Mesterséges intelligencia I. gyakorló feladatok

Szörényi Balázs

2009. november 26.

1. Feladatok

1. (Korongrendezés)
   Add meg az alábbi probléma állapottér-reprezentációját!

   Adott $n \in \mathbb{N}$ és $k \leq n^2$, valamint k darab 1 átmérőjű korong a $[0, n+1] \times [0, n+1]$ négyzeten $q_1, \ldots, q_k$ középpontokkal úgy, hogy azok nem lógnak egymásra, és nem lógnak túl. Egy lépésben egy korongot emelhetünk fel és tehetünk át egy másik helyre, de csak úgy, hogy lerakás után is fennálljon a fenti tulajdonság. Célunk a mozgatások össztávolságát minimalizálva úgy átrendezni a korongokat, hogy végül mindnek rácsponton legyen a középpontja.

2. (Szétszóródott Hanoi-tornyok)
   Add meg az alábbi probléma állapottér-reprezentációját!

   Adott egy gráf, melynek csúcsaiba 1-1 tányér van lerakva. A tányérok tömege (dkg-ban megadva) 1 és k közötti egész szám, és tudjuk, hogy mindenféle tányér előfordul legalább egyszer. Egy tányért csak akkor tudunk felvenni, ha nagyobb tányér még nincs nálunk. Célunk a v_o csúcsból elindulva k darab különböző súlyú tányér összegyűjtése a lehető legkisebb összmunkával, ahol egy élen átjutni $w_1, \ldots, w_t$ súlyú tányérokkal a kezünkben $w_1 + \ldots + w_t$-vel arányos munkavégzéssel jár.

3. (Doboz világ)

   (a) **Add meg az alábbi probléma állapottér-reprezentációját!**
   Adott négy raklap, azokon pedig különböző színű dobozok egymás

tetejére rakva a következőképpen:

$$\begin{array}{cccc} & k & k & \\ & z & z & z \\ p & p & z & p \\ \text{—} & \text{—} & \text{—} & \text{—} \end{array}$$

A betűk a ládák színét jelentik (p: piros, k: kék, z: zöld). Egy lépésben egy dobozt lehet átrakni egy oszlop tetejéről egy másik oszlop tetejére. A cél: minél kevesebb lépésből elérni, hogy egy-egy oszlop csak azonos színű dobozokból álljon.

(b) Adj minél jobb megengedhető (nem-konstans!) heurisztikát a fenti problémához!

4. (Intervallumfedés)
Add meg az alábbi probléma állapottér-reprezentációját!

Adott $I_1, \ldots, I_n \subseteq [0, 1]$ intervallumokból szeretnénk összeállítani egy gyűjteményt úgy, hogy az (eredetileg üres) gyűjteményünket egyszerre mindig csak eggyel bővítjük, és a mindenkori gyűjtemény elemei diszjunktak. Célunk végül a [0,1] intervallum lehető legteljesebb fedésének megkeresése. (1 pont)

5. (Dámajáték)

(a) **Add meg az alábbi probléma állapottér-reprezentációját!** Adott egy 5×5-ös sakktábla, rajta három piros bábuval a legalsó sor első, harmadik és ötödik pozícióján (mindhárom fehér mező). Egy lépésben a következők valamelyikét csinálhatjuk:

- valamely bábut átrakjuk egy vele szomszédos (sarokkal érintkező) üres fehér mezőre, vagy
- valamely bábut a szomszédos bábut átugorva az azutáni üres fehér mezőre rakjuk.

Szeretnénk a bábukat minél kevesebb lépésből eljuttatni a felső sorba.

(b) **Ezen problémán futtatva mi a mélységi, illetve a széltében keresés által meglátogatott első 7 állapot?**

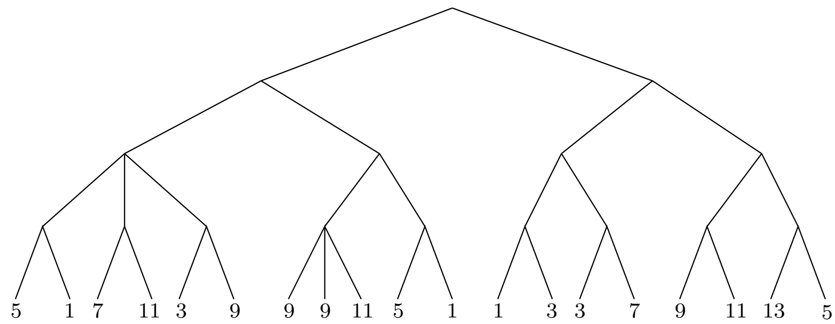
(c) **Adj minél jobb megengedhető (nem-konstans!) heurisztikát a fenti problémához!** (Azaz olyat, mely minden állásban *alsó* becslést ad a célállapot eléréséhez szükséges lépések számára.)

6. (Boltos)
   Add meg az alábbi probléma állapottér-reprezentációját!
   A helyi hipermarketben $s_1, \ldots, s_k$ címletű bankjegyeket fogadnak el, de visszaadni nem tudnak — tehát vagy pontosan fizetünk, vagy elveszítjük a visszajárót. (Így ha például $s_1 = 9$, $s_2 = 10$, és $k = 2$, akkor ha $x = 5$ összegben vásarolunk, 4-et mindenképpen bukunk az üzleten.) Boltba indulás előtt éppen ezért mindig gondosan feltöltjük a pénztárcánkat végtelen sok bankjeggyel minden címletből, hogy bármilyen értékben is vásárolunk, ahhoz minél közelebbi összeggel tudjunk fizetni. **Az A^* algoritmus segítségével keresd meg, hogy $k = 3$, $s_1 = 27$, $s_2 = 34$, és $s_3 = 63$ esetén egy $x = 127$ végösszegű számlát hogyan tudunk a legkisebb ráfizetéssel kiegyenlíteni!** Az alkalmazott heurisztika legyen nemkonstans, explicit és általánosan (azaz bármely k illetve $s_1, \ldots, s_k$ esetén) használható.

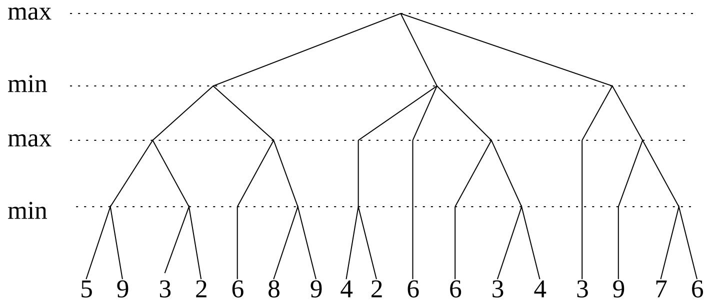
7. Adj meg egy módszert, mellyel egy h_1 nem-monoton megengedhető heurisztikából egy $h_2 \geq h_1$ monoton megengedhető heurisztikát lehet előállítani!

8. Hajtsd végre a Min-Max algoritmust a lenti fán, alkalmazva az $\alpha - \beta$ vágásokat ahol lehet!

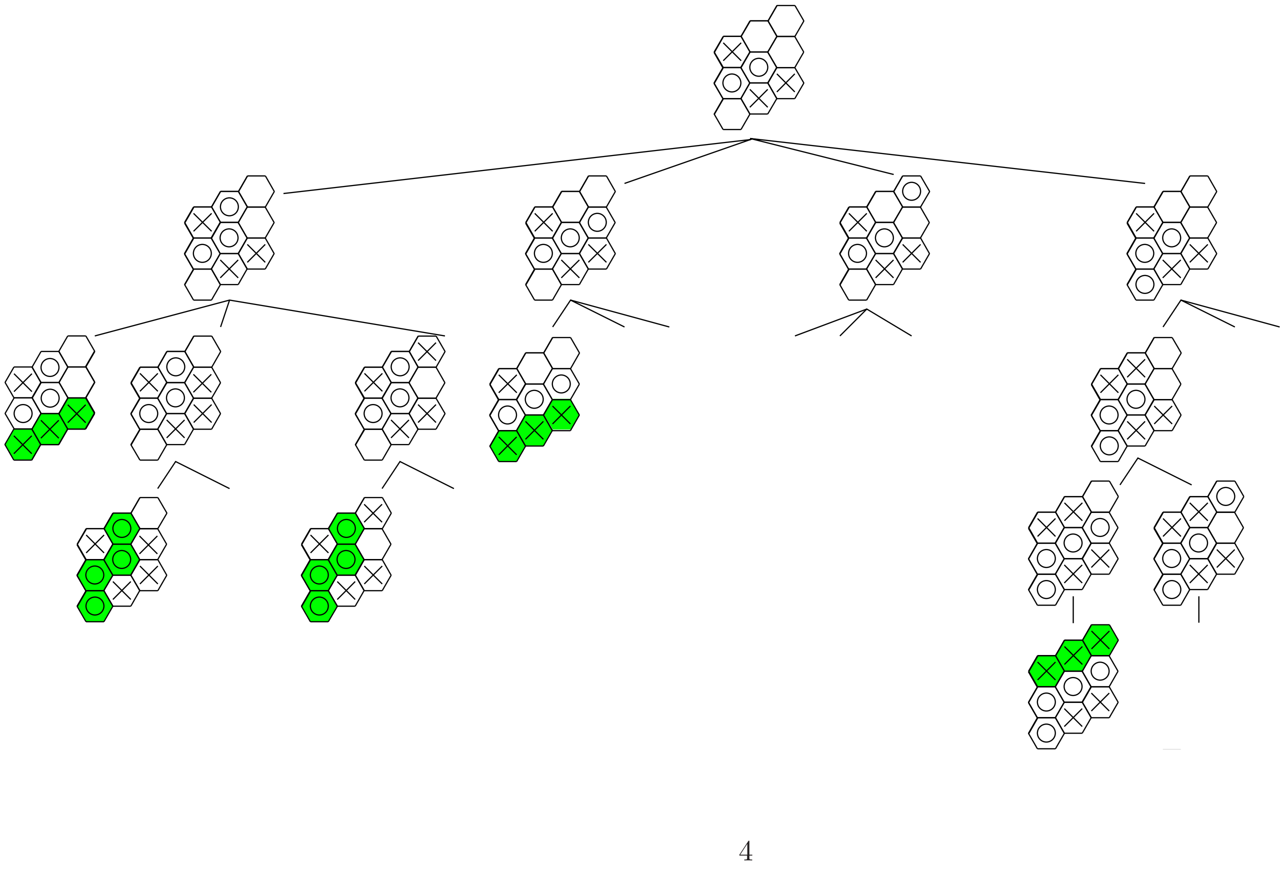
   a)



b)



9. Egészítsd ki a módosított hex lenti ábrán látható játékfáját, ahol a módosítás annyi, hogy a győztes a vesztestől annyi \$-t kap, *amilyen hosszú a legrövidebb út* az általa kiépített hídon. ($\times$ feladata a két oldalsó, $\circ$ feladata a felső és az alsó szélek összekötése.) Ahol alkalmazható α- vagy β-vágás, ott **a levágott részfákat ne dolgozd ki**, csak a vágást jelöld!



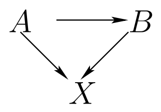
10. Egy használtautó kereskedés eddig 7 autót adott el. Az alábbi táblázat foglalja össze az eladott autókra vonatkozó adatokat.

könnyű eladni	5 évnél fiatalabb	japán vagy német	szín	rádió van-e
$-$	< 5	j	p	~~r~~
$+$	≥ 5	n	p	~~r~~
$-$	< 5	j	f	r
$+$	< 5	j	s	r
$+$	< 5	n	f	r
$-$	≥ 5	n	p	~~r~~
$+$	≥ 5	j	f	r

Az első autó tehát egy 5 évnél fiatalabb, japán gyártmányú, rádió nélküli, piros autó volt, melyet nem volt könnyű eladni. A naív Bayes módszert alkalmazva döntsük el, hogy egy 5 évnél fiatalabb, japán gyártmányú, piros színű, rádióval rendelkező (azaz ($<$ 5,j,p,r) tulajdonságvektorú) autót vajon könnyű lenne-e eladni!

11. (Szerencsejáték)
Egy adott játékban a játék kimenetelére (X) fogadhatunk egy dollárban. X a játék két paraméterétől, A-tól és B-től a lenti Bayes-hálóban megadott módon függ. (X, A és B a 0 és 1 értéketeket vehetik fel.) A játék során először választanunk kell a két paraméter közül egyet, annak értékét megmondja nekünk a játékmester, majd ezek után meg kell tippelnünk X értékét. Ha eltaláltuk, nyerünk 1 dollárt, ha nem, veszítünk egyet. Mely paraméter választásával maximalizáljuk nyereményünk várható értékét, és mennyi lesz ez az érték?

$\mathbb{P}(A = 0) = 0,7$



a	$\mathbb{P}(B = 0 \mid A = a)$
0	0,4
1	0,1

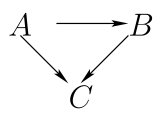
a	b	$\mathbb{P}(X{=}0 \mid A{=}a, B{=}b)$
0	0	0,6
0	1	0,2
1	0	0,5
1	1	0,6

12. (a) Melyik érték a nagyobb lenti Bayes-hálóval megadott modellben: $\mathbb{P}(A = 1|C = 0)$ vagy $\mathbb{P}(C = 0|A = 1)$? Állítását indokolja!

    (b) Számítsa ki, hogy a lenti Bayes-hálóval megadott modellben mekkora annak a valószínűsége, hogy A és C értéke különböző feltéve, hogy B az 1 értéket veszi fel! (És ha az $A \cdot B = 0$ feltételt szabjuk meg?)

    (c) Számítsa ki, hogy a lenti Bayes-hálóval megadott modellben mekkora annak a valószínűsége, hogy C a 0 értéket veszi fel, feltéve, hogy a három változó értékének összege páros!

$\mathbb{P}(A = 0) = 0,7$

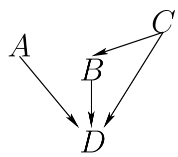


a	$\mathbb{P}(B = 0 \mid A = a)$
0	0,1
1	0,6

a	b	$\mathbb{P}(C{=}0 \mid A{=}a, B{=}b)$
0	0	0
0	1	0,7
1	0	0,3
1	1	0,5

13. A lenti Bayes-hálóban az A és a B véletlen változók függetlenek. Fennáll-e azonban a $\{D = i\}$ eseményre kondícionált feltételes függetlenségük is? Állításod indokold a $\mathbb{P}(A = i, B = h|D = i)$ illetve a $\mathbb{P}(A = i|D = i) \cdot \mathbb{P}(B = h|D = i)$ értékek kiszámításával!

$\mathbb{P}(A = i) = 0,8$



$\mathbb{P}(C = i) = 0,6$

x	$\mathbb{P}(B = i \mid C = x)$
i	0,7
h	0,5

x	y	z	$\mathbb{P}(D{=}\mathrm{i} \mid A{=}x, B{=}y\ C{=}z)$
i	i	i	0,1
i	i	h	0
i	h	i	0
i	h	h	0,4
h	i	i	0
h	i	h	0
h	h	i	0,7
h	h	h	0

14. Mutasd meg rezolúciót alkalmazva, hogy az $(x \vee \overline{y}), (y \vee \overline{z}), (z \vee \overline{x})$ és $(x \vee y \vee z)$ formuláknak logikai következménye $x \wedge y \wedge z$!

15. Rezolúciót alkalmazva mutasd meg, hogy ha igaz $(u \vee \overline{z})$, $(v \vee \overline{z})$, $(v \vee \overline{w})$, $(\overline{u} \vee \overline{v})$ és $(\overline{v} \vee z)$, akkor igaz lesz $\overline{w} \wedge \overline{z}$ is!

16. A Quine algoritmus segítségével mutasd meg, hogy $(w \wedge z) \vee (v \wedge \overline{w})$ nem logikai következménye a $(w \vee z) \wedge (\overline{u} \vee z) \wedge (u \vee v)$ formulának!

2. Megoldások

1. Jelölje $d(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ az Euklideszi távolságot.

$$\begin{aligned}
S &:= \left\{(p_1,\ldots,p_k) : p_1,\ldots,p_k \in \left[\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}\right]^2 \ \& \ i \neq j \Rightarrow d(p_i,p_j) \geq 1\right\},\\
s &:= (q_1,\ldots,q_k),\\
C &:= \left\{(p_1,\ldots,p_k) \in S : p_i \in \mathbb{N}^2\right\},\\
\mathrm{Op} &:= \{(P,Q) : P,Q \in S \ \& \ P \vdash Q\},
\end{aligned}$$

ahol $P = (p_1,\ldots,p_k) \in S$ és $Q = (q_1,\ldots,q_k) \in S$ esetén $P \vdash Q$ akkor és csakis akkor, ha van olyan $i \in \{1,\ldots,k\}$, hogy $p_j = q_j$, $j = 1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k$. Ezen P, Q pár esetén az átmenet költsége

$$\mathrm{KTG}(P,Q) := d(p_i,q_i).$$

2. Legyen a feladatban adott gráf (V,E), és legyen $\ell : V \to \{1,\ldots,k\}$ az a függvény, melynek értéke egy $v \in V$ pontban megadja a csúcsban lévő tányér súlyát.

$$\begin{aligned}
S &:= V \times \{0,\ldots,k\},\\
s &:= (v_0, k+1),\\
C &:= V \times \{1\},\\
\mathrm{Op} &:= \{(a,b) \in S \times S : a \vdash b\},
\end{aligned}$$

ahol $a = (v,i) \vdash b = (u,j)$ akkor és csakis akkor, ha $(v,u) \in E$, és $i = j$ vagy $i+1 = j = \ell(v)$. Végül

$$\mathrm{KTG}\big((v,i),(u,j)\big) := j(j+1)/2.$$

3. (a) Legyen $\Sigma = \{p,k,z\}$, és jelölje λ az üres szót. Jelölje továbbá szimbólumok egy tetszőleges Q (véges) halmaza esetén Q^* a Q elemeiből képezhető összes véges hosszúságú szó halmazát.

$$\begin{aligned}
S &:= \{(w_1,w_2,w_3,w_4) : w_i \in \Sigma^*\},\\
s &:= \lambda,\\
C &:= \left\{(w_1,w_2,w_3,w_4) : w_i \in \{p\}^* \cup \{k\}^* \cup \{z\}^*\right\},\\
\mathrm{Op} &:= \{(w,u) \in S \times S : w \vdash u\},
\end{aligned}$$

ahol $(w_1, w_2, w_3, w_4) \vdash (u_1, u_2, u_3, u_4)$, ha van olyan $1 \le i, j \le 4$, illetve $\alpha \in \{p, k, z\}$, hogy

- $w_i = u_i\alpha$
- $w_j\alpha = u_j$
- $w_k = u_k$, $k \in \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{i, j\}$.

Végül pedig
$$\mathrm{KTG} \equiv 1.$$

(b) $h'\Big((w_1, w_2, w_3, w_4)\Big) = \sum_{i=1}^{4} \mathcal{I}(w_i)$, ahol $\mathcal{I}(w)$ azt mutatja meg, hogy w jobb oldalától milyen messze van a legtávolabbi olyan elem, ami különbözik jobb oldali szomszédjától. Ha nincs ilyen elem, akkor $\mathcal{I}(w)$ értéke legyen 0.

4. (a) megoldás.
$$\begin{aligned} S =& \quad \{-1, 0, 1\}^n, \\ s =& \quad (0, 0, \dots, 0), \\ C =& \quad \{-1, 1\}^n, \\ Op =& \quad \{(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in S^2 : \mathbf{a} \vdash \mathbf{b}\}, \end{aligned}$$

ahol $\mathbf{a}(\in S) \vdash \mathbf{b}(\in S)$, ha valamely $1 \le i \le n$ esetén

- $a_i = 0 \ne b_i$,
- $a_j = b_j$, $j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$,
- $a_j = 1$ esetén $I_j \cap I_i = \emptyset$, $j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$.

Ekkor
$$\mathrm{KTG}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{cases} 1 - |I_i|, & \text{ha } b_i = 1, \\ 1, & \text{ha } b_i = -1. \end{cases}$$

(Megj.: egy i komponens -1 értéke azt jelenti, hogy I_i-t kizártuk a gyűjteményből, az 1 azt, hogy beválasztottuk, a 0 pedig, hogy még nem döntöttünk felőle.)

(b) megoldás (a lényegesebb különbségeket kiemelve).
$$S = \bigcup_{k=0}^{n} \{0, 1\}^k$$

(azzal a megállapodással, hogy $\{0, 1\}^0 = \{()\}$),
$$\begin{aligned} s =& \quad (), \\ C =& \quad \{0, 1\}^n, \end{aligned}$$

$(a_1,\ldots,a_k)(\in S) \vdash (a_1,\ldots,a_k,a_{k+1})(\in S)$, $0 \le k \le n-1$, ha $a_{k+1} = 1$ esetén $I_j \cap I_{k+1} = \emptyset$, $j = 1,\ldots,k$.
(Megj.: egy i komponens 0 értéke azt jelenti, hogy I_i-t kizártuk a gyűjteményből, az 1 azt, hogy beválasztottuk.)

(c) megoldás (a lényegesebb különbségeket kiemelve).

$S = \{0,1\}^n$,
$C = S$,
KTG: $-1\cdot$(”az aktuálisan beválasztott intervallum hossza”).

5.

6. (a) megoldás.
Tegyük fel az általánosság megszorítása nélkül, hogy $s_1 < s_2 < \cdots < s_k$.

$$\begin{aligned}
S =& \quad \{0,1,\ldots,x+s_k-2,x+s_k-1\},\\
s =& \quad 0,\\
C =& \quad \{x,x+1,\ldots,x+s_k-2,x+s_k-1k\},\\
Op =& \quad \{(a,a+s_i) : a \in S, 1 \le i \le k, a < x\},\\
\text{KTG}(a,a+s_i) =& \quad \begin{cases} 0, & \text{ha } a \le x,\\ s_i & \text{egyébként.}\end{cases}
\end{aligned}$$

A h' heurisztikához először számítsuk ki, mely legfeljebb $3 \cdot s_1$ nagyságú összegeket lehetséges kifizetni a rendelkezésünkre álló címletek segítségével. Legyen L az ezen értékeből álló halmaz. h'-t ezek után a következőképpen definiáljuk egy $a \in S$ állapot esetén: ha $a \le x - 3s_i$ vagy $a > x$, akkor $h'(a) = 0$, egyébként pedig $h'(a)$ az $\{a + \ell - x : \ell \in L\} = \{a - (x - \ell) : \ell \in L\}$ halmaz nemnegatív elemeinek maximuma.
Esetünkben $L = \{0, 27, 34, 54, 61, 63, 68, 81\}$, így $\{(x - \ell) : \ell \in L\} = \{127, 100, 93, 73, 66, 64, 59, 46\}$, ezért

$$h'(a) = \begin{cases}
0, & \text{ha } a < 46,\\
a-46, & \text{ha } 46 \le a < 59,\\
a-59, & \text{ha } 59 \le a < 64,\\
a-64, & \text{ha } 64 \le a < 66,\\
a-66, & \text{ha } 66 \le a < 73,\\
a-73, & \text{ha } 73 \le a < 93,\\
a-93, & \text{ha } 93 \le a < 100,\\
a-100, & \text{ha } 100 \le a < 127,\\
0, & \text{ha } 127 \le a.
\end{cases}$$

(Megj.: könnyen látható, hogy minden $a \in S$ esetén a $g'(a)$ és a $h'(a)$ közül az egyik 0 lesz.)

(b) megoldás.
Tegyük fel az általánosság megszorítása nélkül, hogy $s_1 < s_2 < \cdots < s_k$.

$$\begin{aligned} S = & \quad \{-s_k+1, -s_k+2, \ldots, x-1, x\} \times \{1, \ldots, k\}, \\ s = & \quad (x, k), \\ C = & \quad \{-s_k+1, -s_k+2, \ldots, -1, 0\} \times \{1, \ldots, k\}, \\ Op = & \quad \{(a, b) \in S^2 : a \vdash b\}, \end{aligned}$$

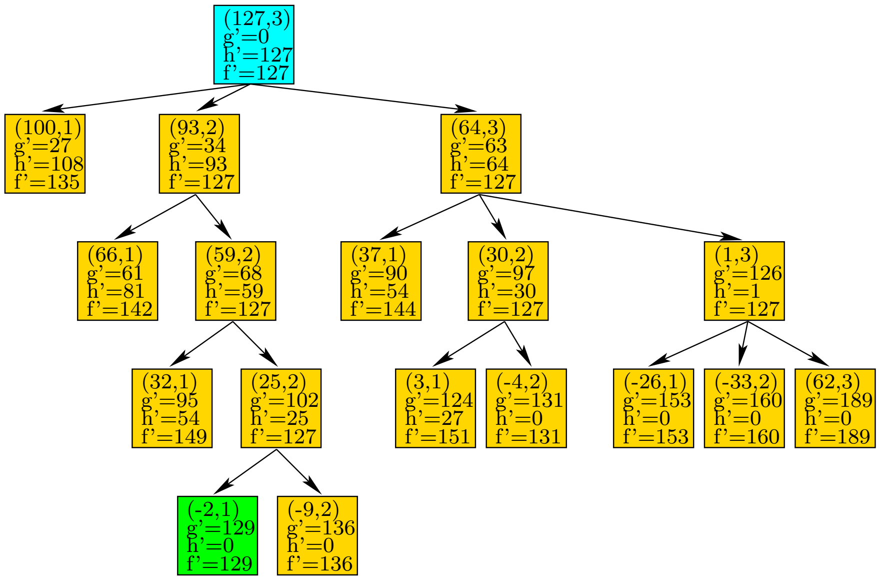
ahol $(U, i)(\in S) \vdash (V, j)(\in S)$ pontosan akkor, ha $U > 0$, $i \geq j$, és $V = U - s_j$. Ezen átmenet költsége pedig

$$\mathrm{KTG}\Big((U, i), (V, j)\Big) = s_j.$$

Legyen ezek után $P_i = \{s_1, \ldots, s_i\}$ és $m_i = \textsc{lnko}(P_i)$, $i = 1, \ldots, k$. ($\textsc{lnko}(P_i)$ értéke a P_i halmaz elemeinek a legnagyobb közös osztója. Ez hatékonyan számítható egyrészt az Euklideszi algoritmus, másrészt az $\textsc{lnko}(P_i) = \textsc{lnko}(\{s_i, m_{i-1}\})$ rekurzív összefüggés segítségével.) Ezek után tetszőleges $(U, i) \in S$ esetén legyen

$$h'(U, i) = \begin{cases} 0, & \text{ha } U \leq 0 \\ m_i \left\lceil \frac{U}{m_i} \right\rceil & \text{egyébkent.} \end{cases}$$

Ekkor h' megengedhető heurisztika, az A* algoritmus futása pedig ezen heurisztikával a lenti ábrán követhető.



7. A monotonitási feltétel akkor sérül, ha az állapotgráf valamely (a, b) élére nem teljesül a

$$h_1(b) + \mathrm{KTG}(a, b) \geq h_1(a) \tag{1}$$

összefüggés. h_2-re tehát a legkézenfekvőbb megoldás

$$h_2 = \inf\{h' : h' \text{ megengedhető, monoton és } h' \geq h_1\} \tag{2}$$

lenne. Amennyiben az állapotgráfunk kezelhető méretű, ez ki is számítható a következő módon. Legyen $h_{2,0} = h_1$, és legyen

$$h_{2,i+1}(b) = \begin{cases} h_{2,i}(b), \text{ ha bármely } b \in S \text{ és } (a,b) \in \mathrm{Op} \text{ esetén} \\ \qquad\qquad h_{2,i}(a) - \mathrm{KTG}(a,b) \leq h_{2,i}(b)) \\ \max\{h_{2,i}(a) - \mathrm{KTG}(a,b)\} \text{ egyébként,} \end{cases}$$

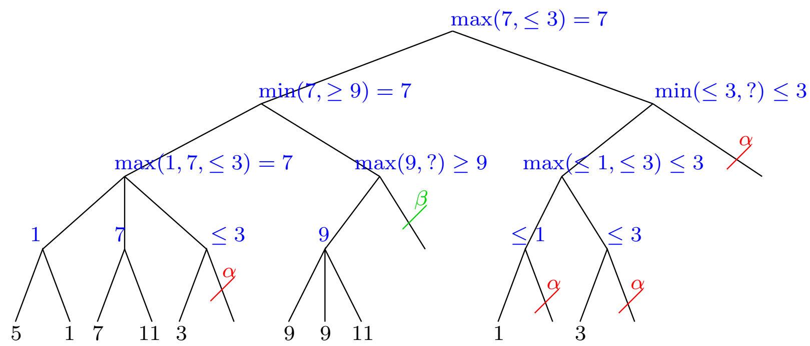
$b \in S$, $i = 1, 2, \ldots$ [1] Megmutatható, hogy $i = |S|$ esetén $h_{2,i}$ már monoton lesz [2] — így az algoritmus az állapotgráf méretében legfeljebb négyzetes időigényű.

[1] Azaz első lépésben definiálunk egy $h_{2,1}$ heurisztikát, amely megegyezik h_1-gyel minden olyan b ponton, amely minden $(a, b) \in \mathrm{Op}$ esetén teljesíti az (1) összefüggést, a többi b esetén pedig $h_{2,1}(b)$ értéke $h_1(a) - \mathrm{KTG}(a, b)$ — illetve az ilyenek közül a legnagyobb. Második lépésben megismételjük ugyanezt, de most h_1 helyett $h_{2,1}$-et, $h_{2,1}$ helyett pedig $h_{2,2}$-t használva — és így tovább.

[2] A bizonyítás vázlatosan a következő. Nyilvánvaló, hogy $h_{2,i} \leq h_{2,i+1} \leq h$, $i =$

Amennyiben azonban a gráf túl nagy, a fenti módszer nem valósítható meg. Ebben az esetben elfogadható megoldás lehet, hogy a teret megfelelően leszűkítjük, és csak az eredeti gráf ezen kis részére konstruálunk h_1-ből monoton heurisztikát. Russel és Norwig könyve első kiadásának 136. oldalán ismertetett megoldás ezt a módszert követi.

8. a)



$0, 1, 2, \ldots$ Jelölje G_0 az állapotgráfot, és legyen x_0 egy olyan csúcsa, melynél $h - h_{2,0}$ minimális. Ekkor teljes indukcióval megmutatható, hogy minden $i \geq 0$ és minden y állapot esetén

$$h(x_0) - h_{2,0}(x_0) \leq h(y) - h_{2,i}(y) \tag{3}$$

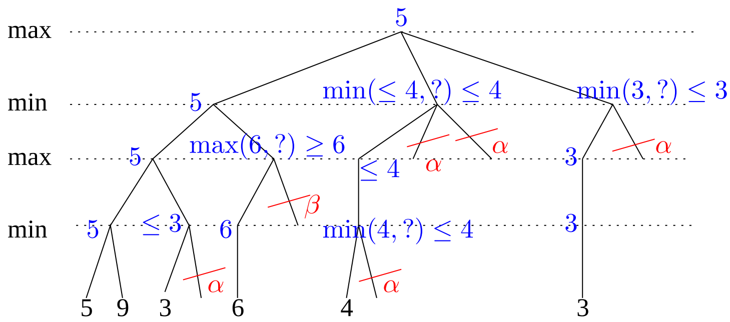
- $i = 0$ eset: automatikus x_0 definíciójából,
- $i > 0$ eset: feltéve, hogy az $(i-1)$ esetben teljesül, csak azt az esetet kell vizsgálni, ha $h_{2,i}(y) = h_{2,i-1}(z) - \mathrm{KTG}(z, y)$ valamely $(z, y) \in \mathrm{Op}$ esetén. Ekkor viszont $h(y) - h_{2,i}(y) = h(y) - (h_{2,i-1}(z) - \mathrm{KTG}(z, y)) = h(y) + \mathrm{KTG}(z, y) - h_{2,i-1}(z) \geq h(z) - h_{2,i-1}(z)$, ami az indukciós hipotézis miatt megintcsak legalább $h(x_0) - h_{2,0}(x_0)$.

Következésképpen $h_{2,i}(x_0) = h_{2,0}(x_0)$ minden $i \geq 0$ esetén (egyébként $y = x_0$ esetén nem teljesülne (3)), és így az is igaz, hogy $h_{2,i}(y) \geq h_{2,i}(x_0) - \mathrm{KTG}(x_0, y)$ minden $(x,y) \in \mathrm{Op}$ és minden $i > 0$ esetén. Emiatt, G_1-gyel jelölve a G_0-ból az x_0 elhagyásával kapott gráfot, azt ellátva a $h_{2,1}$ heurisztikával, és azon végrehajtva az algoritmust kapjuk, hogy az első lépés után előálló heurisztika minden ponton $h_{2,2}$-vel, a harmadik lépés után előálló $h_{2,3}$-mal, ..., az i-edik lépés után előálló heurisztika $h_{2,i+1}$-gyel fog megegyezni, és így tovább.

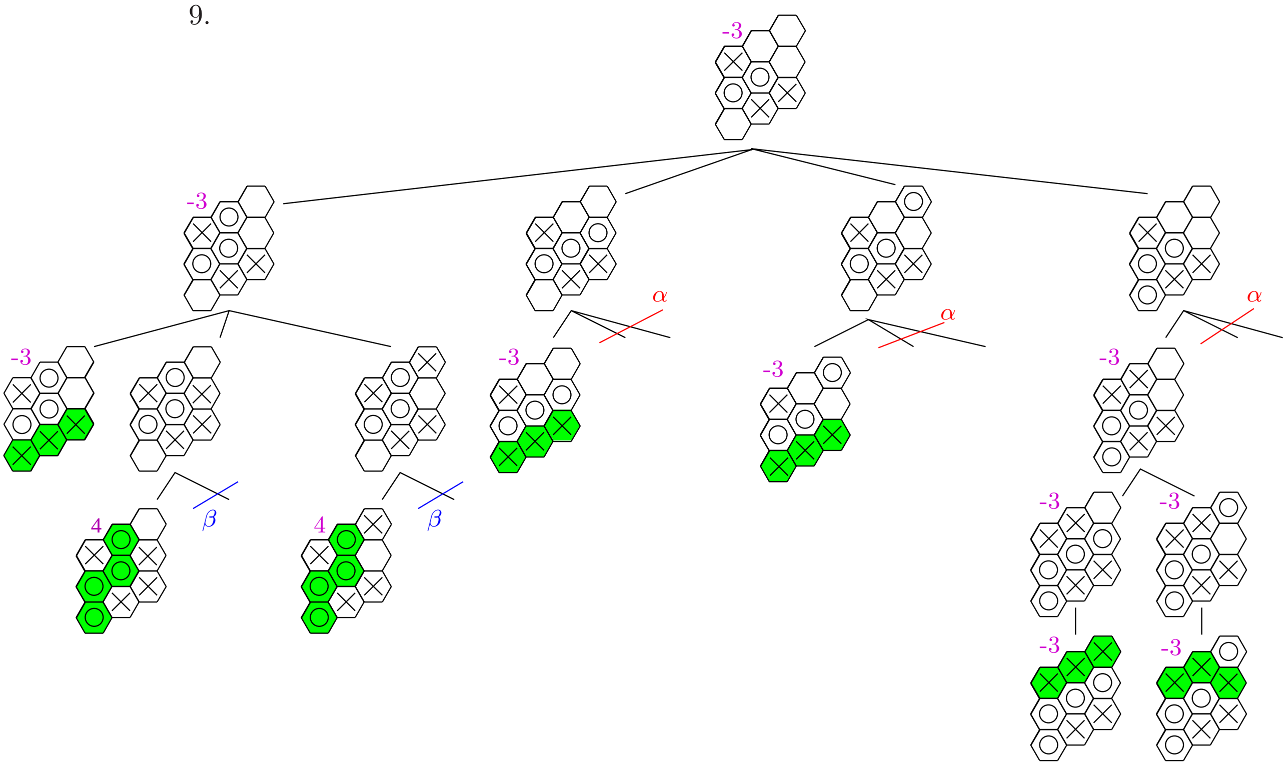
Ha x_1 a G_1 egy olyan csúcsa melyre $h - h_{2,1}$ minimális, akkor x_1 ugyanolyan tulajdonságokkal bír G_1-ben, mint amilyenekkel x_0 bírt G_0-ban, emiatt $h_{2,1}(x_1) = h_{2,i}(x_1)$ és $h(x_1) - h_{2,1}(x_1) \leq h(y) - h_{2,i}(y)$ minden $y \neq x_0$ és $i \geq 1$ esetén.

Általánosan $i = 0, 1, \ldots, |S| - 1$ esetén x_i-ként G_i azon csúcsát választva, melyre $h_{2,i}$ minimális, G_{i+1}-nek pedig G_i-ből az x_i elhagyása után maradt gráfot jelölve teljesül, hogy $h_{2,i}(x_i) = h_{2,j}(x_i)$ minden $j \geq i$ esetén. Emiatt $h_{2,|S|} = h_{2,j}$ minden $j \geq |S|$ esetén, ami — tekintve $h_{2,i}$ definícióját — igazolja $h_{2,|S|}$ monotonitását.

b)


max
min
max
min
5
5
min(≤ 4, ?) ≤ 4
min(3, ?) ≤ 3
5
max(6, ?) ≥ 6
≤ 4
3
α
α
α
β
5
≤ 3
6
min(4, ?) ≤ 4
3
α
α
5
9
3
6
4
3

9.



10. Jelölje K azt az eseményt, hogy egy véletlen választott autót könnyű eladni, „< 5" azt, hogy a kora kevesebb öt évnél, J azt, hogy japán, P azt, hogy piros, R pedig azt, hogy van benne rádió. A Naív-Bayes módszer szerint akkor ítéljük könnyen eladhatónak az autót, ha a

$$\mathbb{P}(K)\,\mathbb{P}(<5|K)\,\mathbb{P}(J|K)\,\mathbb{P}(P|K)\,\mathbb{P}(R|K)$$

szorzat értéke nagyobb, mint a

$$\mathbb{P}(\overline{K})\,\mathbb{P}(<5|\overline{K})\,\mathbb{P}(J|\overline{K})\,\mathbb{P}(P|\overline{K})\,\mathbb{P}(R|\overline{K})$$

szorzaté. Az első szorzat értékére a megadott táblázat alapján a

$$\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{112}\approx 0,0268$$

becslést, a másodikéra pedig a

$$\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{189}\approx 0,0424$$

becslést tudjuk adni, így az autót nehezen eladhatónak ítéljük.

11. $B=0$ illetve $B=1$ események valószínűsége:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B=0) =& \sum_{a\in\{0,1\}} \mathbb{P}(A=a)\,\mathbb{P}(B=0|A=a)\\ =&0,7\cdot 0,4+0,3\cdot 0,1=0,31\\ \mathbb{P}(B=1) =&1-\mathbb{P}(B=0)=0,69\end{aligned}$$

Most számoljuk ki, hogy a különböző paraméterek értékének ismeretében mi az alkalmazandó stratégia!

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X=0|B=0)=\mathbb{P}(X=0,B=0)/\,\mathbb{P}(B=0)=\\ &\quad=\sum_{a\in\{0,1\}}\mathbb{P}(A=a,B=0,X=0)/0,31=\\ &\quad=\frac{1}{0,31}\sum_{a\in\{0,1\}}\mathbb{P}(A=a)\,\mathbb{P}(B=0|A=a)\,\mathbb{P}(X=0|A=a,B=0)=\\ &\quad=\frac{0,7\cdot 0,4\cdot 0,6+0,3\cdot 0,1\cdot 0,5}{0,31}=\frac{0,183}{0,31}\approx 0,5903,\end{aligned}$$

hasonlóan

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X=0|B=1)=\mathbb{P}(X=0,B=1)/\,\mathbb{P}(B=1)=\\ &\quad=\frac{1}{0,69}\sum_{a\in\{0,1\}}\mathbb{P}(A=a)\,\mathbb{P}(B=1|A=a)\,\mathbb{P}(X=0|A=a,B=1)=\\ &\quad=\frac{0,7\cdot 0,6\cdot 0,2+0,3\cdot 0,9\cdot 0,6}{0,69}=\frac{0,246}{0,69}\approx 0,3565,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X=0|A=0)=\mathbb{P}(X=0,A=0)/\,\mathbb{P}(A=0)=\\ &\quad=\frac{1}{0,7}\sum_{b\in\{0,1\}}\mathbb{P}(A=0)\,\mathbb{P}(B=b|A=0)\,\mathbb{P}(X=0|A=0,B=b)=\\ &\quad=\frac{0,7\cdot 0,4\cdot 0,6+0,7\cdot 0,6\cdot 0,2}{0,7}=\frac{0,252}{0,7}=0,36,\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X=0|A=1)=\mathbb{P}(X=0,A=1)/\,\mathbb{P}(A=1)=\\ &\quad=\frac{1}{0,3}\sum_{b\in\{0,1\}}\mathbb{P}(A=1)\,\mathbb{P}(B=b|A=1)\,\mathbb{P}(X=0|A=1,B=b)=\\ &\quad=\frac{0,3\cdot 0,1\cdot 0,5+0,3\cdot 0,9\cdot 0,6}{0,3}=\frac{0,177}{0,3}=0,59,\end{aligned}$$

tehát $B = 0$ és $A = 1$ esetén az $X = 0$-ra érdemes tippelnünk, míg $B = 1$ és $A = 0$ esetén az $X = 1$-re. Y_B jelölje nyereményünket a B paramétert választva és a fenti stratégiát alkalmazva (azaz $B = 0$ esetén $X = 0$-ra tippelve, $B = 1$ esetén pedig $X = 1$-re), Y_A pedig jelölje hasonlóképpen nyereményünket az A paremétert választva (azaz most $A = 0$ esetén $X = 1$-re tippelve, $A = 1$ esetén pedig $X = 0$-ra). A két stratégia esetén tehát nyereményünk várható értéke (felhasználva a $\mathbb{P}(X = x, Z = z) = \mathbb{P}(X = x|Z = z)\,\mathbb{P}(Z = z)$ összefüggést)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_B) =& 1 \cdot \mathbb{P}(X = 0, B = 0) + (-1) \cdot \mathbb{P}(X = 1, B = 0) + \\ &+ (-1) \cdot \mathbb{P}(X = 0, B = 1) + 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1, B = 1) = \\ =& 0,31 \cdot \left(\frac{0,183}{0,31} - \frac{0,127}{0,31}\right) + 0,69 \cdot \left(-\frac{0,246}{0,69} + \frac{0,444}{0,69}\right) = \\ =& 0,056 + 0,198 = 0,254,\end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_A) =& (-1) \cdot \mathbb{P}(X = 0, A = 0) + 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1, A = 0) + \\ &+ 1 \cdot \mathbb{P}(X = 0, A = 1) + (-1) \cdot \mathbb{P}(X = 1, A = 1) = \\ =& 0,7 \cdot (-0,36 + 0,64) + 0,3 \cdot (0,59 - 0,41) = \\ =& 0,196 + 0,054 = 0,25.\end{aligned}$$

Tehát a B paraméter értékét érdemesebb megnéznünk.

Megjegyzés: ha egyik paramétert se nézzük meg, akkor

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 0) =& \mathbb{P}(X = 0|B = 0)\,\mathbb{P}(B = 0) + \mathbb{P}(X = 0|B = 1)\,\mathbb{P}(B = 1) = \\ =& 0,183 + 0,246 = 0,429\end{aligned}$$

miatt az optimális döntés az $X = 1$ eseményre tippelni. Ekkor nyereményünk várható értéke

$$\mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 0) = 0,571 - 0,429 = 0,142$$

dollár lesz.

12. (a)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A=1,C=0) =& \sum_{b\in\{0,1\}} \mathbb{P}(A=1)\,\mathbb{P}(B=b|A=1)\,\mathbb{P}(C=0|B=b,A=1)\\
=&0,3\cdot 0,6\cdot 0,3+0,3\cdot 0,4\cdot 0,5=0,114\\
\mathbb{P}(A=0,C=0) =& \sum_{b\in\{0,1\}} \mathbb{P}(A=0)\,\mathbb{P}(B=b|A=0)\,\mathbb{P}(C=0|B=b,A=0)\\
=&0+0,7\cdot 0,9\cdot 0,7=0,441\\
\mathbb{P}(A=1|C=0) =&\frac{\mathbb{P}(A=1,C=0)}{\mathbb{P}(C=0)}=\frac{\mathbb{P}(A=1,C=0)}{\mathbb{P}(A=1,C=0)+\mathbb{P}(A=0,C=0)}\\
=&\frac{0,114}{0,114+0,441}=\frac{114}{555}\approx 0,2054\\
\mathbb{P}(C=0|A=1) =&\frac{\mathbb{P}(A=1,C=0)}{\mathbb{P}(A=1)}=\frac{0,114}{0,3}=0,38
\end{aligned}
$$

Tehát $\mathbb{P}(A=1|C=0)<\mathbb{P}(C=0|A=1)$.

(b)

$$
\mathbb{P}(B=1)=\sum_{a\in\{0,1\}}\mathbb{P}(A=a)\,\mathbb{P}(B=1|A=a)=0,7{\cdot}0,9{+}0,3{\cdot}0,4=0,75
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A=0,C=1,B=1) =&\mathbb{P}(A=0)\,\mathbb{P}(B=1|A=0)\,\mathbb{P}(C=1|B=1,A=0)\\
=&0,7\cdot 0,9\cdot 0,3=0,189\\
\mathbb{P}(A=1,C=0,B=1) =&\mathbb{P}(A=1)\,\mathbb{P}(B=1|A=1)\,\mathbb{P}(C=0|B=1,A=1)\\
=&0,3\cdot 0,4\cdot 0,5=0,06
\end{aligned}
$$

Ezek alapján tehát a válasz

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A\neq C|B=1) =&\frac{\mathbb{P}(A=0,C=1,B=1)+\mathbb{P}(A=1,C=0,B=1)}{\mathbb{P}(B=1)}\\
=&\frac{0,249}{0,75}=0,332.
\end{aligned}
$$

(c)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A=0,B=1,C=1)=&\mathbb{P}(A=0)\,\mathbb{P}(B=1|A=0)\,\mathbb{P}(C=1|A=0,B=1)\\
=&0,7\cdot 0,9\cdot 0,3=0,189\\
\mathbb{P}(A=1,B=1,C=0)=&\mathbb{P}(A=1)\,\mathbb{P}(B=1|A=1)\,\mathbb{P}(C=0|A=1,B=1)\\
=&0,3\cdot 0,4\cdot 0,5=0,06\\
\mathbb{P}(A=1,B=0,C=1)=&\mathbb{P}(A=1)\,\mathbb{P}(B=0|A=1)\,\mathbb{P}(C=1|A=1,B=0)\\
=&0,3\cdot 0,6\cdot 0,7=0,168\\
\mathbb{P}(A=0,B=0,C=0)=&0
\end{aligned}$$

Ezek alapján

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(C=0\middle|A+B+C\overset{(\mathrm{mod}\ 2)}{\equiv}0\right)=\\
&\qquad=\frac{\mathbb{P}\Big(A=B=1,C=0\text{ vagy }A=B=C=0\Big)}{\mathbb{P}\Big(A+B+C=2\text{ vagy }A=B=C=0\Big)}\\
&\qquad=\frac{0,06+0}{0,189+0,06+0,168+0}=\frac{0,06}{0,555}\approx 0,1439
\end{aligned}$$

13.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A=i,B=i,C=i,D=i) =& \mathbb{P}(A=i)\,\mathbb{P}(C=i)\cdot\mathbb{P}(B=i|C=i)\\
&\cdot\mathbb{P}(D=i|A=i,B=i,C=i)=\\
=&0,8\cdot 0,6\cdot 0,7\cdot 0,1=0,0336
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A=i,B=h,C=h,D=i) =& \mathbb{P}(A=i)\,\mathbb{P}(C=h)\cdot\mathbb{P}(B=h|C=h)\\
&\cdot\mathbb{P}(D=i|A=i,B=h,C=h)=\\
=&0,8\cdot 0,4\cdot 0,5\cdot 0,4=0,064
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A=h,B=h,C=i,D=i) =& \mathbb{P}(A=h)\,\mathbb{P}(C=i)\cdot\mathbb{P}(B=h|C=i)\\
&\cdot\mathbb{P}(D=i|A=h,B=h,C=i)=\\
=&0,2\cdot 0,6\cdot 0,3\cdot 0,7=0,0252
\end{aligned}
$$

Bármely más esetben pedig $\mathbb{P}(A=a,B=b,C=c,D=i)=0$. Ezek alapján:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A=i,B=h,D=i) =& \sum_{c\in\{\mathrm{i,h}\}}\mathbb{P}(A=i,B=h,C=c,D=i)=\\
=&\,\mathbb{P}(A=i,B=h,C=i,D=i)=0,064
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A=i,D=i) =& \sum_{b,c\in\{\mathrm{i,h}\}}\mathbb{P}(A=i,B=b,C=c,D=i)=\\
=&\,\mathbb{P}(A=i,B=i,C=i,D=i)+\\
&+\mathbb{P}(A=i,B=h,C=h,D=i)=\\
=&0,0336+0,064=0,0976
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(B=h,D=i) =& \sum_{a,c\in\{\mathrm{i,h}\}}\mathbb{P}(A=a,B=h,C=c,D=i)\\
=&\,\mathbb{P}(A=i,B=h,C=h,D=i)+\\
&+\mathbb{P}(A=h,B=h,C=i,D=i)=\\
=&0,064+0,0252=0,0892
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(D=i) =& \sum_{a,b,c\in\{\mathrm{i,h}\}}\mathbb{P}(A=a,B=b,C=c,D=i)=\\
=&\,0,0336+0,064+0+0,0252=0,1228
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A=i|D=i) = \mathbb{P}(A=i, D=i)/\,\mathbb{P}(D=i)\\
=0,0976/0,1228
\end{aligned}
$$

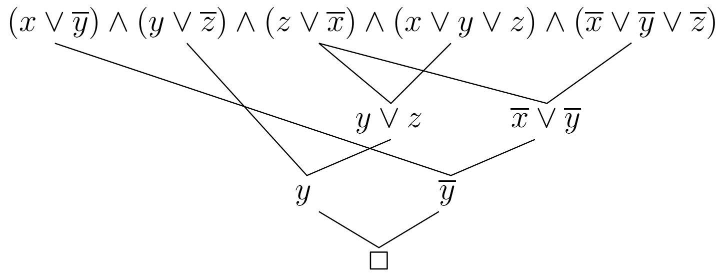
$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(B=h|D=i) = \mathbb{P}(B=h, D=i)/\,\mathbb{P}(D=i)\\
=0,0892/0,1228
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A=i, B=h|D=i) = \mathbb{P}(A=i, B=h, D=i)/\,\mathbb{P}(D=i) =\\
=0,064/0,1228
\end{aligned}
$$

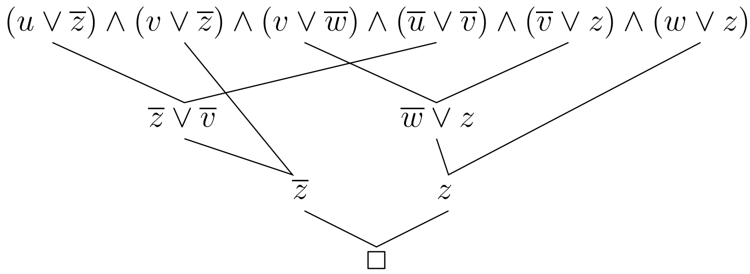
$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A=i|D=i)\,\mathbb{P}(B=h|D=i)/\,\mathbb{P}(A=i, B=h|D=i) =\\
=\frac{0,0976}{0,1228}\cdot\frac{0,0892}{0,1228}\bigg/\frac{0,064}{0,1228} =\\
=\frac{0,0976\cdot 0,0892}{0,1228\cdot 0,064} = \frac{0,00870592}{0,0078592} \neq 1,
\end{aligned}
$$

tehát a kérdéses feltételes függetlenség nem teljesül.

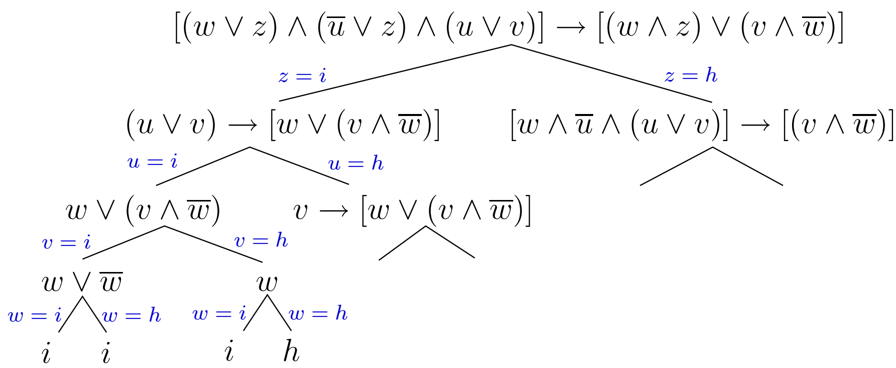
14. Az $(x\vee\overline{y}), (y\vee\overline{z}), (z\vee\overline{x})$ és $(x\vee y\vee z)$ formuláknak pontosan akkor logikai következménye $x\wedge y\wedge z$, ha az $(x\vee\overline{y})\wedge(y\vee\overline{z})\wedge(z\vee\overline{x})\wedge(x\vee y\vee z)\wedge(\overline{x}\vee\overline{y}\vee\overline{z})$ formula kielégíthetetlen. Ez utóbbi egy rezolúciós bizonyítása a lenti ábrán követhető.



15. A $(u\vee\overline{z})$, $(v\vee\overline{z})$, $(v\vee\overline{w})$, $(\overline{u}\vee\overline{v})$ és $(\overline{v}\vee z)$ formuláknak pontosan akkor logikai következménye $\overline{w}\wedge\overline{z}$, ha $(u\vee\overline{z})\wedge(v\vee\overline{z})\wedge(v\vee\overline{w})\wedge(\overline{u}\vee\overline{v})\wedge(\overline{v}\vee z)\wedge(w\vee z)$ kielégíthetetlen. Ennek egy rezolúciós bizonyítása pedig a lenti ábrán követhető.



16. $(w \lor z) \land (\overline{u} \lor z) \land (u \lor v)$ pontosan akkor logikai következménye $(w \land z) \lor (v \land \overline{w})$, ha $[(w \lor z) \land (\overline{u} \lor z) \land (u \lor v)] \rightarrow [(w \land z) \lor (v \land \overline{w})]$ mindig igaz. Ezen a formulán végrehajtva a Quine algoritmust:



kapjuk, hogy az $u = i, v = h, w = h, z = i$ értékadás hamissá teszi a fenti formulát, tehát a kérdéses összefüggés valóban nem teljesül.

Megjegyzés: a formula a fenti és az $u = h, v = i, w = i, z = h$ értékadáson kívül minden más értékadás esetén igazat ad.