedge G)) = 1,
\end{aligned}$$

ahol a piros lépésnél használtuk, hogy mivel G-ben nincs x szabadon, így $\mathcal{A}(G) = \mathcal{A}_{[x \mapsto a]}(G)$ tetszőleges a-ra igaz.

Megjegyzés: itt megint fontos, hogy az univerzum nem lehet üres! Ha megengednénk üres univerzumot, akkor pl. $\exists x F \ \vee \ G$ mindig G-vel lenne ekvivalens üres univerzum esetén (mert a $\exists x F$ alakú mondatok ott hamisak lennének), a $\exists x(F \vee G)$ pedig hamis lenne. (ugyanezért).

Prenex alakra hozás

Az előző ekvivalenciák adnak egy prenex alakra hozó algoritmust:

- Imináljuk el a formulából a $\to$ és $\leftrightarrow$ konnektívákat a szokott módon
- Az eredményt igazítsuk ki
- Az eredményen addig alkalmazzuk (balról jobbra) az ekvivalenciákat (amiket lehet a kiigazítottság miatt), amíg prenex alakú formulát nem kapunk.

A sorrend fontos:

- A „kvantorokat kihozó” ekvivalenciák csak kiigazított formulán alkalmazhatók
- A nyilak eliminálása elronthatja a kiigazítottságot (a $\leftrightarrow$-on belüli kvantorok duplikálódnak)

Példa prenex alakra hozás

$$\neg\left(\left((\forall x\neg\forall y(p(x,y)\vee\exists z q(x,z)))\wedge\exists w p(x,w)\right)\vee\neg\exists v q(v,v)\right)$$

$$\neg\left(\exists w\left((\forall x\exists y\neg\exists z(p(x,y)\vee q(x,z)))\wedge p(x,w)\right)\vee\forall v\neg q(v,v)\right)$$

$$\neg\left(\exists w\left((\forall x\exists y\neg\exists z(p(x,y)\vee q(x,z)))\wedge p(x,w)\right)\vee\forall v\neg q(v,v)\right)$$

$$\neg\exists w\left(\left((\forall x\exists y\forall z\neg(p(x,y)\vee q(x,z)))\wedge p(x,w)\right)\vee\forall v\neg q(v,v)\right)$$

Példa prenex alakra hozás

$$\neg\exists w\left(\left(\left(\forall x\exists y\forall z\neg(p(x,y)\vee q(x,z))\right)\wedge p(x,w)\right)\vee\forall v\neg q(v,v)\right)$$

$$\forall w\neg\forall v\left(\forall x\exists y\forall z\left(\left(\neg(p(x,y)\vee q(x,z))\right)\wedge p(x,w)\right)\vee\neg q(v,v)\right)$$

$$\forall w\neg\forall v\forall x\exists y\forall z\left(\left(\left(\neg(p(x,y)\vee q(x,z))\right)\wedge p(x,w)\right)\vee\neg q(v,v)\right)$$

$$\forall w\exists v\exists x\forall y\exists z\neg\left(\left(\left(\neg(p(x,y)\vee q(x,z))\right)\wedge p(x,w)\right)\vee\neg q(v,v)\right)$$

(Kaphattunk volna másik ekvivalens prenex alakot is, pl. v-t kihozhattuk volna utoljára is, stb.)

Skolem alak

Egy F formula Skolem alakú, ha

$$F = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n F^*,$$

ahol F^*-ben (a formula magjában) már nincs kvantor.

(Tehát: prenex alakú, és csak univerzális kvantor szerepel benne.)

(Thoralf Skolem norvég matematikus, 1887–1963 után, tehát „sz"-szel ejtjük)

A Skolem alakú formulákkal azért jó dolgozni, mert

$$\forall x_1 \dots \forall x_n F^* \vDash F^*[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$$

tetszőleges t_i termekre. Ez formálisan kijön abból, hogy

- ha $\mathcal{A}(\forall x F) = 1$, akkor tetszőleges $a \in A$-ra $\mathcal{A}_{[x \mapsto a]}(F) = 1$
- tehát tetszőleges t termre $\mathcal{A}_{[x \mapsto \mathcal{A}(t)]}(F) = 1$ (hiszen $\mathcal{A}(t) \in A$)
- a helyettesítési lemma szerint pedig ez épp $\mathcal{A}(F[x/t])$.

Skolem alak

Az (sajnos) nem igaz, hogy minden formulához megadható lenne ekvivalens Skolem alak.

A következő viszont igaz:

Minden F formulához konstruálható egy olyan F' Skolem alakú formula, ami pontosan akkor kielégíthető, ha F is az.

Tehát: tudunk adni olyan algoritmust, mely

- egy F formulából elkészít egy F' Skolem alakot
- úgy, hogy ha F kielégíthető, akkor F' is, és ha F kielégíthetetlen, akkor F' is.

Ezt úgy mondjuk, hogy F és F' s-ekvivalensek, jelben $F \equiv_s F'$.
(s is for „satisfiability" here)
Ez általában elég lesz, hiszen eleve a kielégíthetetlenségre keresünk algoritmust.

Skolem alak

A Skolem alakra hozás lépései:

- Prenex alakra hozzuk a formulát (duh)
- Egyesével elimináljuk belőle a $\exists x$ kvantorokat valahogy

Skolem alak

Persze ha csak úgy törölnénk a $\exists x$ kvantorokat, az nem lenne helyes algoritmus még s-ekvivalencia szempontjából sem: pl.

$$\forall x \exists y (p(x,y) \wedge \neg p(y,x))$$

kielégíthető: legyen a struktúránk a természetes számok halmaza, és p-t interpretáljuk mondjuk a „kisebb” relációval. Ekkor a mondat: „minden számnál van olyan, ami nála nagyobb és nem kisebb”, ez igaz.
Viszont ha töröljük a $\exists y$ kvantort:

$$\forall x (p(x,y) \wedge \neg p(y,x))$$

kielégíthetetlen (vegyük észre, hogy itt y szabaddá vált), hiszen tetszőleges $\mathcal{A}$ struktúrában az $a := \varphi(y)$ elemre

$$\mathcal{A}_{[x \mapsto \varphi(y)]}(p(x,y) \wedge \neg p(y,x)) = I(p)(\varphi(y), \varphi(y)) \wedge \neg I(p)(\varphi(y), \varphi(y)),$$

ami mindenképp hamis, bármi is $I(p)(\varphi(y), \varphi(y))$ értéke.

Skolem alak

Az sem megoldás, ha a $\exists x$-eket $\forall x$-ekre cseréljük, az előző példából így kapott

$$\forall x \forall y (p(x,y) \wedge \neg p(y,x))$$

szintén kielégíthetetlen (ez is biztosan hamissá válik akkor, ha x-nek és y-nak ugyanazt az értéket adjuk).

Az előző ötletekkel a következő a probléma intuitíve:

- Egy $\forall x \exists y F$ alakú formula kiértékelésekor előbb megválasztjuk x értékét, majd ettől függően választjuk meg y értékét.
- Általában is egy $\exists$ kvantor értékének a megválasztásakor (prenex alakú formula esetében) a „jó” érték függhet az összes előtte álló $\forall$-kvantált változó értékétől.
- Pl. $\forall x \forall y \exists z ((x < z) \wedge (y < z))$ a természetes számok struktúrájában: „minden x-re és y-ra létezik z, mely mindkettőnél nagyobb”, itt is z értéke függhet x-étől és y-étól is.

Skolem alak

A Skolem alakra hozás ötlete:

Ha az $\exists y$-nal kötött változó „jó'' értéke függhet az $x_1, \ldots, x_n$ változók értékétől, akkor vezessünk be egy f függvényt, ami „megmondja'', hogy hogyan függ!

Azaz az elképzelés az, hogy $I(f)(a_1, \ldots, a_n) := b$ egy olyan b-re, amit akkor kapna y értékül, ha x_1 értéke a_1, x_2 értéke a_2, stb.
Ezeket az újonnan bevezetett függvényeket Skolem-függvénynek nevezzük.

Skolem alak

Ez működni is fog:

Ha az f/n függvényjel nem szerepel az $F = \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \exists y F^*$ kiigazított formulában, akkor

$$F \ \equiv_s \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n F^*[y/f(x_1, \ldots, x_n)] =: F'$$

Bizonyítás

Ennél többet mutatunk meg: azt, hogy

- ha $\mathcal{A}(F) = 1$ az $\mathcal{A} = (A, I, \varphi)$ struktúrára, akkor van olyan $\mathcal{A}' = (A, I', \varphi)$ struktúra az f-fel kibővített nyelvre, melyre minden eredeti s (függvény- vagy predikátum)szimbólumra $I(s) = I'(s)$.
  Tehát: ha F-nek van modellje, akkor ahhoz hozzá tudunk adni egy „jó" f interpretációt úgy, hogy az az F'-nek (is) modellje legyen.

Bizonyítás folytatása

- Továbbá, azt is meg fogjuk mutatni, hogy ha $\mathcal{A}'(F') = 1$, akkor $\mathcal{A}(F) = 1$ arra az $\mathcal{A}$ struktúrára, amit úgy kapunk $\mathcal{A}'$-ből, hogy f interpretációját „elfelejtjük”.
- Ez az irány könnyű: ha $\mathcal{A}'(F') = 1$, akkor minden $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$-ra

$$\mathcal{A}'_{[x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_n \mapsto a_n]}(F^*[y/f(x_1, \ldots, x_n)]) = 1,$$

ami a helyettesítési lemma szerint épp azt jelenti, hogy

$$\mathcal{A}'_{[x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_n \mapsto a_n, y \mapsto I'(f)(a_1, \ldots, a_n))]}(F^*) = 1.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy a $b = I'(f)(a_1, \ldots, a_n)$ értékre $\mathcal{A}'_{[x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_n \mapsto a_n]_{[y \mapsto b]}}(F^*) = 1$, tehát

$$\mathcal{A}'_{[x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_n \mapsto a_n]}(\exists y F^*) = 1,$$

tehát $\mathcal{A}'(F) = 1$ (és mivel F-ben nincs f, így $\mathcal{A}(F) = 1$).

Bizonyítás folytatása

A másik irány:

- Tegyük fel, hogy $\mathcal{A}(F) = 1$. Akkor tetszőleges $a_1, \ldots, a_n \in A$ esetén

$$\mathcal{A}_{[x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_n \mapsto a_n]}(\exists y F^*) = 1.$$

- Tehát tetszőleges $a_1, \ldots, a_n \in A$ esetén van olyan b, melyre

$$\mathcal{A}_{[x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_n \mapsto a_n, y \mapsto b]}(F^*) = 1.$$

- Definiáljuk az $\mathcal{A}'$ struktúrában $I'(f)$-et úgy, hogy az $I'(f)(a_1, \ldots, a_n)$ értéke legyen egy ilyen „alkalmas" b.
- Akkor tetszőleges $a_1, \ldots, a_n \in A$ esetén

$$\mathcal{A}'_{[x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_n \mapsto a_n, y \mapsto I'(f)(a_1, \ldots, a_n)]}(F^*) = 1.$$

- Ez a helyettesítési lemma szerint épp azt jelenti, hogy

$$\mathcal{A}'_{[x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_n \mapsto a_n]}(F^*[y/f(x_1, \ldots, x_n)]) = 1, \text{ tehát } \mathcal{A}'(F') = 1.$$

Skolem alak

Tehát vegyük a következő algoritmust: az F input formulát

- először hozzuk prenex alakra (nyilak eliminálása, kiigazítás, kvantorok kiemelése)
- majd minden $\exists y$-lekötött változót a formula magjában cseréljünk le egy $f(x_1, \ldots, x_n)$ termre, ahol
  - f egy teljesen új függvényszimbólum (tehát ha formulák egy egész Σ halmazával dolgozunk, akkor Σ semelyik elemében nem lehet f! és minden $\exists$ kvantor esetében újabb és újabb Skolem-függvényeket gyártunk!)
  - $x_1, \ldots, x_n$ pedig az y előtt szereplő $\forall$-kötött változók.

A kapott formula s-ekvivalens lesz az eredetivel.
(Sőt, ha ezt egy input Σ formulahalmaz minden formulája elvégezzük, akkor a kapott Σ' formulahalmaz is s-ekvivalens lesz az eredetivel.)

Skolem alak, példa

$$\exists x \forall y \forall z \exists v \exists w \big(p(x, y, f(z)) \ \wedge \ \neg q(x, f(v), w) \ \wedge \ p(c, v) \big)$$

- x egy egzisztenciálisan kötött változó, előtte nem szerepel univerzálisan kötött, tehát helyére egy nullaváltozós Skolem-függvényt, azaz Skolem konstanst vezetünk be. Ez nem lehet c, mert az már szerepel a formulában, legyen mondjuk d.
- $\exists v$ előtt $\forall$-kötött változó y és z, tehát egy új bináris Skolem függvényjelet generálunk, legyen ez g (mert f nem lehet, az foglalt), v-t mindenhol $g(y, z)$-re cseréljük.
- w-t pedig mindenhol $h(y, z)$-re (a neki generált Skolem-függvény már nem lehet sem f, sem g).

Az eredmény:

$$\forall y \forall z \big(p(d, y, f(z)) \ \wedge \ \neg q(d, f(g(y, z)), h(y, z)) \ \wedge \ p(c, g(y, z)) \big).$$

Zárt Skolem alak

Az ún. alap (ground) rezolúciós algoritmus olyan Σ formulahalmazon tud majd dolgozni, melynek

- minden eleme Skolem alakú,
- zárt (tehát nincs bennük szabad változó),
- és minden formula magja CNF-ben van.

Ha tehát egy tetszőleges Σ formulahalmazt kapunk inputként, ennek minden elemét Skolem-alakra tudjuk már hozni, a magjukat pedig CNF-re.

Hogy zárt legyen minden formulánk, azt úgy érjük el, hogy

- minden x szabad előfordulás helyett egy új c_x konstansjelet vezetünk be
- ezt úgy, hogy minden formulában az összes szabad x helyére ugyanazt a c_x-et írjuk!

Ezzel az átalakítással továbbra is s-ekvivalensek maradunk (mert: legyen $I(c_x) := \varphi(x)$ jó lesz).

Herbrand struktúrák

- A helyettesítési algoritmusnak látszólag van egy gyenge pontja.
- Csak akkor tudjuk elvégezni a $\mathcal{A}_{[x \mapsto a]}(F)$ értékadást a szintaktikai szinten $\mathcal{A}(F[x/t])$-ként, ha van olyan t, amire $\mathcal{A}(t) = a$.
- Nem minden struktúrában van ilyen t! Pl. a valós vagy a racionális számok struktúrájában ha csak a $+$ és $\times$ jeleket tudjuk használni, mondjuk a 0 és 1 konstansokkal, akkor azokkal is csak az egész számokat tudjuk eljelölni (ezeket tudjuk felépíteni ground termként).
- Azt szeretnénk, ha egy $\forall x F$ alakú formula (vagy általában: zárt Skolem alakok halmazának) kielégíthetőségének vizsgálatakor elég lenne ellenőriznünk az „összes” $F[x/t]$ alakú formulából álló halmazt.
- Ez pl. a racionális számok struktúrájában nem működik: a $\forall x(\text{egész}(x))$ formula ott hamis, de ha bármilyen $[x/t]$ helyettesítést végzünk a magon, a kapott $\text{egész}(t)$ formula mindig igaz lesz (ha t alapterm).

Herbrand struktúrák

- Ezt a problémát oldják meg az ún. Herbrand struktúrák, amikre a következő lesz igaz:
- Herbrand struktúrában minden elem eljelölhető egy alaptermmel.
- Ha egy Σ formulahalmaz kielégíthető, akkor van Herbrand modellje (azaz: Σ-t kielégítő Herbrand struktúra) is.
- Ez a két tulajdonság fogja azt biztosítani, hogy kielégíthetetlenség bizonyításakor a szemantikus értékadás művelet tényleg kiváltható lesz a szintaktikus helyettesítés művelettel.

Herbrand struktúrák

De mi is egy Herbrand struktúra?

- (Jacques Herbrand, 1908–1931)
- Az alaptermek vagy ground termek a változómentes termek.
- Tehát: melyeket felépíthetünk csak a függvényjelek alkalmazásával.
- Pl. ha $f/1$, $g/2$ és $c/0$ függvényjelek, akkor alaptermek pl.

$$c,\ f(c),\ f(f(c)),\ g(c,c),\ g(c,f(c)),\ g(f(c),f(c)),\dots$$

- Az összes alapterm halmazát T_0 jelöli. (A 0 itt a „0 változó"-t jelenti, általában T_n-be azok a termek tartoznak, melyekben csak az $\{x_1,\dots,x_n\}$ változók szerepelnek.)
- A következő részben fontos, hogy T_0 ne legyen üres. Ezért ha a nyelvünkben nincs konstansjel, akkor generálunk egyet.

Herbrand struktúrák

- Egy $\mathcal{A} = (A, I, \varphi)$ struktúrát Herbrand struktúrának nevezünk, ha
- univerzuma $A = T_0$ az alaptermek halmaza és
- tetszőleges f/n függvényjelre $I(f)(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$.

Tehát az objektumok maguk az alaptermek, és a függvényjelek interpretációja „értelemszerű”.

Például ha $f/1$, $g/2$, $c/0$:

- c, $f(c)$, $f(f(c))$, $g(c, c)$, $g(f(c), f(c))$ mind objektumok
- persze c, $f(c)$, $f(f(c))$,… továbbra is (alap)termek is egyben
- és pl. a $\mathcal{A}(g(c, f(c)))$ értéke egy $\mathcal{A}$ Herbrand struktúrában:
  - $I(c)() = c$ a Herbrand struktúra definíciója szerint, tehát $\mathcal{A}(c) = c$.
  - mivel $\mathcal{A}(c) = c$, ezért $\mathcal{A}(f(c)) = I(f)(\mathcal{A}(c)) = I(f)(c) = f(c)$.
  - Tehát $g(c, f(c))$ értéke

$$\mathcal{A}(g(c, f(c))) = I(g)(\mathcal{A}(c), \mathcal{A}(f(c))) = I(g)(c, f(c)) = g(c, f(c)).$$

Herbrand struktúrák

Amit az előbb láttunk, mindig igaz: Herbrand struktúrában egy alapterm értéke mindig önmaga.

Állítás

Tetszőleges $\mathcal{A}$ Herbrand struktúrára és t alaptermre $\mathcal{A}(t) = t$.

Bizonyítás

A t term felépítése szerinti indukciót alkalmazunk:

- $t = x$, x változó: ez az eset nem lehet, mert alaptermben nincs változó.
- $t = f(t_1, \dots, t_n)$: Ha t alapterm, akkor t_1,...,t_n is mind alaptermek. Tehát az indukciós feltevés szerint $\mathcal{A}(t_i) = t_i$ minden i-re és ekkor

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(f(t_1, \dots, t_n)) &= I(f)(\mathcal{A}(t_1), \dots, \mathcal{A}(t_n)) && \text{term kiértékelés def} \\
&= I(f)(t_1, \dots, t_n) && \text{indukciós feltevés} \\
&= f(t_1, \dots, t_n) = t. && \text{Herbrand } I(f) \text{ def}
\end{aligned}$$

Példa

Ha csak a 0 konstansjelünk és az s unáris függvényjelünk van, akkor egy Herbrand struktúrában:

- az univerzum az alaptermek halmaza: $\{0, s(0), s(s(0)), s(s(s(0))), \ldots\}$
- azzal, hogy $I(0) = 0$ és $I(s)(s^n(0)) = s^{n+1}(0)$

tehát a természetes számok struktúrája az s (successor, rákövetkezés) művelettel egy Herbrand struktúra.

Ha ebben a struktúrában az összeadást mint predikátumot definiáljuk (a szándék: $I(\mathrm{add})(x, y, z) = 1$, ha $x + y = z$), ezt formalizálhatjuk:

- $\forall x \forall y \forall z_1 \forall z_2 (\mathrm{add}(x, y, z_1) \wedge \mathrm{add}(x, y, z_2) \to z_1 = z_2)$
- $\forall x \forall y\ (\mathrm{add}(x, 0, x))$
- $\forall x \forall y \forall z (\mathrm{add}(x, y, z) \to \mathrm{add}(x, s(y), s(z)))$

A szorzást is hasonlóan.

Egyenlőség egyelőre ne legyen

Az egyenlőség

Note: Herbrand struktúrákban az egyenlőség kezelése problémássá válik.

- Pl. ha a természetes számok struktúrájában használhatjuk a $+/2$ függvényjelet is, akkor a 0 és a $0+0$ alaptermek nem egyenlőek, de szeretnénk őket egyenlőnek kezelni.
- erre még visszatérünk
- egyelőre a nyelvünkben ne legyen egyenlőség

Herbrand struktúrák

- Az így nyilván igaz, hogy egy Herbrand struktúrában minden objektumot el tudunk jelölni egy alaptermmel: a t alaptermet mind objektumot maga a t alapterm jelöli.
- Ami emiatt algoritmikus szempontból fontos: ha $\mathcal{A}$ egy Herbrand struktúra és van egy $\forall x F$ alakú formulánk, akkor arra

  $$\mathcal{A} \vDash \forall x F \;\Leftrightarrow\; \mathcal{A} \vDash F[x/t] \text{ minden } t \text{ alaptermre.}$$

  (Mert így a helyettesítési lemma szerint $\mathcal{A}_{[x \mapsto a]} \vDash F$ minden $a \in A$-ra.)
- Azaz, $\forall x F$ és $\{F[x/t] : t \in T_0\}$ Herbrand-modelljei ugyanazok!

Ha $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n F$ egy zárt Skolem alak, ahol F kvantormentes, akkor Herbrand kiterjesztése az

$$E(\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n F) := \left\{ F[x_1/t_1, x_2/t_2, \ldots, x_n/t_n] : t_i \in T_0 \right\}$$

formulahalmaz. (E mint „extension”)

Herbrand struktúrák

Példa

Ha $F = \forall x \forall y \big(p(x,y) \wedge \neg p(f(x), g(x,y))\big)$, és $c/0$, $f/1$, $g/2$ a függvényjelek, akkor $E(F)$-ben vannak pl.

- $p(c,c) \wedge \neg p(f(c), g(c,c))$
- $p(c, f(c)) \wedge \neg p(f(c), f(c, f(c)))$
- $p(f(c), g(c,c)) \wedge \neg p(f(f(c)), g(f(c), g(c,c)))$
- ...

Ez a formula kielégíthetetlen, hiszen $E(F)$-nek $\neg p(f(c), g(c,c))$ is és $p(f(c), g(c,c))$ is következménye, ami nem lehetséges.

Herbrand struktúrák

Amiért a kielégíthetetlenség vizsgálatához elég csak Herbrand struktúrákban gondolkodnunk, az a következő:

Tétel

Zárt Skolem normálformák tetszőleges halmaza pontosan akkor kielégíthető, ha van Herbrand modellje.

(A tétel ebben a formában csak olyan mondatokra vonatkozik, melyekben nincs egyenlőség.)

A tétel haszna számunkra

- ha az input Σ formulahalmazról kell belátnunk, hogy kielégíthetetlen,
- akkor először is zárt Skolem alakra hozzuk, legyen ez mondjuk Σ',
- majd megmutatjuk, hogy nincs olyan Herbrand-struktúra, ami modellje Σ'-nek.

A Herbrand tételből és abból, hogy a zárt Skolem alakra hozás s-ekvivalens művelet, következik, hogy Σ pontosan ekkor kielégíthetetlen.

Herbrand tétel – bizonyítás

- Ha Σ-nak van Herbrand modellje, akkor nyilván kielégíthető.
- Mivel Σ mondatokból áll, a φ értékadást elhagyhatjuk.
- Tehát csak azt kell belátnunk, hogy ha van valamilyen $\mathcal{A} = (A, I)$ modellje Σ-nak, akkor van egy $\mathcal{A}' = (T_0, I')$ Herbrand modellje is.
- Mivel $\mathcal{A}'$ Herbrand-modell kell legyen, az alaphalmaz (T_0) és a függvényjelek interpretációja $I'(f)(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$ adott.
- Tehát csak a predikátumjeleknek kell szemantikát adnunk.
- Ha p/n predikátumjel és $t_1, \ldots, t_n$ alaptermek, akkor legyen

$$I'(p)(t_1, \ldots, t_n) \ := \ I(p)(\mathcal{A}(t_1), \ldots, \mathcal{A}(t_n)).$$

Vagyis: ha p-t akarjuk kiértékelni a Herbrand struktúrában a $t_1, \ldots, t_n$ alaptermeken (mint objektumokon), akkor értékeljük ki a t_i alaptermeket (mint termeket) $\mathcal{A}$-ban, és az így kapott (A-beli) objektumokon p értékét ($\mathcal{A}$-ban) adjuk vissza $\mathcal{A}'$-ben.

Herbrand tétel

Bizonyítás folytatása

- Azt állítjuk, hogy ez az $\mathcal{A}'$ Herbrand struktúra modellje Σ-nak.
- Ehhez legyen $\forall x_1 \dots \forall x_n F \in \Sigma$. Megmutatjuk, hogy $\mathcal{A}'_{[x_1/t_1,\dots,x_n/t_n]}(F) = 1$ minden $t_1, \dots, t_n$ alaptermre.
- A helyettesítési lemma szerint

$$\mathcal{A}'_{[x_1/t_1,\dots,x_n/t_n]}(F) \; = \; \mathcal{A}'(F[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]),$$

  hiszen $\mathcal{A}'(t_i) = t_i$ minden i-re, mert $\mathcal{A}'$ Herbrand struktúra.
- Azt tudjuk, hogy $\mathcal{A}(\forall x_1 \dots \forall x_n F) = 1$, tehát tetszőleges $t_1, \dots, t_n$ alaptermekre

$$\mathcal{A}_{[x_1/\mathcal{A}(t_1),\dots,x_n/\mathcal{A}(t_n)]}(F) = 1,$$

  ami a helyettesítési lemma szerint azt jelenti, hogy

$$\mathcal{A}(F[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]) = 1.$$

Herbrand tétel

Bizonyítás folytatása

- Elég tehát belátnunk, hogy

$$\mathcal{A}'(F^*) = \mathcal{A}(F^*)$$

  tetszőleges F^* kvantormentes és változómentes (alap)formulára.
- Ezt F^* felépítése szerinti indukcióval tesszük:
- Ha $F^* = p(t_1, \ldots, t_n)$ atomi formula, akkor $t_1, \ldots, t_n$ alaptermek (mert F^*-ban nincs változó). Ekkor

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}'(p(t_1, \ldots, t_n)) && \\
&= I'(p)(\mathcal{A}'(t_1), \ldots, \mathcal{A}'(t_n)) && \\
&= I'(p)(t_1, \ldots, t_n) && \text{mert } \mathcal{A}' \text{ Herbrand struktúra} \\
&= I(p)(\mathcal{A}(t_1), \ldots, \mathcal{A}(t_n)) && I'(p) \text{ def szerint} \\
&= \mathcal{A}(p(t_1, \ldots, t_n)) && \text{szemantika def szerint}
\end{aligned}$$

Herbrand tétel

Bizonyítás folytatása

- Ha $F^* = \neg G$, akkor G is kvantormentes alapformula, tehát

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'(F^*) &= \neg\mathcal{A}'(G) && \text{szemantika def} \\ &= \neg\mathcal{A}(G) && \text{indukciós feltevés} \\ &= \mathcal{A}(\neg G) = \mathcal{A}(F) && \text{szemantika def} \end{aligned}$$

- és ha pl. $F^* = G \vee H$, akkor szintén a szokásos módon

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'(G \vee H) &= \mathcal{A}'(G) \vee \mathcal{A}'(H) && \text{szemantika} \\ &= \mathcal{A}(G) \vee \mathcal{A}(H) && \text{indukció} \\ &= \mathcal{A}(G \vee H) = \mathcal{A}(F^*) && \text{szemantika,} \end{aligned}$$

  a többi bináris konnektívára is ugyanígy.
- Mivel pedig kvantorok nem lehetnek F^*-ban, így kész vagyunk.

A Herbrand tétel és az egyenlőség kezelése

- Az $I'(p)(t_1, \ldots, t_n) \; := \; I(p)(\mathcal{A}(t_1), \ldots, \mathcal{A}(t_n))$ definíció nem valid, ha p az egyenlőség predikátum.
- Hiszen pl. ekkor a természetes számok struktúrájában, ahol van $+/2$ függvényjel, ez pl.

$$I'(=)(0, 0+0) \; := \; I(=)(\mathcal{A}(0), \mathcal{A}(0+0)) = I(=)(0,0)$$

  lenne, azaz igaz kéne legyen.
- Viszont az egyenlőségjelet a Herbrand struktúrában sem definiálhatjuk felül!
- (felül kéne, mert 0 és $+(0,0)$ nem ugyanaz az alapterm.)
- A megoldás: $=$ helyett a formulákban felveszünk egy új (mondjuk equals) bináris predikátumjelet, erről kimondjuk, hogy kongruencia és ezt használjuk $=$ helyett mindenhol.

A Herbrand tétel és az egyenlőség kezelése

A kongruencia azt jelenti, hogy

- ekvivalencia-reláció:
  - $\forall x \ \mathrm{equals}(x, x)$ – reflexív
  - $\forall x \forall y \ \big(\mathrm{equals}(x, y) \rightarrow \mathrm{equals}(y, x)\big)$ – szimmetrikus
  - $\forall x \forall y \forall z \ \big(\mathrm{equals}(x, y) \wedge \mathrm{equals}(y, z) \rightarrow \mathrm{equals}(x, z)\big)$ – tranzitív
- ...és hogy „egyenlő” értékeken alkalmazott függvények/predikátumok értéke is „egyenlő” (kompatibilis velük): minden f/n-re és p/n-re

$$\forall x_1 \forall y_1 \forall x_2 \forall y_2 \ldots \forall x_n \forall y_n \Big(\ \mathrm{equals}(x_1, y_1) \wedge \ldots \wedge \mathrm{equals}(x_n, y_n)$$

$$\rightarrow \mathrm{equals}(f(x_1, \ldots, x_n), f(y_1, \ldots, y_n))\Big) \text{függvényjelekre}$$

$$\rightarrow p(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow p(y_1, \ldots, y_n)\Big) \text{predikátumjelekre}$$

Ha így alakítjuk át a formuláinkat (minden egyenlőséget equalsra cserélünk és felírjuk a fenti formulákat, miszerint equals egy kongruencia), akkor az így átalakított Σ-ra már igaz a Herbrand tétel.

Példa: a Peano axiómák

Ha például vesszük a Peano axiómákat:

- a függvényjelek ott 0, s, $+$ és $\times$ voltak
- a predikátumjelek $\leq$ és használtuk az $=$ jelet is
- az $=$ helyett bevesszük az equals predikátumot
- Az átalakított axiómák:

$$\forall x\big(\neg(s(x) = 0)\big) \Rightarrow \forall x\big(\neg \mathrm{equals}(s(x), 0)\big)$$

$$\forall x \forall y\big(s(x) = s(y) \rightarrow x = y\big) \Rightarrow \forall x \forall y\big(\mathrm{equals}(s(x), s(y)) \rightarrow \mathrm{equals}(x, y)\big)$$

$$\forall x\big(x + 0 = x\big) \Rightarrow \forall x\big(\mathrm{equals}(x + 0, x)\big)$$

$$\forall x\big(x \leq 0 \rightarrow x = 0\big) \Rightarrow \forall x\big(x \leq 0 \rightarrow \mathrm{equals}(x, 0)\big)$$

$$\dots$$

Példa: a Peano axiómák

…és felvesszük a következőket:

$$\forall x \; \mathrm{equals}(x, x)$$
$$\forall x \forall y (\mathrm{equals}(x, y) \to \mathrm{equals}(y, x))$$
$$\forall x \forall y \forall z (\mathrm{equals}(x, y) \wedge \mathrm{equals}(y, z) \to \mathrm{equals}(x, z))$$
$$\forall x_1 \forall y_1 (\mathrm{equals}(x_1, y_1) \to \mathrm{equals}(s(x_1), s(y_1)))$$
$$\forall x_1 \forall y_1 \forall x_2 \forall y_2 (\mathrm{equals}(x_1, y_1) \wedge \mathrm{equals}(x_2, y_2) \to \mathrm{equals}(x_1 + y_1, x_2 + y_2))$$
$$\forall x_1 \forall y_1 \forall x_2 \forall y_2 (\mathrm{equals}(x_1, y_1) \wedge \mathrm{equals}(x_2, y_2) \to \mathrm{equals}(x_1 \times y_1, x_2 \times y_2))$$
$$\forall x_1 \forall y_1 \forall x_2 \forall y_2 (\mathrm{equals}(x_1, y_1) \wedge \mathrm{equals}(x_2, y_2) \to (x_1 \leq y_1 \;\leftrightarrow\; x_2 \leq y_2))$$

akkor ennek a rendszernek egy Herbrand modelljében

- az alaptermek pl. 0, $s(0)$, $s(0) + s(s(0))$, $s(0) + 0$ stb.
- a függvényinterpretációk: $I(+)(s(0), s(s(0))) \;=\; s(0) + s(s(0))$ stb.
- az equals-ra pl. $\mathrm{equals}(s(s(0)), s(0) + s(0))$ igaz (de nem egyenlőek)
- a $\leq$-re pl. $s(s(0)) \leq s(0) + s(s(0)) \times s(s(0))$ igaz

Herbrand tétel

Következmény

Formulák egy Σ halmaza pontosan akkor kielégíthető, ha létezik megszámlálható modellje.

Vagyis: ha Σ kielégíthető, akkor van olyan modellje is, melynek univerzuma „nem túl nagy”: véges vagy megszámlálhatóan végtelen.

Bizonyítás

- Tegyük fel, hogy Σ kielégíthető.
- Hozzuk zárt Skolem alakra Σ-t, legyen a kapott formulahalmaz Σ'.
- Tudjuk, hogy ekkor Σ' is kielégíthető, és így van Herbrand modellje.
- Ez a Herbrand modell megszámlálható (mert fel tudjuk sorolni az összes alaptermet, mert a függvényjelek halmaza is megszámlálható volt)
- Ez a Herbrand modell az eredeti Σ-nak is modellje (azzal, hogy „elfelejtjük” a bevezetett Skolem-függvényeket).

Herbrand tétel

Ez például azt is jelenti, hogy $\mathbb{R}$ nem axiomatizálható még gyengén sem: nincs olyan Σ formulahalmaz, melyre $\mathrm{Mod}(\Sigma) = \{\mathbb{R}\}$, tehát melynek (izomorfia erejéig) pontosan csak a valós számok struktúrája az egyetlen modellje.

- Hiszen ha Σ-nak $\mathbb{R}$ egy modellje, akkor kielégíthető.
- Ha pedig kielégíthető, akkor van megszámlálható modellje.
- De $\mathbb{R}$ nem megszámlálható (a valós számokat nem lehet $r_1, r_2, \ldots$ felsorolni úgy, hogy ne maradjon ki valaki).

Detour: $\mathbb{R}$ nem megszámlálható

- Egy valós szám a $[0,1]$ intervallumban: egy $0.b_1b_2b_3b_4\ldots$ alakú végtelen string, $b_i \in \{0,1\}$ (kettes számrendszerben végtelen „tizedes"törtként)
- írjunk fel valós számokat egy $r_1, r_2, r_3, \ldots$ sorozatban
- akkor az egész sorozatot egy (végtelen) táblázatba rendezhetjük:

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	$\ldots$
$r_1 =$	0	0	1	0	0	$\ldots$
$r_2 =$	0	1	0	1	1	$\ldots$
$r_3 =$	1	1	0	0	1	$\ldots$
$r_4 =$	0	1	0	0	0	$\ldots$
$\ldots$						

- és a pirossal jelölt átlóban szereplő $0.0100\ldots$ elemet ha minden koordinátán megváltoztatjuk, a kapott $0.1011\ldots$ elem egyik sorban sem szerepelhet (hiszen az r_i-től a b_i-ben különbözik)
- tehát pl. ez a valós szám nem jelenhet meg a táblázatban $\Rightarrow$ nem lehet felsorolni a valós számokat (ez a „diagonális módszer")

Herbrand tétel

Ha Σ zárt Skolem normálformák halmaza, akkor legyen

$$E(\Sigma) \ := \ \bigcup_{F \in \Sigma} E(F),$$

tehát Σ Herbrand kiterjesztését úgy kapjuk, hogy az összes Σ-beli F formula Herbrand kiterjesztésének vesszük az unióját.

Példa

Ha $\Sigma = \{\ \forall x p(x),\ \forall y \neg p(f(y))\}$, akkor $E(\Sigma)$-ban van pl.

- $p(c)$ (az első formula Herbrand kiterjesztéséből, c az új konstansjel)
- $p(f(c))$ (szintén az elsőéből)
- $\neg p(f(c))$ (a másodikéból)

és $E(\Sigma)$ kielégíthetetlen (hiszen szerepel benne $p(f(c))$ és $\neg p(f(c))$ is).

Herbrand kiterjesztés

Következmény

Zárt Skolem normálformák Σ halmaza pontosan akkor kielégíthető, ha $E(\Sigma)$ kielégíthető.

Bizonyítás

Σ kielégíthető

$\Leftrightarrow$ Σ-nak van Herbrand modellje

$\Leftrightarrow$ $\mathcal{A} \vDash \Sigma$ valamilyen $\mathcal{A}$ Herbrand struktúrára

$\Leftrightarrow$ van olyan $\mathcal{A}$ Herbrand struktúra, melyre $\mathcal{A} \vDash F$ minden $F \in E(\Sigma)$-ra

$\Leftrightarrow$ $E(\Sigma)$-nak van Herbrand modellje

$\Leftrightarrow$ $E(\Sigma)$ kielégíthető.

Az elsőrendű logika kompaktsági tétele

- Egy $E(\Sigma)$ Herbrand kiterjesztés atomi formulái $p(t_1, \ldots, t_n)$ alakú alapformulák (t_i-k mind alaptermek).
- Egy Herbrand struktúrát eddig úgy tekintettünk, mint amelynek az I interpretációs függvénye egy p/n predikátumjelhez egy $I(p) : T_0^n \to \{0, 1\}$ predikátumot rendel, majd $p(t_1, \ldots, t_n)$ értékét úgy kapjuk, hogy $I(p)$-be behelyettesítjük $(t_1, \ldots, t_n)$-t.
- Ehelyett úgy is tekinthetjük az interpretációs függvényt, mint ami minden egyes $p(t_1, \ldots, t_n)$ alap formulához közvetlenül rendel egy $\{0, 1\}$ értéket.
- Tehát egy $E(\Sigma)$ Herbrand kiterjesztésnek egy Herbrand modelljét keresni ugyanaz, mint
    - a $p(t_1, \ldots, t_n)$ atomi alapformulák mindegyikét egy ítéletkalkulusi változónak tekinteni
    - és ennek az ítéletkalkulusi formulahalmaznak keresni egy modelljét.

Példa

Ha vesszük a $\Sigma = \Big\{ \mathrm{even}(0),\ \forall x\big(\mathrm{even}(x) \leftrightarrow \neg\mathrm{even}(s(x))\big) \Big\}$ formulahalmazt, ennek $E(\Sigma)$ Herbrand kiterjesztése:

- $\mathrm{even}(0)$
- $\mathrm{even}(0) \leftrightarrow \neg\mathrm{even}(s(0))$
- $\mathrm{even}(s(0)) \leftrightarrow \neg\mathrm{even}(s(s(0)))$
- $\ldots$

Az alaptermek: $0, s(0), s(s(0)), \ldots$
Egy Herbrand struktúra tehát ekkor értéket kell adjon az $\mathrm{even}(0)$, $\mathrm{even}(s(0))$, $\mathrm{even}(s(s(0)))$,... ítéletkalkulusi változóknak.
Pl. modell: $\mathrm{even}(s^n(0)) := 1$, ha n páros.

Az elsőrendű logika kompaktsági tétele

Tétel

Elsőrendű logikai formulák tetszőleges Σ halmazára és F formulára $\Sigma \models F$ pontosan akkor igaz, ha már egy véges $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ halmazra is $\Sigma_0 \models F$ igaz.

Bizonyítás

- $\Sigma \models F$ pontosan akkor, ha $\Sigma \cup \{\neg F\}$ kielégíthetetlen.
- Ez pontosan akkor, ha $E(\Sigma \cup \{\neg F\})$ kielégíthetetlen.
- Ez pontosan akkor, ha nincs Herbrand modellje.
- Ez pontosan akkor, ha az $E(\Sigma \cup \{\neg F\})$ mint ítéletkalkulusbeli formulahalmaz kielégíthetetlen.
- Az ítéletkalkulus kompaktsági tétele szerint ez pontosan akkor, ha van egy véges $\Sigma_0' \subseteq E(\Sigma \cup \{\neg F\})$ kielégíthetetlen részhalmaza.
- Ez a véges részhalmaz nyilván $\Sigma \cup \{\neg F\}$-nek egy véges Σ_0 részhalmazának Herbrand kiterjesztésében benne van.
- Tehát van olyan véges $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, melyre $\Sigma_0 \models F$.

Az elsőrendű logika kompaktsági tétele

A kompaktsági tétel szerint...

- van félig eldöntő kielégíthetetlenségi algoritmus elsőrendű logikára, ha Σ rekurzívan felsorolható:
  - az i. iterációban az input Σ első i formulájának vesszük a Herbrand-kiterjesztésének első i elemét (mondjuk)
  - erre a véges halmazra futtatunk egy ítéletkalkulusbeli algoritmust (pl. rezolúciót)
  - ha kielégíthetetlen $\Rightarrow$ Σ is az
  - ha nem $\Rightarrow$ következő iteráció
- viszont az is kijön belőle, hogy vannak tulajdonságok, melyeket nem lehet elsőrendű logikában kifejezni

Az elsőrendű logika kompaktsági tétele

Pl:

Állítás

Nem lehet kifejezni elsőrendű logikában, hogy „az univerzum véges”.

Bizonyítás

- Tegyük fel, hogy a Σ formulahalmaznak minden $\mathcal{A}$ struktúra modellje, ha univerzuma véges.
- Legyen $F_n = \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n \big(\bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j\big)$.
- F_n-t egy struktúra akkor elégíti ki, ha legalább n-elemű.
- Nézzük a $\Delta := \Sigma \cup \{F_n : n \geq 0\}$ formulahalmazt.
- Nyilván Δ-t nem elégíti ki egyetlen véges struktúra sem, hiszen ha $\mathcal{A}$ n-elemű, akkor $\mathcal{A} \not\models F_{n+1}$.

Az elsőrendű logika kompaktsági tétele

Bizonyítás folytatása

- De Δ minden véges részhalmazát kielégíti egy véges struktúra, hiszen egy véges részhalmazban csak véges sok F_i szerepel, és ha n a legnagyobb ezek közül, akkor egy $n+1$-elemű struktúra kielégíti az adott véges részhalmazt.
- A kompaktsági tétel szerint ekkor tehát Δ is kielégíthető, tehát van modellje
- Ez a modell végtelen kell legyen
- Mivel pedig $\Sigma \subseteq \Delta$, ez a végtelen struktúra modellje Σ-nak is.

Az elsőrendű logika kompaktsági tétele

Hasonlóan kijön pl, hogy nem lehet

- gyengén axiomatizálni a természetes számokat: ha $\mathbf{Ar} = \mathrm{Th}(\mathcal{N})$ a számelmélet („aritmetika”), akkor $\mathbf{Ar}$-nak van olyan modellje, mely nem izomorf $\mathcal{N}$-nel
- tranzitívan lezárni: ha $F(x,y)$ egy formula, nem feltétlenül tudunk olyan $F^+(x,y)$ formulát felírni, mely pont akkor igaz egy (a,b) párra, ha van olyan $a = x_0, x_2, \ldots, x_n = b$ sorozat, melyre $F(x_i, x_{i+1})$ igaz minden i-re
- SQL-ben egy „főnök-közvetlen beosztott” táblából egy queryvel „főnök-beosztott” táblát készíteni (mert ez maga a tranzitív lezárás lenne, az SQL-beli queryk pedig mind kifejezhetők elsőrendű logikában)

Alap rezolúció

(aka „ground rezolúció”)

Az alap rezolúciós algoritmus:

- Input: elsőrendű formulák egy Σ halmaza
- Ha Σ kielégíthetetlen, az algoritmus ezt véges sok lépésben levezeti
- Ha kielégíthető, akkor vagy ezt vezeti le, vagy végtelen ciklusba esik
- Módszer:
  - Σ elemeit zárt Skolem alakra hozzuk, a kapott formulák magját CNF-re. Jelölje Σ' a kapott klózhalmazt.
  - Ekkor $E(\Sigma')$ a klózok alap példányainak halmaza
  - Az $E(\Sigma')$ halmazon futtatjuk az ítéletkalkulus-beli rezolúciós algoritmust.
- Mivel $E(\Sigma')$ általában végtelen, így az algoritmus (mondjuk)
  - egy lépésben legenerálja és felveszi $E(\Sigma')$ egy elemét
  - az eddigi klózokkal rezolvenst képez, amíg csak lehet
  - ha közben megkapjuk az üres klózt, Σ kielégíthetetlen
  - különben generáljuk a következő elemet

Alap rezolúció

$$\forall x(p(x) \land \neg p(f(x))$$

Az input már zárt Skolem alakban van, a mag CNF-ben. Klózok:

$$A = \{p(x)\}, \quad B = \{\neg p(f(x))\}$$

Néhány alapterm (fel kell vegyünk egy konstansjelet, mondjuk c-t, mert nincs a nyelvben):

$$T_0 \;=\; \{\; c,\; f(c),\; f(f(c)), \ldots\}$$

Alap rezolúciós levezetés:

1. $\{p(f(c))\} \quad A[x/f(c)]$
2. $\{\neg p(f(c))\} \quad B[x/c]$
3. $\square \quad \mathrm{Res}(1, 2)$

Alap rezolúció

$$\forall x \forall y \Big((\neg p(x) \vee \neg p(f(a)) \vee q(y)) \ \wedge\ p(y) \ \wedge\ (\neg p(g(b,x)) \vee \neg q(b)) \Big)$$

Az input megint zárt Skolem alakban van. Klózok:

$$A = \{\neg p(x), \neg p(f(a)), q(y)\}, \quad B = \{p(y)\}, \quad C = \{\neg p(g(b,x)), \neg q(b)\}$$

Néhány alapterm:

$$T_0 \ = \ \big\{a, b, f(a), f(b), g(a,a), g(a,b), g(f(a), f(b)), \ldots\big\}$$

Levezetés:

$$\begin{array}{lll}
1. & \{\neg p(f(a)), q(b)\} & A[x/f(a), y/b] \\
2. & \{\neg p(g(b,a)), \neg q(b)\} & C[x/a] \\
3. & \{\neg p(f(a)), \neg p(g(b,a))\} & \mathrm{Res}(1,2) \\
4. & \{p(f(a))\} & B[y/f(a)] \\
5. & \{\neg p(g(b,a))\} & \mathrm{Res}(3,4) \\
6. & \{p(g(b,a))\} & B[y/g(b,a)] \\
7. & \Box & \mathrm{Res}(5,6)
\end{array}$$

Alap rezolúció

Tétel

Az alap rezolúciós algoritmus helyes és teljes.

Tehát pontosan akkor igaz $\square \in \mathrm{Res}^*(E(\Sigma'))$, ha $\Sigma \vDash \downarrow$.

Ez igaz, hiszen

- a zárt Skolem alakra hozás s-ekvivalens átalakítás, tehát Σ pontosan akkor kielégíthetetlen, ha Σ' az;
- a Herbrand-tétel következménye szerint Σ' pontosan akkor kielégíthetetlen, ha $E(\Sigma')$ az;
- az ítéletkalkulus kompaktsági tétele szerint $E(\Sigma')$ pontosan akkor kielégíthetetlen, ha van egy véges Σ_0 kielégíthetetlen részhalmaza;
- a rezolúciós algoritmus teljessége szerint ha a Σ_0 véges klózhalmaz kielégíthetetlen, akkor az algoritmus ezt
- tehát ha Σ kielégíthetetlen, akkor az algoritmus leáll ezzel a válasszal akkor, amikor egy ilyen Σ_0 halmaznak már legenerálta az összes elemét (és rezolvenseiket, köztük $\square$-t)

Alap rezolúció

Az alap rezolúció alkalmazásakor nagy a keresési tér.

(Minden változót helyettesítenünk egy-egy alaptermmel.)

Az elsőrendű rezolúcióban

- a keresési tér kisebb lesz
- ezzel párhuzamosan, a rezolvens képzési algoritmusa bonyolultabbá válik

A módszerhez először meg kell ismerjük az egyesítési algoritmust.

Egyesítés

- Azt már láttuk, hogy ha F egy formula, x egy változó, t pedig egy term, akkor mit jelent $F[x/t]$.
- Ha $x_1, \ldots, x_n$ változók és $t_1, \ldots, t_n$ termek, akkor az $[x_1/t_1][x_2/t_2]\ldots[x_n/t_n]$ helyettesítést úgy végezzük el, hogy először az $[x_1/t_1]$-et, majd az eredményen az $[x_2/t_2]$-t, …, végül az $[x_n/t_n]$-t.

Általában az ilyen helyettesítési sorozatokat s-sel fogjuk jelölni.

Formálisan n szerinti indukcióval: ha F formula, $s = [x_1/t_1]\ldots[x_n/t_n]$ helyettesítés, akkor $F \cdot s$:

- ha $n = 0$ (nincs is helyettesítés), akkor $F \cdot s := F$;
- ha $n > 0$, akkor $F \cdot s := \big(F \cdot [x_1/t_1]\ldots[x_{n-1}/t_{n-1}]\big) \cdot [x_n/t_n]$ (vagyis: előbb elvégezzük az első $n-1$ helyettesítést, majd ez után az eredményen az utolsót)

Az $n = 0$ esetet (az „üres” helyettesítést) $[\,]$-vel is jelöljük (nem összekeverni a $\square$ üres klózzal…)

Egyesítés

A sorrend számíthat, ha valamelyik t_i-ben szerepel valamelyik x_j:

$$f(x,g(y))[x/g(y)][y/a] = f(g(a),g(a))$$
$$f(x,g(y))[y/a][x/g(y)] = f(g(y),g(a))$$

Formulák halmazaira (pl klózokra) is értelmezzük a helyettesítést: ha C formulák egy halmaza és s egy helyettesítés, akkor legyen

$$C \cdot s \ := \ \{F \cdot s : \ F \in C\}$$

azaz $C \cdot s$-et úgy kapjuk, hogy C minden elemén elvégezzük s-t és az eredményeket egy halmazba rakjuk

Ha $C = \{\ell_1, \ldots, \ell_n\}$ literálok egy halmaza (azaz egy klóz), akkor s a C egyesítője, ha $\ell_1 s = \ldots = \ell_n s$.

A C klózra azt mondjuk, hogy egyesíthető, ha van egyesítője.

Egyesítés

$$C \;=\; \Big\{\; p(g(x), y),\; p(y, g(a)) \;\Big\}$$

Ez a klóz egyesíthető, egy egyesítője

$$s \;=\; [x/a][y/g(a)]$$

hiszen

$$p(g(x), y) \cdot [x/a][y/g(a)] = p(g(a), g(a))$$
$$p(y, g(a)) \cdot [x/a][y/g(a)] = p(g(a), g(a))$$

Egyesítés

$$C \;=\; \Big\{\; p(x, f(y)),\; p(g(y), z) \;\Big\}$$

egyesíthető, egy egyesítője pl.

$$s \;=\; [x/g(a)][y/a][z/f(a)]$$

mely melletti képe $C \cdot s = \{p(g(a), f(a))\}$.
Egy másik egyesítő:

$$s_0 \;=\; [x/g(y)][z/f(y)]$$

mely melletti képe $C \cdot s_0 = \{p(g(y), f(y))\}$.
Észrevehetjük: $s_0 \cdot [y/a] \;=\; s$ és emiatt valamilyen értelemben s_0 „tűnik'' a „jobb'' egyesítőnek.

Egyesítés

Azt mondjuk, hogy az s helyettesítés általánosabb az s' helyettesítésnél, ha van olyan s'' helyettesítés, melyre $s \cdot s'' = s'$.

Pl. az előző dián látott s_0 általánosabb volt az s-nél.

Az egyesítési algoritmus

- inputja egy C klóz,
- outputja:
  - ha C egyesíthető, akkor egy legáltalánosabb egyesítőjét adja vissza;
  - különben azzal tér vissza, hogy nem egyesíthető.

Egyesítés

Mikor nem egyesíthető egy klóz?

$$\left\{ \; p(f(x), y), \; p(g(x), y) \; \right\}$$

nem egyesíthető: bármit is helyettesítünk a változók helyébe, az első term az első literálban f-fel, a másodikban g-vel fog kezdődni.

$$\left\{ \; p(x), \; p(f(x)) \; \right\}$$

nem egyesíthető: bármit is helyettesítünk x helyébe, mondjuk t-t, az első literál $p(t)$ lesz, a második $p(f(t))$ és $t \neq f(t)$.

Egyesítés

Az egyesítési algoritmus tehát, ha inputja egy C klóz:

- $s \ := \ [\,]$
- Ha $|C| \leq 1$, adjuk vissza s-t.
- Vegyünk két literált, $\ell_1 \neq \ell_2$-t C-ből és keressük meg az első eltérő pozíciójukat.
- Ha itt
  - az egyik literálban egy x változó áll,
  - a másikban egy t term, melyben nincs x,

  akkor legyen $C \ := \ C \cdot [x/t]$, $s \ := \ s \cdot [x/t]$ és ugorjunk a kettes pontra.
- Különben adjuk vissza, hogy C nem egyesíthető.

Egyesítés

$$C = \left\{ \neg p(f(z, g(a,y)), h(z)),\ \neg p(f(f(u,v), w), h(f(a,b))) \right\}$$

- $s = [\,]$
- Az első eltérő pozíció: z vs. $f(u,v)$, OK, z olyan változó, mely nem szerepel $f(u,v)$-ben
- akkor $s = [z/f(u,v)]$, elvégezzük C-n:
  $$\left\{ \neg p(f(f(u,v), g(a,y)), h(f(u,v))),\ \neg p(f(f(u,v), w), h(f(a,b))) \right\}$$

Egyesítés

$$\left\{ \neg p(f(f(u,v),g(a,y)),h(f(u,v))),\ \neg p(f(f(u,v),w),h(f(a,b))) \right\}$$

- w változó, $g(a,y)$-ben nem szerepel $\Rightarrow$ még mindig OK
- $s = [z/f(u,v)][w/g(a,y)]$
- elvégezzük $[w/g(a,y)]$-t az aktuális C-n:

$$\left\{ \neg p(f(f(u,v),g(a,y)),h(f(u,v))),\ \neg p(f(f(u,v),g(a,y)),h(f(a,b))) \right\}$$

A végeredmény $[z/f(u,v)][w/g(a,y)][u/a][v/b]$ lesz.

Follow-up: elsőrendű rezolúció

Az elsőrendű rezolúciós algoritmusban

- a Σ'-beli klózokat közvetlenül felvehetjük a listára
- viszont használjuk az egyesítési algoritmust is a rezolvensképzésnél (nem csak akkor rezolválhatunk két literál mentén, ha betű szerint egymás komplementerei)

Két elsőrendű logikai klóz, C_1 és C_2 elsőrendű rezolvensét a következőképp kapjuk:

- Átnevezzük a klózokban a változókat úgy (legyenek a változóátnevezések s_1 és s_2), hogy a kapott $C_1 \cdot s_1$ és $C_2 \cdot s_2$ klózok ne tartalmazzanak közös változót.
- Kiválasztunk $C_1 \cdot s_1$-ből $\ell_1, \ldots, \ell_m$ és $C_2 \cdot s_2$-ből $\ell'_1, \ldots, \ell'_n$ literálokat, mindkettőből legalább egyet-egyet.
- Futtatjuk az egyesítési algoritmust a

$$C = \left\{ \ell_1, \ldots, \ell_m, \overline{\ell'_1}, \ldots, \overline{\ell'_n} \right\}$$

  klózon. (Tehát a C_1-ből jövő kiválasztott literálokon és a C_2-ből jövők komplementerein.)
- Ha C egyesíthető az s legálaltalánosabb egyesítővel, akkor s-et végrehajtjuk a nem kiválasztott literálok halmazán:

$$R := \Big((C_1 \cdot s_1 - \{\ell_1, \ldots, \ell_m\}) \cup (C_2 \cdot s_2 - \{\ell'_1, \ldots, \ell'_n\}) \Big) \cdot s$$

A kapott R klóz a C_1 és C_2 egy elsőrendű rezolvense.

Elsőrendű rezolúció

A literálok kiválasztásánál érdemes észrevenni a következőt:

- Csak akkor tudunk a kiválasztott literálok mentén egyesíteni, ha a

  $$C = \left\{ \ell_1, \ldots, \ell_m, \overline{\ell'_1}, \ldots, \overline{\ell'_n} \right\}$$

  klóz egyesíthető.
- Ehhez az mindenképp kell, hogy az összes kiválasztott literálban ugyanaz legyen a predikátumjel. (Hiszen ha már azon is eltérnek, akkor C nem lesz egyesíthető.)
- Az is kell, hogy a C-be kerülő literálok előjele megegyezzen.
- Tehát a kiválasztási fázisban (mivel C_1 és C_2 szerepe szimmetrikus) elég:
  - választanunk egy p predikátumjelet
  - $C_1 \cdot s_1$-ből pozitív p-s literálokat választani, legalább egyet,
  - $C_2 \cdot s_2$-ből negatív p-s literálokat választani, legalább egyet,
  - és ezeknek az előjel nélküli változatát megpróbálni egyesíteni.

Elsőrendű rezolúció

- Ebben a formájában ha összehasonlítjuk az ítéletkalkulus-beli rezolvensképzéssel, ott:
- Nem kell átneveznünk változókat, hiszen nincsenek a klózokban elsőrendű változók. $s_1 = s_2 = [\,]$
- Kiválasztva egy p predikátumjelet mindkét klózban csak a p és a $\neg p$ szerepelhet p-s literálként;
- Így csak úgy tudunk rezolvenst képezni, ha $p \in C_1$ és $\neg p \in C_2$, ekkor $C = \{p\}$ lesz, ami egyesíthető az $s = [\,]$ helyettesítéssel;
- Ekkor R az ítéletkalkulus-beli rezolvens lesz.
- Tehát ítéletkalkulusban a két rezolvensképző módszer megegyezik; az elsőrendű rezolvensképzés kiterjeszti az ítéletkalkulus-belit.

Elsőrendű rezolúció

$$C_1 \;=\; \{p(f(x)),\,\neg q(z),\,p(z)\} \qquad\qquad C_2 \;=\; \{\neg p(x),\,r(g(x),a)\}$$

- Átnevezés: (mondjuk) a C_2-beli x-et y-ra nevezzük át

$$C_1 s_1 \;=\; \{p(f(x)),\,\neg q(z),\,p(z)\} \qquad\qquad C_2 s_2 \;=\; \{\neg p(y),\,r(g(y),a)\}$$

- Kiválasztás: válasszuk mondjuk $C_1 s_1$-ből $p(f(x))$-et és $p(z)$-t, $C_2 s_2$-ből pedig $\neg p(y)$-t
- Egyesítés: a

$$\{\;p(f(x)),\;p(z),\;p(y)\;\}$$

klóz legáltalánosabb egyesítője $s = [z/f(x)][y/f(x)]$

- Végrehajtás: a nem-kiválasztott literálokon végrehajtjuk s-t:

$$\{\neg q(z),\;r(g(y),a)\} \cdot [z/f(x)][y/f(x)] \;=\; \{\neg q(f(x)),\;r(g(f(x)),a)\}$$

Ez a két klóz (egyik) rezolvense.

Elsőrendű rezolúció

Az elsőrendű rezolúciós algoritmus tehát:

- Input: (elsőrendű) klózok egy Σ halmaza. Úgy tekintjük, mintha a Σ-beli klózok változói univerzálisan lennének kvantálva.
- Output:
  - ha $\Sigma \vDash \downarrow$, akkor „kielégíthetetlen”
  - különben „kielégíthető” vagy végtelen ciklus
- Módszer: listát vezetünk klózokról. Egy klózt felvehetünk, ha:
  - Σ-beli vagy
  - két, már a listán szereplő klóz rezolvense.
- Ha $\square$ rákerül a listára, akkor Σ kielégíthetetlen.
- Különben, ha már nem tudunk több klózt levezetni, Σ kielégíthető.

Mint korábban is, $\mathrm{Res}(\Sigma)$ jelöli azt a halmazt, mely tartalmazza Σ elemeit és a belőlük egy rezolvensképzéssel levezethető klózokat; $\mathrm{Res}^*(\Sigma)$ pedig a Σ-ból rezolúcióval levezethető összes klóz halmazát.

Elsőrendű rezolúció

$$\forall x \forall y \forall z \Big((\neg p(x) \vee q(x) \vee r(x, f(x))) \\ \wedge (\neg p(x) \vee q(x) \vee s(f(x))) \\ \wedge p(a) \wedge t(a) \wedge (\neg r(a, z) \vee t(z)) \\ \wedge (\neg t(x) \vee \neg q(x)) \wedge (\neg t(y) \vee \neg s(y)) \Big)$$

1.	$\{\neg p(x), q(x), r(x, f(x))\}$	$\in \Sigma$	8.	$\{q(a), r(a, f(a))\}$	$\mathrm{Res}(1,3)$
2.	$\{\neg p(x), q(x), s(f(x))\}$	$\in \Sigma$	9.	$\{\neg q(a)\}$	$\mathrm{Res}(4,6)$
3.	$\{p(a)\}$	$\in \Sigma$	10.	$\{r(a, f(a))\}$	$\mathrm{Res}(8,9)$
4.	$\{t(a)\}$	$\in \Sigma$	11.	$\{\neg p(x), q(x), \neg t(f(x))\}$	$\mathrm{Res}(2,7)$
5.	$\{\neg r(a, z), t(z)\}$	$\in \Sigma$	12.	$\{q(a), \neg t(f(a))\}$	$\mathrm{Res}(3,11)$
6.	$\{\neg t(x), \neg q(x)\}$	$\in \Sigma$	13.	$\{\neg t(f(a))\}$	$\mathrm{Res}(9,12)$
7.	$\{\neg t(y), \neg s(y)\}$	$\in \Sigma$	14.	$\{\neg r(a, f(a))\}$	$\mathrm{Res}(5,13)$
			15.	$\square$	$\mathrm{Res}(10,14)$

Elsőrendű rezolúció

Az elsőrendű rezolúciónak is van helyességi és teljességi tétele:

Elsőrendű klózok Σ halmaza pontosan akkor kielégíthetetlen, ha $\square \in \mathrm{Res}^*(\Sigma)$.

Elsőrendű rezolúció: helyesség

- A helyesség (ha kijöhet az üres klóz, akkor Σ kielégíthetetlen) ismét a rezolvensképzés helyességéből következik.
- Mivel a klózok univerzálisan kvantáltak (a Skolem alakból), így tetszőleges C klózra és s helyettesítésre $C \vDash C \cdot s$
- Tehát a rezolvensképzésnél felírt C_1-nek $C_1 \cdot s_1 \cdot s$, C_2-nek pedig $C_2 \cdot s_2 \cdot s$ egy-egy logikai következménye
- Tehát $\{C_1, C_2\} \vDash \{C_1 s_1 s, C_2 s_2 s\}$
- Ennek a két klóznak pedig a rezolvens következménye (az „eredeti" rezolúciós következtetés szerint).

Elsőrendű rezolúció: teljesség

- A teljességi irányhoz felhasználjuk az alap rezolúciós algoritmus teljességét.
- Tehát: ha Σ kielégíthetetlen, akkor az üres klóznak van egy $C'_1, C'_2, \ldots, C'_n = \square$ alaprezolúciós levezetése.
- Ebből az alaprezolúciós levezetésből fogunk készíteni egy $C_1, C_2, \ldots, C_n$ elsőrendű rezolúciós levezetést.
- A klózokat úgy fogjuk elkészíteni indukcióval n szerint, hogy minden i-re a C_i-nek a C'_i egy (alap) példánya lesz.
- Mivel a $C'_n = \square$ üres klóz csak önmagának példánya, így $C_n = \square$ kell legyen.

Elsőrendű rezolúció: teljesség

Ha pl. Σ-ban:

$$\{p(x, f(y))\}\ \{\neg p(f(x), z),\ r(x, g(z))\}\ \{\neg r(f(y), g(y)), \neg p(y, y)\}$$

Akkor:

	C_i'		C_i
1.	$\{p(fffc, fc)\}$	$\in E(\Sigma)$	$\{p(x, f(y))\}$
2.	$\{\neg p(fffc, fc), r(ffc, gfc)\}$	$\in E(\Sigma)$	$\{\neg p(f(x), z), r(x, g(z))\}$
3.	$\{r(ffc, gfc)\}$	$\mathrm{Res}(1, 2)$	$\{r(x, g(f(y)))\}$
4.	$\{\neg r(ffc, gfc),\ \neg p(fc, fc)\}$	$\in E(\Sigma)$	$\{\neg r(f(y), g(y)), \neg p(y, y)\}$
5.	$\{\neg p(fc, fc)\}$	$\mathrm{Res}(3, 4)$	$\{\neg p(f(z), f(z))\}$
6.	$\{p(fc, fc)\}$	$\in E(\Sigma)$	$\{p(x, f(y))\}$
7.	$\square$	$\mathrm{Res}(5, 6)$	$\square$

Elsőrendű rezolúció: teljesség

Tehát az állítás:

Ha $C'_1, C'_2, \ldots, C'_n$ egy Σ fölötti alap rezolúciós levezetés, akkor van olyan $C_1, C_2, \ldots, C_n$ szintén Σ fölötti elsőrendű rezolúciós levezetés, melyben minden i-re a C'_i a C_i-nek egy alap példánya.

- Ha $C'_i \in E(\Sigma)$, azaz C'_i egy Σ-beli C klóz (alap) példánya, akkor legyen $C_i := C$.
- A másik lehetőség, hogy C'_i a C'_j és C'_k klózok, $j, k < i$, egy rezolvense.
- Ennek az esetnek a belátásához felírjuk az ún. lift lemmát.

A lift lemma

A lift lemma

Ha C_1-nek C_1', C_2-nek pedig C_2' alap példányai, melyeknek R' rezolvense, akkor van C_1-nek és C_2-nek olyan elsőrendű R rezolvense, melynek R' alap példánya.

Ha ezt belátjuk, akkor kész vagyunk: ha ugyanis C_i' a C_j' és C_k' klózok alap rezolvense és C_j-nek C_j', C_k-nak pedig C_k' alap példánya, akkor a lift lemma szerint C_j-nek és C_k-nak van egy C elsőrendű rezolvense, melynek C_i' alap példánya; legyen ez a C_i.

A lift lemma

Bizonyítás

- Legyen $\ell \in C_1'$, $\overline{\ell} \in C_2'$ és $R' = (C_1' - \{\ell\}) \cup (C_2' - \{\overline{\ell}\})$.
- Tudjuk, hogy C_1-nek C_1', C_2-nek pedig C_2' egy alap példánya.
- Ha átnevezzük a változókat a klózokban, úgy a kapott $C_1 s_1$-nek ill. $C_2 s_2$-nek is alap példányai lesznek C_1' és C_2'.
- Vegyünk tehát egy s_1 és egy s_2 változó-átnevezést, melyre $C_1 s_1$-ben és $C_2 s_2$-ben nincs közös változó.
- Akkor van egy olyan közös s alaphelyettesítés, hogy $C_1 s_1 s = C_1'$ és $C_2 s_2 s = C_2'$.
- Tehát mivel $\ell \in C_1'$, ezért vannak olyan $\ell_1, \ldots, \ell_n \in C_1 s_1$, $n \geq 1$ literálok, melyekre $\{\ell_1, \ldots, \ell_n\} s = \ell$.
- Ugyanígy, vannak olyan $\ell_1', \ldots, \ell_m' \in C_2 s_2$, $m \geq 1$ literálok, melyekre $\{\ell_1', \ldots, \ell_m'\} s = \overline{\ell}$.
- Vegyük be az összes ilyet, tehát a többi literál s melletti képe legyen egy ℓ-től eltérő.

A lift lemma

Bizonyítás folytatása

- Akkor az $\{\ell_1, \ldots, \ell_n, \overline{\ell'_1}, \ldots, \overline{\ell'_m}\}$ literálhalmaz egyesíthető, legyen mondjuk az s_0 legáltalánosabb egyesítője.
- Mivel az s_0 a legáltalánosabb egyesítő és s egy egyesítő, így van olyan s' helyettesítés, melyre $s_0 s' = s$.
- Ekkor az R' rezolvens az

$$R = \Big(\big(C_1 s_1 - \{\ell_1, \ldots, \ell_n\} \big) \cup \big(C_2 s_2 - \{\ell'_1, \ldots, \ell'_m\} \big) \Big) s_0$$

elsőrendű rezolvensnek s' melletti alap példánya.

A lift lemma – példa

- $C_1 = \{p(x), p(f(y)), q(z)\}$
- $C_2 = \{\neg p(y), r(x)\}$
- $C_1' = \{p(f(c)), q(g(c))\}$
- $C_2' = \{\neg p(f(c)), r(c)\}$
- $R' = \{q(g(c)), r(c)\}$
- Ekkor:
- $C_1 s_1 := \{p(x), p(f(y)), q(z)\}$
- $C_2 s_2 := \{\neg p(w), r(u)\}$
- $s := [x/f(c)][y/c][z/g(c)][w/f(c)][u/c]$
- Az s helyettesítés egyesíti a $C = \{p(x), p(f(y)), p(w)\}$ literálokat
- Ezekre $s_0 = [x/f(y)][w/f(y)]$ a legáltalánosabb
- A rezolvens $R = \{q(z), r(u)\}$
- Ennek R' tényleg alap példánya.

A Prolog

A logikai programozás alapfeladata:

- Input: elsőrendű, univerzálisan kvantált Horn-klózok egy véges Σ halmaza és egy $R = \exists(R_1 \wedge \ldots \wedge R_n)$ alakú formula, ahol az R_i-k atomi formulák.
- Output: Igaz-e, hogy $\Sigma \models R$?

(Itt $\exists F$ az F formula egzisztenciális lezártját jelöli: az F-beli összes szabadon előforduló változót lekötjük egy-egy $\exists$ kvantorral.)

A Prolog – példa

actual Prolog syntax

- Legyen $|$ egy bináris függvényjel, 0 és $[]$ konstans, s unáris.
- A már megszokott Peano reprezentációban a természetes számok: pl. $ss0$ a 2, $ssss0$ a 4.
- a $|$ függvényjellel listákat építünk, pl. $1|(4|(2|(8|[])))$ az $[1,4,2,8]$ lista.
- A listákat a fenti módon jobbra igazítjuk és nem teszünk ki zárójeleket.
- Syntax sugar: $[1,4,2|[8,5,7]]$ az $[1,4,2,8,5,7]$ lista.

A Prolog – példa

Lista összegzés Peano számokkal

Legyenek a következő formuláink (univerzálisan kvantált Horn-klózok) Σ-ban:

- $\mathrm{sum}([], 0)$ — üres lista összege 0
- $\mathrm{sum}(x|y, z) \to \mathrm{sum}(s(x)|y, s(z))$

  ha az '[x|y]' lista összege 'z', akkor az '[x+1 | y]' lista összege 'z+1'
- $\mathrm{sum}(y, z) \to \mathrm{sum}(0|y, z)$

  ha az 'y' lista összege 'z', akkor a '[0|y]' lista összege is 'z'

Ez nálunk:

$$\{\mathrm{sum}([], 0)\}, \{\neg\mathrm{sum}(x|y, z), \mathrm{sum}(s(x)|y, s(z)\}, \{\neg\mathrm{sum}(y, z), \mathrm{sum}(0|y, z)\}$$

Prologban: visszafele van a „nyíl", jobb oldalon éselés, vesszőkkel elválasztva

- `sum([],0).`
- `sum([s(X)|Y],s(Z)) :- sum([X|Y],Z).`
- `sum([0|Y],Z) :- sum(Y,Z).` — prologban a változók nagybetűvel kezdődnek

A Prolog – példa

Query

- megkérdezzük, hogy ebből a Σ-ből következik-e, hogy

$$\exists x(\mathrm{sum}(1|4|2, x))$$

  (azaz: van-e olyan x, amire x az $1|4|2$ lista összege):
- `?-sum([s0|[ssss0|[ss0|[]]]],x)`

persze az összegzést direkt egy funkcionális predikátumnak készítettük, persze, hogy van; a Prolog vissza is ad egyet amire igaz, ha le tudja vezetni h létezik

Erre a Prolog „illeszt”:

- az első szabály feje nem illik `sum([],0)`
- a másodiké illik: az aktuális állapotunk `sum([s(x)|y],s(z)) :- sum([x|y],z)`

`sum([0|[ssss0|[ss0|[]]]],x')`

lesz — eltároljuk az $[x/s(x')]$ egyesítőt is, visszatérésnél használjuk majd

aktuális állapot

- $\{\neg \mathsf{sum}(s(0)|s(s(s(s(0))))|s(s(0))|[],\ x)\}\}$
- $\{\mathsf{sum}(s(x)|y,\ s(z)),\ \neg \mathsf{sum}(x|y,\ z))\}\}$
- $\{\mathsf{sum}(s(x')|y,\ s(z)),\ \neg \mathsf{sum}(x'|y,\ z))\}\}$ átnevezés
- egyesítő: $[x'/0][y/ssss0|ss0|[]][x/s(z)]$
- rezolvens: $\{\neg \mathsf{sum}(0|ssss0|ss0|[], z)\}\}$

erre pedig „illik a `sum([0|y],z) :- sum(y,z).` szabály"

aktuális állapot

- $\{\neg \mathsf{sum}(0|ssss0|ss0|[], z)\}\}$
- $\{\mathsf{sum}(0|y,\ z),\ \neg \mathsf{sum}(y,\ z))\}\}$
- $\{\mathsf{sum}(0|y,\ z'),\ \neg \mathsf{sum}(y,\ z'))\}\}$ átnevezés
- egyesítő most: $[y/ssss0|ss0|[]][z'/z]$
- rezolvens: $\{\neg \mathsf{sum}(ssss0|ss0|[],\ z)\}\}$
- egyesítő eddig: $[x'/0][y/ssss0|ss0|[]][x/s(z)][y/ssss0|ss0|[]][z'/z]$
- egyesítőnek az eredeti klózra ható része: $[x/s(z)]$

aktuális állapot

- $\{\neg\mathsf{sum}(ssss0|ss0|[],\ z)\}\}$
- $\{\mathsf{sum}(s(x)|y,\ s(z)),\ \neg\mathsf{sum}(x|y,\ z))\}\}$
- $\{\mathsf{sum}(s(x)|y,\ s(z')),\ \neg\mathsf{sum}(x|y,\ z'))\}\}$ átnevezés
- egyesítő: $[x/sss0][y/ss0|[]][z/s(z')]$
- rezolvens: $\{\neg\mathsf{sum}(sss0|ss0|[], z')\}\}$
- eddigi egyesítőnek az eredeti klózra ható része: $[x/s(z)]\cdot[x/sss0][y/ss0|[]][z/s(z')] = [x/ss(z')]$

aktuális állapot

- $\{\neg\mathsf{sum}(sss0|ss0|[],\ z')\}\}$
- $\{\mathsf{sum}(s(x)|y,\ s(z)),\ \neg\mathsf{sum}(x|y,\ z))\}\}$
- egyesítő: $[x/ss0][y/ss0|[]][z'/s(z)]$
- rezolvens: $\{\neg\mathsf{sum}(ss0|ss0|[], z)\}\}$
- eddigi egyesítőnek az eredeti klózra ható része: $[x/ss(z')]\cdot[x/ss0][y/ss0|[]][z'/s(z)] = [x/sss(z)]$

A Prolog – példa

idhővel. . .

- $\{\neg\mathsf{sum}(0|[], z)\}$
- $\{\mathsf{sum}(0|y,\ z),\ \neg\mathsf{sum}(y,\ z))\}\}$
- $\{\mathsf{sum}(0|y,\ z'),\ \neg\mathsf{sum}(y,\ z'))\}\}$
- egyesítő: $[y/[]][z/z']$
- rezolvens: $\{\neg\mathsf{sum}([], z')\}\}$
- eddigi egyesítőnek az eredeti klózra ható része: $[x/sssssss(z)] \cdot [y/[]][z/z'] = [x/sssssss(z')]$

- $\{\neg\mathsf{sum}([], z')\}\}$
- $\{\neg\mathsf{sum}([], 0)\}\}$
- egyesítő: $[z'/0]$
- rezolvens: $\square$
- eddigi egyesítőnek az eredeti klózra ható része: $[x/sssssss(z')] \cdot [z'/0] = [x/sssssss0)]$

A Prolog

Valójában a Prolog egy SLD rezolúciót végez:

- A kérdés negáltját bevesszük Σ-ba – kapunk egy univerzálisan kvantált negatív klózt
- Ebből a negatív klózból indítunk egy lineáris rezolúciós levezetést
- Mindig jegyezzük a helyettesítést, hogy eddig mit hajtottunk végre a kérdés klózon
- Ha kijön az üres klóz, alkalmazzuk a kérdés klózon a helyettesítést, ez a válasz

note: ha átneveznénk a munkaklózunk változóit rezolváláskor, azt is bele kell írni a logba

A logikai programozás

Tehát a logikai programozásban

- Adott program klózoknak vagy definit klózoknak egy Σ véges halmaza (ezek nem negatív Horn klózok)
- Adott még egy R kérdés klóz (ez pedig egy negatív Horn klóz)
- SLD rezolúciót végzünk úgy, hogy megjegyezzük a helyettesítést is
- Tehát egy konfiguráció egy (C, s) pár, ahol C negatív klóz, s pedig helyettesítés
- A kiindulási konfiguráció: $(R, [\,])$
- Egy elfogadó konfiguráció: $(\Box, s)$ valamilyen s-re
- Egy átmenet vagy lépés: $(C, s) \vdash (C', s')$, ha van olyan D program klóz, mellyel C-nek rezolvense C' és a rezolvens képzésekor kapott s'' legáltalánosabb egyesítőre $ss'' = s'$
- Ha $(R, [\,]) \vdash^* (\Box, s)$, akkor az eredmény Rs.

Logikai programozás

Az SLD rezolúció Horn-klózokra vonatkozó teljességéből kapjuk:

- Ha $\Sigma \vDash \exists R$, akkor (és csak akkor) van $(R, [\,]) \vdash \ldots \vdash (\square, s)$ alakú (azaz sikeres) kiszámítás.
- Ekkor $\Sigma \vDash Rs$ is igaz (tehát még az egzisztenciális kvantorok által kötött változóknak is megkapjuk egy-egy „jó” helyettesítését).
- Továbbá, ha $\Sigma \vDash Rs$, akkor van olyan sikeres $(R, [\,]) \vdash^* (\square, s')$ kiszámítás, ahol s' legalább olyan általános helyettesítés, mint s.

Megjegyzés: a Prolog az oldal klózok kipróbálásának egy sorrendjét is rögzíti (a fejeket deklarációs sorrendben próbálja végig). Ily módon végtelen ciklusba is eshet akkor is, ha matematikailag lenne sikeres kiszámítás.

Prolog

```
f(L, R) :- f(L, [], R).

f([], R, R).
f([H|T], R1, R) :- f(T, [H|R1], R).

?- f([1,4,2], X).
f([1,4,2], [], X) %masodik rule, H/1, T/[4,2], R1/[], R/X
f([4,2], [1], X) %masodik rule, H/4, T/[2], R1/[1], R/X
f([2], [4,1], X) %masodik rule, H/2, T/[], R1/[4,1], R/X
f([], [2,4,1], X) %elso rule, R/[2,4,1], X/[2,4,1]
%ures kloz
--> X = [2,4,1]
```

Prolog

```
e(1,2). e(2,3). e(3,1). e(2,4).
e(4,5). e(5,4).

path(X,X).
path(X,Y) :- e(X,Z), path(Z,Y).
```

math: OK, de SLD miatt végtelen ciklus

1. $\{\neg path(1,4)\}$
2. $\{\neg e(1,z), \neg path(z,4)\}$ $\leftarrow \{\neg e(x,z), \neg path(z,y), path(x,y)\}$
3. $\{\neg path(2,4)\}$ $\leftarrow \{e(1,2)\}$
4. $\{\neg e(2,z), \neg path(z,4)\}\}$ $\{\leftarrow \{\neg e(x,z), \neg path(z,y), path(x,y)\}$
5. $\{\neg path(4,4)\}$ $\leftarrow \{e(2,4)\}$!!!
6. $\square$ $\leftarrow \{\neg path(x,x)\}$

Prolog

```
e(1,2). e(2,3). e(3,1). e(2,4). e(4,5). e(5,4). %input graf

path(X,X).
path(X,Y) :- e(X,Z), path(Z,Y).
```

math: OK, de SLD miatt végtelen ciklus

1. $\{\neg path(1,4)\}$
2. $\{\neg e(1,z), \neg path(z,4)\}$ $\leftarrow \{\neg e(x,z), \neg path(z,y), path(x,y)\}$
3. $\{\neg path(2,4)\}$ $\leftarrow \{e(1,2)\}$
4. $\{\neg e(2,z), \neg path(z,4)\}\}$ $\leftarrow \{\neg e(x,z), \neg path(z,y), path(x,y)\}$
5. $\{\neg path(3,4)\}$ $\leftarrow \{e(2,3)\}$
6. $\{\neg e(3,z), \neg path(z,4)\}$ $\leftarrow \{\neg e(x,z), \neg path(z,y), path(x,y)\}$
7. $\{\neg path(1,4)\}$ $\leftarrow \{e(3,1)\}$ loop!

Prolog

```
split([],[],[]).
split([X],[X],[]).
split([A,B|T],[A|L],[B|R]) :- split(T,L,R).
```

1. $\{\neg split([1,4,2,8,5,7],x,y)\}$
2. $\{\neg split([2,8,5,7],y',z)\}\}$ $\leftarrow \{\neg split(x,y,z), split([y_1,z_1|x],[y_1|y],[z_1|z])\}$
   - átnevezés a program klózban: $[x/x'][y/y']$
   - egyesítő: $[y_1/1][z_1/4][x'/[2,8,5,7]][x/[1|y']][y/[4|z]]$
   - hatása az eredetin eddig: $[x/[1|y']][y/[4|z]]$
3. $\{\neg split([5,7],y,z')\}$ $\leftarrow \{\neg split(x,y,z), split([y_1,z_1|x],[y_1|y],[z_1|z])\}$
   - átnevezés a program klózban: $[z/z']$
   - egyesítő: $[y_1/2][z_1/8][x/[5,7]][y'/[2|y]][z/[8/z']]$
   - hatása az eredetin eddig: $[x/[1|y']][y/[4|z]][y'/[2|y]][z/[8|z']] = [x/[1,2|y]][y/[4,8|z']]$

Prolog

```
split([],[],[]).
split([X],[X],[]).
split([A,B|T],[A|L],[B|R]) :- split(T,L,R).
```

1. $\{\neg split([], y', z)\}\}$ $\leftarrow \{\neg split(x, y, z), split([y_1, z_1|x], [y_1|y], [z_1|z])\}$
    - átnevezés a program klózban: $[y/y']$
    - egyesítő: $[y_1/5][z_1/7][x/[]][y/[5|y']][z'/[7|z]]$
    - hatása az eredetin eddig $[x/[1,2|y]][y/[4,8|z']][y/[5|y']][z'/[7|z]] = [x/[1,2,5|y']][y/[4,8,7|z]]$
2. $\square$ $\leftarrow \{split([], [], [])\}$
    - egyesítő: $[y'/[]][z/[]]$
    - hatása az eredetin: $[x/[1,2,5]][y/[4,8,7]]$

$\Rightarrow X = [1,2,5],\ Y = [4,8,7]$

Prolog

Ha több fej is illik az aktuális klózunkra, backtrack is lehet

```
parent(joe,john). parent(joe,mary)
male(joe). male(john). female(mary).
mother(X,Y) :- parent(X,Y), female(Y).
?- mother(joe,X).
```

- $\{\neg mother(joe, X)\}$
- $\{\neg parent(joe, Y), \neg female(Y)\}$ $\leftarrow \{\neg parent(X, Y), \neg female(Y), mother(X, Y)\}$
- $\{\neg female(john)\}$ $\leftarrow \{parent(joe, john)\}$

  stuck, visszalépés, következő lehetséges fej illesztése

- $\{\neg female(mary)\}$ $\leftarrow \{parent(joe, mary)\}$
- $\Box$ $\leftarrow \{female(mary)\}$ OK

$X = mary$

Prolog

Amiben a Prolog többet tud, mint amit eddig láttunk:

- van built-in term kiértékelés a standard struktúrában: ‘X is Y + 1‘

  ```
  sum_list([],0).
  sum_list([H|T], S) :- sum_list(T,X), S is X + H.
  ```

- egyenlőség tesztelés: =\= a két term értéke nem egyenlő; \== a két term nem egyenlő; \= a két term nem egyesíthető
- =:= a két term értéke egyenlő; == a két term ugyanaz; = a két term egyesíthető
- (read some trash at this site)

Prolog

Amiben a Prolog többet tud, mint amit eddig láttunk:

- van pár built-in mellékható predikátum, pl. ‘write/1‘, ha ilyen literált rezolválsz, kiírja (azonnal) a konzolra a predikátumban lévő termet

  ```
  print_list([]).
  print_list([A]) :- write(A).
  print_list([H|T]) :- write(H), write(","), print_list(T).
  ```

- ‘fail/0‘ predikátum: nem kiüthető, visszalépést kényszerít ki (mellékható törzsnél lehet érdekes)

  ```
  e(1,2). e(2,3). e(3,1). e(2,4). e(4,5). e(5,4).
  print_neighbors(X) :- e(X,Y), print(Y), fail.
  print_neighbors(X). %különben false lenne
  ```

Prolog

Amiben a Prolog többet tud, mint amit eddig láttunk:

- A Horn-klózok nem mindenre elegek – \+ egyfajta negálás
- „not provable at this point"
- akkor megy tovább, ha a predikátumra a motor falset ad

```
in_list(X,[X|L]).
in_list(X,[A|L]) :- in_list(X,L).

not_in_list(X,L) :- \+ in_list(X,L).
```

- syntax sugar: ha a törzsben egy változó nem szerepel, _ wildcard:

```
in_list(X,[X|_]).
in_list(X,[_|L]) :- in_list(X,L).
```

Prolog

Amiben a Prolog többet tud, mint amit eddig láttunk:

- Vágás: `!` a kiértékelés gyorsítására
- „ha idáig eljutsz, ezt a literált ne backtrackeld többször"

```
merge([],L,L).
merge(L,[],L).
merge([H1|T1],[H2|T2],[H2|L]) :- H1 >= H2, !, merge([H1|T1],T2 L).
merge([H1|T1],[H2|T2],[H1|L]) :- merge(T1,[H2|T2],L).

sort([],[]).
sort([A],[A]).
sort(L,S) :- split(L,L1,L2), sort(L1,S1), sort(L2,S2), merge(S1,S2,S).
```

keresés gráfban példa, ez már nem esik végtelen ciklusba

```
% input gráf
e(1,2). e(2,3). e(3,1). e(2,4). e(4,5). e(5,4).

in_list(X,[X|_]).
in_list(X,[_|L]) :- in_list(X,L).

path(X,X,[X]) :- !.
path(X,Y,[X|P]) :- search(X,Y,[X],P).

search(X,X,_,[]) :- !.
search(X,Y,Z,[W|P]) :- e(X,W), \+ in_list(W,Z), search(W,Y,[W|Z],P).
```

Másodrendű logika

Az elsőrendű logika bővitése relációváltozókkal (predikátumváltozókkal).

Formulák

Az elsőrendű logika formulaképzési szabályai plusz:

- Ha R n rangú predikátumváltozó és $t_1, \ldots, t_n$ termek, akkor $R(t_1, \ldots, t_n)$ is atomi formula.
- Ha R n rangú predikátumváltozó és F formula, akkor $\exists R\ F$ és $\forall R\ F$ is formulák.

Struktúra

$\mathcal{A} = (A, I, \varphi)$, ahol A, I mint az elsőrendű esetben, a φ értékelés pedig minden x elsőrendű változóhoz az A egy elemét, minden R n rangú predikátumváltozóhoz pedig egy $A^n \to \{0, 1\}$ predikátumot rendel.

Másodrendű logika

Legyen $\mathcal{A} = (A, I, \varphi)$ struktúra, F formula. Az $\mathcal{A} \models F$ relációt az elsőrendű esethez hasonlóan definiáljuk az alábbiak figyelembe vételével:

- $\mathcal{A} \models R(t_1, \ldots, t_n)$ akkor és csakis akkor, ha $\varphi(R)(\mathcal{A}(t_1), \ldots, \mathcal{A}(t_n)) = 1$.
- $\mathcal{A} \models \exists R\ F$ akkor és csak akkor, ha létezik olyan φ', mely legfeljebb az R-en tér el φ-től, amelyre $(A, I, \varphi') \models F$.
- $\mathcal{A} \models \forall R\ F$ akkor és csak akkor, ha bármely olyan φ' esetén, mely legfeljebb az R-en tér el φ-től, $(A, I, \varphi') \models F$.

Az, hogy $\mathcal{A} \models F$ fennáll-e, ismét független azon változók értékétől, melyek nem fordulnak elő szabadon F-ben.

Másodrendű logika – példa

- „Az univerzum végtelen"
- Math says egy halmaz akkor végtelen, ha van önmagába képző injektív, de nem szürjektív leképezése.
- A leképezés egy bináris reláció: $\exists R \ldots$
- aminek minden bal oldalhoz pontosan egy jobb oldal párosul:

$$\forall x \exists y R(x,y) \ \wedge\ \forall x \forall y_1 \forall y_2 (R(x,y_1) \wedge R(x,y_2) \to y_1 = y_2)$$

- injektív:

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall y (R(x_1,y) \wedge R(x_2,y) \to x_1 = x_2)$$

- nem szürjektív: van, aki nem áll elő képként

$$\exists y \forall x \neg R(x,y)$$

Másodrendű logika

Példa

A természetes számok szokásos struktúrája kielégíti a

$$\forall X((X(\underline{0}) \wedge \forall x(X(x) \to X(x'))) \to \forall x X(x))$$

indukciós axiómát.

A Peano-axiómák, plusz a fenti indukciós axióma (az indukciós axióma séma példányai nélkül is) modellje (izomorfizmus erejéig) kizárólag $\mathcal{N}$.

Másodrendű logika

Példa

Egy $G = (V, E)$ gráf csúcsai pontosan akkor színezhető három színnel helyesen (=szomszédos csúcsok különböző színt kapjanak), ha kielégíti a

$$\exists X \exists Y \exists Z \Big(\forall x (X(x) \vee Y(x) \vee Z(x)) \wedge \\ \forall x (\neg(X(x) \wedge Y(x)) \wedge \neg(X(x) \wedge Z(x)) \wedge \neg(Y(x) \wedge Z(x))) \wedge \\ \forall x \forall y (e(x, y) \rightarrow \neg(X(x) \wedge X(y) \vee Y(x) \wedge Y(y) \vee Z(x) \wedge Z(y))) \\ \Big)$$

mondatot.

Példa

Egy $G = (V, E)$ gráfban pont akkor van Hamilton-út (= minden csúcson pontosan egyszer áthaladó út), ha kielégíti a

$$\begin{aligned}\exists R \Big(& \forall x \neg R(x, x) \wedge \\ & \forall x \forall y (x = y \vee R(x, y) \vee R(y, x)) \wedge \\ & \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(y, z) \to R(x, z)) \wedge \\ & \forall x \forall y (R(x, y) \wedge \neg \exists z (R(x, z) \wedge R(z, y)) \to e(x, y)) \Big)\end{aligned}$$

mondatot.

Másodrendű logika

- Másodrendű logikában sokkal összetettebb állításokat lehet megfogalmazni, mint elsőrendűben.
- Viszont nincs helyes és teljes következtető rendszer.
- Toolok: Coq, Isabelle/HOL,...
- Hales 1998:
  - „Ágyúgolyó elrendezés” a legsűrűbb
  - 300 oldal matek
  - 40.000 sor programkód (gráfok generálására stb)
  - egy 150-változós függvény minimalizálása, 5.000 gömb-konfigurációra alsó korlát 100.000 LP feladattal
  - A bírálók feladták
  - Hales nem: Flyspeck projekt – teljes formalizálás (2014-re)
- Leroy 2008–2017:
  - CompCert – bizonyítottan helyes C fordító (Coq)
  - Majdnem eléri a gcc -O3 sebességét a benchmarkokon

Floyd-Hoare kalkulus

Code contractok – C + ACSL (ANSI C Spec Lang)

```c
//@ requires A>=0 && B>0;
//@ ensures \result == A mod B;
int mod(int A, int B) {
  int Q = 0;
  int R = A;
  //@ assert A>=0 && B>0 && Q==0 && R==A;
  while (R >= B) {
    //@ assert A>=0 && B>0 && R>=B && A==Q*B+R;
    R = R - B;
    Q = Q + 1;
  }
  //@ assert A>=0 && B>0 && R>=0 && R<B && A==Q*B+R;
  return R;
}
```

Code contractok – Java + ESC (Extended Static Checker)

```
public class OrderedArray {
  int a[];
  int nb;
  //@invariant nb >= 0 && nb <= 20
  //@invariant (\forall int i; (i >= 0 && i < nb-1) ==> a[i] <= a[i+1])
  public OrderedArray() { a = new int[20]; nb = 0; }
  public void add(int v) {
    if (nb >= 20) return;
    int i;
    for (i=nb; i > 0 && a[i-1] > v; i--) a[i] = a[i-1];
    a[i] = v; nb++;
  }
}
```

Code contractok – C + ACSL (ANSI C Spec Lang)

```
/*@
  requires \valid_read(a + (0..n-1));
  assigns \nothing;

  behavior some:
    assumes \exists integer i; 0 <= i < n && a[i]==val;
    ensures 0 <= \result < n;
    ensures a[\result] == val;
    ensures \forall integer i; 0 <= i < \result ==> a[i]!=val;

  behavior none:
    assumes \forall integer i; 0 <= i < n ==> a[i]!=val;
    ensures \result == n;

  complete behaviors;
  disjoint behaviors;
*/
size_type find(const value_type* a, size_type n, value_type val);
```

```
size_type find(const value_type *a, size_type n, value_type val){
  /*@
  loop invariant 0 <= i <= n;
  loop invariant \forall integer k; 0 <= k < i ==> a[k] != val;
  loop assigns i;
  loop variant n-i;
  */
  for(size_type i = 0; i < n; i++) {
    if(a[i] == val) { return i; }
  }
  return n;
}
```

Code contractok – Dafny (MS, C#)

```
function Fib( n: nat ) : nat {
  if ( n < 2 ) then n else Fib( n-1 ) + Fib( n-2 )
}
method computeFib( n: nat ) returns ( x: nat )
ensures x == Fib( n ); {
  var i:=0;
  x := 0;
  var y:=1;
  while( i < n )
  invariant 0 <= i <= n;
  invariant x == Fib( i );
  invariant y == Fib( i + 1 ); {
    x,y := y,x+y;
    i := i+1;
  }
}
```

```c
/*@
  ensures A: *a == \old(*b);
  ensures B: *b == \old(*a);
*/
void swap(int *a, int * b){
  int tmp = *a;  *a = *b;  *b = tmp;
}
```

```
> frama-c -wp swap.c swap1.h
# frama-c -wp [...]
[kernel] Parsing FRAMAC_SHARE/libc/__fc_builtin_for_normalization.i
[kernel] Parsing swap.c (with preprocessing)
[kernel] Parsing swap1.h (with preprocessing)
[wp] Running WP plugin...
[wp] Loading driver 'share/wp.driver'
[wp] Collecting axiomatic usage
[wp] warning: Missing RTE guards
[wp] 2 goals scheduled
[wp] [Alt-Ergo] Goal typed_swap_post_A : Valid
[wp] [Qed] Goal typed_swap_post_B : Valid
[wp] Proved goals:   2 / 2
     Qed:             1
     Alt-Ergo:        1
------------------------------------------------------------
Functions            WP   Alt-Ergo   Total   Success
swap                  1      1 (12)    2       100%
------------------------------------------------------------
```

```
/*@
requires \valid(a) && valid(b);
ensures A: *a == \old(*b);
ensures B: *b == \old(*a);
assigns *a, *b;
*/
void swap(int *a, int * b){
int tmp = *a;  *a = *b;  *b = tmp;
}
```

```
> frama-c -wp -wp-rte swap.c swap2.h
# frama-c -wp -wp-rte [...]
[kernel] Parsing FRAMAC_SHARE/libc/__fc_builtin_for_normalization.i
[kernel] Parsing swap.c (with preprocessing)
[kernel] Parsing swap2.h (with preprocessing)
[wp] Running WP plugin...
[wp] Loading driver 'share/wp.driver'
[wp] Collecting axiomatic usage
[rte] annotating function swap
[wp] 9 goals scheduled
[wp] [Alt-Ergo] Goal typed_swap_post_A : Valid
[wp] [Qed] Goal typed_swap_post_B : Valid
[wp] [Alt-Ergo] Goal typed_swap_assert_rte_mem_access : Valid
[wp] [Qed] Goal typed_swap_assert_rte_mem_access_2 : Valid
[wp] [Alt-Ergo] Goal typed_swap_assert_rte_mem_access_3 : Valid
[wp] [Qed] Goal typed_swap_assert_rte_mem_access_4 : Valid
[wp] [Qed] Goal typed_swap_assign_part1 : Valid
[wp] [Qed] Goal typed_swap_assign_part2 : Valid
[wp] [Qed] Goal typed_swap_assign_part3 : Valid
[wp] Proved goals:   9 / 9
    Qed:             6
    Alt-Ergo:        3
----------------------------------------------------------

Functions          WP   Alt-Ergo   Total   Success
swap                6     3 (17)    9       100%
----------------------------------------------------------
```

Floyd-Hoare kalkulus: a while programok szintaktikája

Ami a fenti verifikáló programok magját alkotja, a Floyd-Hoare kalkulus. Egy egyszerű programozási nyelvre, a while kódokra definiáljuk, de ez van kiterjesztve C-re, Java-ra stb.

Legyen adott egy elsőrendű nyelv (azaz a függvény- és relációszimbólumok egy-egy megszámlálható halmaza).

A while programok az alábbiak:

- $x := t$, ahol x változó, t term,
- $P_1; P_2$, ahol P_1, P_2 programok,
- $\mathrm{if}\ r\ \mathrm{then}\ P_1\ \mathrm{else}\ P_2$, ahol r kvantormentes formula, P_1, P_2 programok,
- $\mathrm{while}\ r\ \mathrm{do}\ P$, ahol r kvantormentes formula, P program.

Floyd-Hoare kalkulus

- Legyen P program, $\mathcal{A} = (A, I)$ egy struktúra.
- Ekkor P meghatároz az értékadások fölött egy $[[P]]$ relációt: $\varphi[[P]]\psi$ pontosan akkor, ha
  - a változók értékeit φ szerint beállítva,
  - majd futtatva P-t,
  - P futása befejeződik és ψ adja a változók végértékét.

Bármely φ-hez legfeljebb egy olyan ψ létezik, melyre $\varphi[[P]]\psi$.

Például:

- $\varphi(x) = 1, \varphi(y) = 2, \dots$
- $P \ = \ x := y + 1; y := x$
- $\phi(x) = 3, \phi(y) = 3, \dots$

akkor $\varphi[[P]]\phi$.

Floyd-Hoare kalkulus: szemantika formális definíciója

Legyen P program, $\mathcal{A}$ struktúra. Ha φ értékadás, akkor legyen $\mathcal{A}_\varphi$ az (A, I, φ) struktúra.

$\varphi[[P]]\psi$ pontosan a következő esetekben teljesül:

- $P = x := t$ és $\psi = \varphi[x \mapsto \mathcal{A}_\varphi(t)]$.
  (Azaz: ψ annyiban tér el φ-től, hogy benne x új értéke a t értéke (A, I, φ)-ben.)
- $P = P_1; P_2$ és van olyan τ értékadás, melyre $\varphi[[P_1]]\tau$ és $\tau[[P_2]]\psi$.
  (Azaz: ha φ-n indítva P_1 lefut, a változók értéke ekkor τ, majd ekkor indítva P_2-t az is lefut és a változók értéke ψ lesz.)
- $P = \text{if } r \text{ then } P_1 \text{ else } P_2$ és

$$\begin{array}{lll} \varphi[[P_1]]\psi & \text{és} & \mathcal{A}_\varphi(r) = 1 \quad \text{, vagy} \\ \varphi[[P_2]]\psi & \text{és} & \mathcal{A}_\varphi(r) = 0. \end{array}$$

  (azaz: vagy r igaz és P_1 készít φ-ből ψ-t, vagy r hamis és P_2 készít φ-ből ψ-t.)

Floyd-Hoare kalkulus: szemantika formális definíciója

- $P = \textcolor{red}{\text{while } r \text{ do } P_1}$ és vannak olyan $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n$ értékadások, $n \geq 0$ (note: n-szer fut le a ciklus), hogy
  - $\tau_0 = \varphi$: kezdetben a változók értéke φ
  - $\tau_n = \psi$: kilépéskor a változók értéke ψ
  - minden $i = 0, \ldots, n-1$-re $\mathcal{A}_{\tau_i}(r) = 1$: ezért hajtódik végre a ciklusmag n-szer
  - $\mathcal{A}_{\tau_n}(r) = 0$: ezért lép ki a ciklus az n. iteráció után
  - minden $i = 0, \ldots, n-1$-re $\tau_i[[P_1]]\tau_{i+1}$: a ciklusmag egyszeri lefutása τ_i-ből τ_{i+1}-et készít

Floyd-Hoare kalkulus

Parciális helyességi kifejezések az

$$\{F\}P\{G\}$$

alakú hármasok, ahol P program, F és G elsőrendű formulák.

Azt mondjuk, hogy az $\{F\}P\{G\}$ parciális helyességi kifejezés teljesül (vagy érvényes) az $\mathcal{A} = (A, I)$ struktúrában, vagy $\mathcal{A}$ kielégíti az $\{F\}P\{G\}$ parciális helyességi kifejezést, jelben $\mathcal{A} \models \{F\}P\{G\}$, ha valahányszor φ, ψ olyan értékelések, hogy

$$(A, I, \varphi) \models F \text{ és } \varphi[[P]]\psi,$$

fennáll, hogy

$$(A, I, \psi) \models G.$$

Floyd-Hoare kalkulus

Példa

$$P = y := 1; \text{while } x > 0 \text{ do } (y := y \times x;\ x := x - 1)$$

Ekkor a standard struktúrában:

$$\begin{aligned} \varphi[[P]]\psi \quad \Leftrightarrow \quad & \big((\varphi(x) < 0,\ \psi(x) = \varphi(x), \psi(y) = 1) \\ & \vee(\varphi(x) \geq 0,\ \psi(x) = 0,\ \psi(y) = x!)\big) \\ & \wedge(\varphi(z) = \psi(z),\ z \notin \{x, y\}) \end{aligned}$$

Az előző P programra és az egész számok standard $\mathcal{A}$ struktúrájára:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \quad & \models \quad \{x = z \wedge x \geq 0\}P\{y = z! \wedge x = 0\} \\ \mathcal{A} \quad & \models \quad \{x = z\}P\{y = z! \vee y = 1\} \end{aligned}$$

Floyd-Hoare kalkulus

Példa

Az egész számok szokásos struktúrájában érvényes:

$$
\begin{aligned}
&\{a \geq 0\} \\
&x := 0; \\
&y := 1; \\
&\text{while } y \leq a \text{ do} \\
&\quad x := x + 1;\ y := y + 2x + 1 \\
&\{0 \leq x^2 \leq a < (x+1)^2\}
\end{aligned}
$$

Floyd-Hoare kalkulus

Példa

$$P' = \text{while } x \neq 100 \text{ do } x := x + 2$$

Ekkor a standard struktúrában érvényesek:

$$\{x = z\}P'\{x = 100\}, \quad \{\uparrow\}P'\{x = 100\}$$

Totális helyességi kifejezésnek nevezünk egy

$$[F]P[G]$$

hármast, ahol P program, F, G formulák.
Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{A} = (A, I)$ struktúra kielégíti az $[F]P[G]$ totális helyességi kifejezést, ha tetszőleges olyan φ értékelésre, melyre $\mathcal{A}_\varphi \models F$, létezik olyan (egyértelműen meghatározott) ψ értékelés, hogy $\varphi[[P]]\psi$ és $\mathcal{A}_\psi \models G$.
Jelölés: $\mathcal{A} \models [F]P[G]$.

Tehát a totális helyességi kifejezés megköveteli azt is, hogy P megálljon, ha olyan inputon futtatjuk, melyre F igaz.

Floyd-Hoare kalkulus

Példa

Az előző P, P' programokra és az $\mathcal{A}$ standard struktúrára:

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{A} & \models & [x = z \wedge x \geq 0]P[y = z!] \\ \mathcal{A} & \not\models & [\uparrow]P'[x = 100] \\ \mathcal{A} & \models & [x \leq 100 \wedge (\exists u\ x = 2u)]P'[x = 100] \end{array}$$

Floyd-Hoare kalkulus

Megjegyzés

$\mathcal{A} \models [F]P[\uparrow]$ akkor és csakis akkor teljesül, ha P megáll minden olyan φ esetén, amelyre $\mathcal{A}_\varphi \models F$. Jelölés: $[F]P \searrow$.
Tehát $\mathcal{A} \models [F]P[G]$ akkor és csak akkor, ha $\mathcal{A} \models \{F\}P\{G\}$ és $\mathcal{A} \models [F]P \searrow$.

Floyd-Hoare kalkulus

A Hoare-féle szabályok

- Értékadás

$$\frac{}{\{F[x/t]\}x := t\{F\}}$$

- Kompozíció

$$\frac{\{F\}P_1\{H\} \quad \{H\}P_2\{G\}}{\{F\}P_1; P_2\{G\}}$$

- Feltételes utasítás

$$\frac{\{F \wedge r\}P_1\{G\} \quad \{F \wedge \neg r\}P_2\{G\}}{\{F\}\text{if } r \text{ then } P_1 \text{ else } P_2\{G\}}$$

Floyd-Hoare kalkulus

A Hoare-féle szabályok, folytatás

- Ciklus

$$\frac{\{F \wedge r\}P\{F\}}{\{F\}\text{while } r \text{ do } P\{F \wedge \neg r\}}$$

- Monotonitás Tegyük fel, hogy $\forall(F \to F')$ és $\forall(G' \to G)$ az $\mathcal{A}$ elsőrendű elméletében vannak. Akkor:

$$\frac{\{F'\}P\{G'\}}{\{F\}P\{G\}}$$

Floyd-Hoare kalkulus

Legyen $\mathcal{A}$ elsőrendű struktúra. Azt mondjuk, hogy az $\{F\}P\{G\}$ parciális helyességi kifejezés levezethető (vagy bizonyítható) $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$-ból,

$$\mathrm{Th}(\mathcal{A}) \vdash \{F\}P\{G\},$$

ha létezik a parciális helyességi kifejezések olyan

$$E_0, E_1, \ldots, E_n$$

sorozata, hogy $E_n = \{F\}P\{G\}$ és minden $i > 0$-ra E_i a fenti szabályok valamelyikével áll elő az $E_0, E_1, \ldots, E_{i-1}$ kifejezésekből és a $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ formulahalmazból.

Levezetés példa

Példa

Az egész számok szokásos struktúrájában érvényes:

$$
\begin{aligned}
&\{a \geq 0\}\\
&x := 0;\\
&y := 1;\\
&\text{while } y \leq a \text{ do}\\
&\quad x := x + 1;\ y := y + 2x + 1\\
&\{0 \leq x^2 \leq a < (x+1)^2\}
\end{aligned}
$$

Ehhez pár lépés (értékadás, kompozíció):

$$
\begin{gathered}
(x+1)^2 \leq a \ \wedge\ y + 2(x+1) + 1 = (x+1+1)^2\\
x \ := \ x + 1\\
x^2 \leq a \ \wedge\ y + 2x + 1 = (x+1)^2\\
y \ := \ y + 2x + 1\\
x^2 \leq a \ \wedge\ y = (x+1)^2
\end{gathered}
$$

Levezetés példa

Mivel az egész számokra igaz ez (Peano axiómákból is kijön!):

$$x^2 \le a \ \wedge \ y = (x+1)^2 \ \wedge \ y \le a$$
$$\Downarrow$$
$$(x+1)^2 \le a \ \wedge \ y + 2(x+1) + 1 = (x+1+1)^2$$

Ezért a monotonitás szabály szerint:

$$x^2 \le a \ \wedge \ y = (x+1)^2 \ \wedge \ y \le a$$
$$x \ := \ x+1$$
$$y \ := \ y+2x+1$$
$$x^2 \le a \ \wedge \ y = (x+1)^2$$

Levezetés példa

Most a ciklus szabályt alkalmazzuk:

$$
\begin{array}{l}
x^2 \leq a \ \wedge \ y = (x+1)^2 \\
\text{while } y \leq a \text{ do} \\
\qquad x \ := \ x+1 \\
\qquad y \ := \ y+2x+1 \\
x^2 \leq a \ \wedge \ y = (x+1)^2 \ \wedge \ \neg(y \leq a)
\end{array}
$$

Monotonitás:

$$
\begin{array}{l}
0 \leq a \ \wedge \ y = 1 \ \wedge \ x = 0 \\
\text{while } y \leq a \text{ do} \\
\qquad x \ := \ x+1 \\
\qquad y \ := \ y+2x+1 \\
x^2 \leq a \ \wedge \ y = (x+1)^2 \ \wedge \ a < (x+1)^2
\end{array}
$$

Levezetés példa

$$
\begin{aligned}
&0 \leq a \;\wedge\; 1 = 1 \;\wedge\; 0 = 0\\
&x \;:=\; 0\\
&0 \leq a \;\wedge\; 1 = 1 \;\wedge\; x = 0\\
&y \;:=\; 1\\
&0 \leq a \;\wedge\; y = 1 \;\wedge\; x = 0\\
&\text{while } y \leq a \text{ do}\\
&\qquad\quad x \;:=\; x + 1\\
&\qquad\quad y \;:=\; y + 2x + 1\\
&x^2 \leq a \;\wedge\; y = (x+1)^2 \;\wedge\; a < (x+1)^2
\end{aligned}
$$

Monotonitás:

$$
\begin{aligned}
&0 \leq a\\
&x \;:=\; 0;\; y \;:=\; 1\\
&\text{while } y \leq a \text{ do}\\
&\qquad\quad x \;:=\; x + 1\\
&\qquad\quad y \;:=\; y + 2x + 1\\
&x^2 \leq a \;\wedge\; y = (x+1)^2 \;\wedge\; a < (x+1)^2
\end{aligned}
$$

Floyd-Hoare kalkulus

Tétel

Ha $\mathrm{Th}(\mathcal{A}) \vdash \{F\}P\{G\}$, akkor $\mathcal{A} \models \{F\}P\{G\}$.

A tétel megfordítása általában nem igaz, de érvényes az ún. expresszív struktúrákra, azaz azon $\mathcal{A} = (A, I)$ struktúrákra, amelyekre igaz a következő: Tetszőleges P programhoz és G formulához létezik olyan F formula, hogy bármely φ értékelésre $\mathcal{A}_\varphi \models F$ akkor és csak akkor, ha $[[P]]$ nem értelmezett φ-n, vagy ha értelmezett, akkor arra a ψ-re, melyre $\varphi[[P]]\psi$, teljesül, hogy $\mathcal{A}_\psi \models G$.
Pl. az egész számok (vagy a természetes számok) standard struktúrája expresszív.

Tétel (Cook)

Ha $\mathcal{A}$ expresszív, akkor $\mathcal{A} \models \{F\}P\{G\}$ esetén $\mathrm{Th}(\mathcal{A}) \vdash \{F\}P\{G\}$.

Floyd-Hoare kalkulus

A totális helyesség szabályai

A ciklus szabály kivételével hasonlóak a parciális helyesség szabályaihoz.

Az új ciklus szabály: tegyük fel, hogy az $\mathcal{A} = (A, I)$ struktúrában $I(<)$ egy jól megalapozott részbenrendezés. Ekkor:

$$\frac{[F \wedge r \wedge t = z_0]P[F \wedge t < z_0]}{[F]\text{while } r \text{ do } P[F \wedge \neg r]},$$

ahol z_0 máshol nem fordul elő.