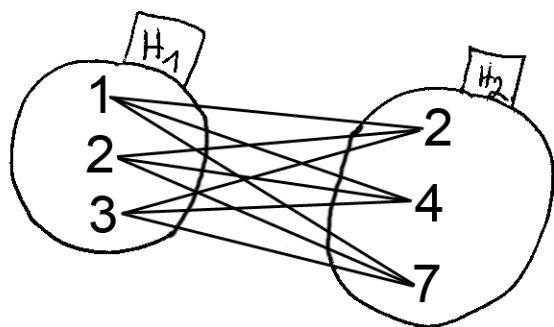


Halmazok direkt szorzata:

1



Formálisan:

$$H_1 = \{1, 2, 3\}$$

$$H_2 = \{2, 4, 7\}$$

$$H_1 \times H_2 = \{(1, 2), (1, 4), (1, 7), (2, 2), (2, 4), (2, 7), (3, 2), (3, 4), (3, 7)\}$$

Vagyis két halmaz direkt szorzata olyan elempárok halmaza, ahol az első elem az első, a második elem a második halmaz eleme.

Következmény: $H_1 \times H_2 \neq H_2 \times H_1$

Általánosan:

Legyen H_1, H_2 halmaz

$H_1 \times H_2$ direkt szorzata: $H_1 \times H_2 = \{(h_1, h_2) \mid h_1 \in H_1, h_2 \in H_2\}$

Speciális Eset:

Legyen H egy halmaz.

$H \times H = \{(h_1, h_2) \mid h_1, h_2 \in H\} \Leftarrow H$ önmagával vett direkt szorzata.

Relációk:

$\mathcal{S} \subseteq H \times H \Leftarrow \mathcal{S}$ egy H feletti kétváltozós reláció

Legyen $(h_1, h_2) \in H \times H$. Ha $(h_1, h_2) \in \mathcal{S}$, akkor h_1 és h_2 egymással $\mathcal{S}$ relációban van.

Egyszerűbben: $\mathcal{S}$ a H halmaz önmagával vett direkt szorzatának valamilyen "szabály" alapján vett részhalmaza.

Példa :

2

Legyen $H = \{1, 2, 3\}$

Ekkor $H \times H = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$

Legyen $\mathcal{S} = \geq$

Ekkor $\mathcal{S} = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (3,3)\}$

Vagyis $(3,1) \in \mathcal{S} \sim 3 \mathcal{S} 1 \sim 3 \geq 1$

Általánosan :

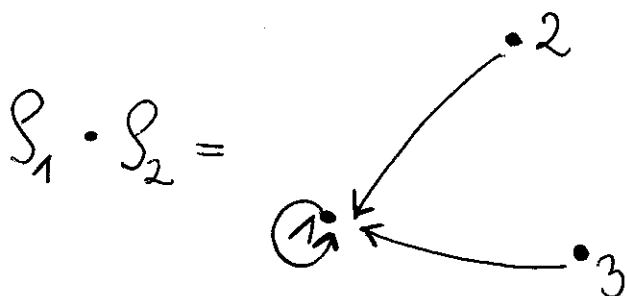
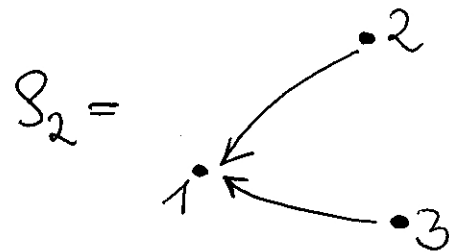
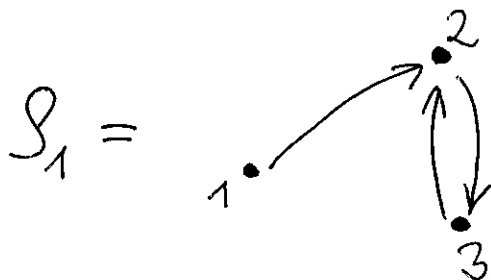
$(h_1, h_2) \in \mathcal{S} \sim h_1 \mathcal{S} h_2$

Relációk Szorzata :

Legyen H egy halmaz, továbbá $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \subseteq H \times H$

Ekkor $\mathcal{S}_1 \cdot \mathcal{S}_2 = \{(h_1, h_2) \mid \exists h_3 \in H : h_1 \mathcal{S}_1 h_3 \wedge h_3 \mathcal{S}_2 h_2\}$

Legyen $\mathcal{S}_1 = \{(1,2), (2,3), (3,2)\}$
 $\mathcal{S}_2 = \{(2,1), (3,1)\}$



$\mathcal{S}_1 \cdot \mathcal{S}_2 = \{(1,1), (2,1), (3,1)\}$

Indoklás :

3

$(1,1) \in S_1 \cdot S_2$, mert $(1,2) \in S_1$ és $(2,1) \in S_2$



$(2,1) \in S_1 \cdot S_2$, mert $(2,3) \in S_1$ és $(3,1) \in S_2$

$(3,1) \in S_1 \cdot S_2$, mert $(3,2) \in S_1$ és $(2,1) \in S_2$



Speciális Eset :

$$S \cdot S = \{(h_1, h_2) \mid \exists h_3 : h_1 S h_3 \text{ és } h_3 S h_2\}$$

Egyszerűbben :

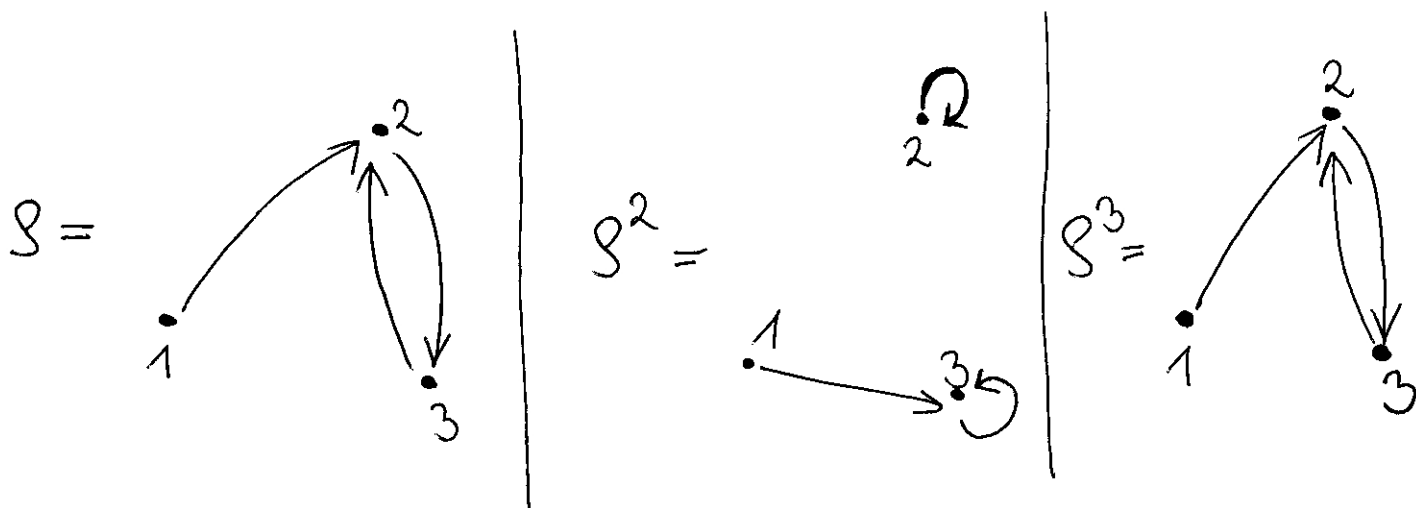
$(h_1, h_2) \in S \cdot S$, ha létezik h_1 -ből h_2 -be vezető 2 hosszú út S -ban

Általánosan :

$$S^k = \begin{cases} \{(h, h) \mid h \in H\} & \text{ha } k=0 \\ S^{k-1} \cdot S & \text{ha } k>0 \end{cases}$$

Egyszerűbben :

$(h_1, h_2) \in S^k$, ha létezik h_1 -ből h_2 -be vezető k hosszú út S -ban

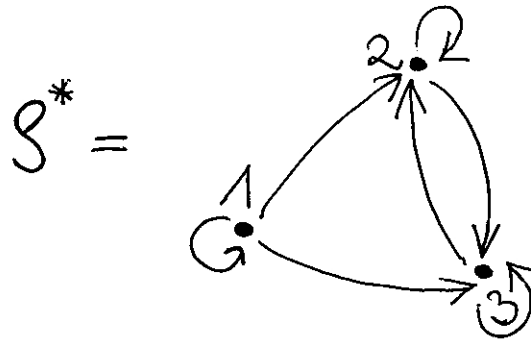
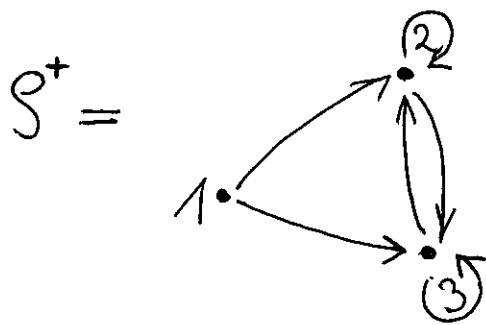


Reláció tranzitív lezártja:

4

$$S^+ = \bigcup_{k \geq 1} S^k = S \cup S^2 \cup S^3 \cup S^4 \dots$$

$$S^* = S^0 \cup S^+ = \bigcup_{k \geq 0} S^k = S^0 \cup S \cup S^2 \cup S^3 \dots$$



Ábécé = Szimbólumoknak egy tetszőleges véges, nemüres halmaza

pl.: $\Sigma = \{a, b\}$

Σ^+ feletti szó : Egy $a_1 \dots a_k$ alakú sorozat, ahol $k \geq 0$ és $a_1, \dots, a_k \in \Sigma$

pl.:

$ab, aab, ababb, \dots$

$k=0$ eset : Üres szó . Jele : λ

$\Sigma^* = \Sigma^+$ feletti szavak halmaza.

Formálisan :

$$\Sigma^* = \{a_1 \dots a_k \mid k \geq 0, a_1, \dots, a_k \in \Sigma\}$$

$$\Sigma^+ = \Sigma^* - \{\lambda\}$$

Konkatenáció :

5

$$\Sigma^* \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$$

Legyen $u, v \in \Sigma^*$. Ekkor az u és v szavak konkatenációján értjük az u és v egymás után írásából keletkezett szót.

Példa: Legyen $\Sigma = \{a, b\}$
 $u_1 = abab$
 $v_1 = aabaa$
 $u_2 = ba$
 $v_2 = \lambda$

Ekkor

$$u_1 v_1 = ababaabaa$$

$$u_2 v_2 = ba$$

$$u_1 u_2 = ababbba$$

$$v_1 u_2 = aabaaaba$$

$$v_2 u_1 = abab$$

$$v_2 v_2 = \lambda$$

$$u_2 u_2 = baba$$

Szó Hossza:

Legyen $w \in \Sigma^*$

$$|w| = \begin{cases} 0 & \text{ha } w = \lambda \\ 1 + |v| & \text{ha } w = av \text{ valamely } a \in \Sigma \text{ és } v \in \Sigma^* \text{-ra} \end{cases}$$

Példa :

$$|\lambda| = 0$$

$$\begin{aligned} |aabbabba| &= 1 + |abbabba| = 2 + |bbabba| = 3 + |babba| \\ &= 4 + |abba| = 5 + |bba| = 6 + |ba| = 7 + |a| = 8 + |\lambda| = 8 \end{aligned}$$

Nyelv :

Σ^* tetszőleges részhalmazát Σ feletti nyelvnek nevezzük.

Generatív Nyelvtan :

$G = (N, \Sigma, P, S)$ négyes, ahol

- N egy nemterminális ábécé
- Σ egy terminális ábécé, amire $N \cap \Sigma = \emptyset$
- $S \in N$ a kezdő vagy start szimbólum
- P pedig $\alpha \rightarrow \beta$ alakú átírási szabályok véges halmaza, ahol $\alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^*$ és α -ban van legalább egy nemterminális betű

Példa :

$$G = (\{S, A\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aAb, aA \rightarrow aaAb, A \rightarrow \lambda\}, S)$$

Közvetlen levezetés (deriváció):

Tetszőleges $\gamma, \delta \in (N \cup \Sigma)^*$ esetén $\gamma \Rightarrow_G \delta$, ha van olyan $\alpha \rightarrow \beta \in P$ szabály, és vannak olyan $\alpha', \beta' \in (N \cup \Sigma)^*$ szavak amelyekre fennállnak, hogy $\gamma = \alpha' \alpha \beta'$, $\delta = \alpha' \beta \beta'$

Példa :

$$\begin{array}{ccccccc} aaAbaa & \Rightarrow_G & aaaAbbaa & \Rightarrow_G & aaaaAbbbbaa & \Rightarrow_G & \dots \\ & \Downarrow_G & & \Downarrow_G & & \Downarrow_G & \\ & aabaa & & aaabbaa & & aaaaabbbbaa & \end{array}$$

$G = (N, \Sigma, P, S)$ által generált nyelv:

$$L(G) = \{ u \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow_G^* u \}$$

Példa: Legyen $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, \{S \Rightarrow aAb, aA \Rightarrow aaAb, A \Rightarrow \lambda\}, S)$

$$\begin{array}{ccccccc} S \Rightarrow_G aAb & \Rightarrow_G aaAbb & \Rightarrow_G aaaAbbb & \Rightarrow_G \dots \\ \Downarrow_G ab & \Downarrow_G aabb & \Downarrow_G aaabbb & \\ & & & \end{array}$$

Vegyük észre, hogy $L(G) = \{ a^n b^n \mid n \geq 1 \}$

Példa 2 :

$G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \Rightarrow \lambda, S \Rightarrow aSa, S \Rightarrow bSb\}, S)$

$$S \Rightarrow_G \lambda$$

$$S \Rightarrow_G aSa \Rightarrow_G aa$$

$$\Rightarrow_G aaSaa \Rightarrow_G aaaa$$

$$\Rightarrow_G aabSbaa \Rightarrow_G aabaSabaa \Rightarrow_G \dots$$

$$\Rightarrow_G aabbbaa$$

$$\Rightarrow_G aabbSbbbaa \Rightarrow_G \dots$$

$$S \Rightarrow_G bSb \Rightarrow_G baSab \Rightarrow_G baab$$

$$\Rightarrow_G babSbab \Rightarrow_G babbab$$

$$L(G) = \{ \omega \omega^{-1} \mid \omega \in \{a, b\}^* \}$$

Példa 3:

8

Legyen $L = \{ 0^{2n+1} \mid n \geq 0 \} \subseteq \Sigma^*$, $\Sigma = \{ 0 \}$

Adjuk meg azt a G generatív nyelvtant, amelyre $L = L(G)$!

$$G = (\{ S \}, \{ 0 \}, \{ S \rightarrow 0, S \rightarrow 0 S 0 \}, S)$$

Példa 4:

Legyen $G = (\{ S, A, B \}, \{ a, b, c \}, \{ S \rightarrow A, S \rightarrow b B b, A \rightarrow a A a a, A \rightarrow c, B \rightarrow b B b, B \rightarrow \lambda \}, S)$

$$L(G) = \{ a^n c a^{2n} \mid n \geq 0 \} \cup \{ b^{2m} \mid m \geq 1 \}$$

Feladatok:

1.) Legyen $L = \{ 0^m 1^n \mid m \geq 0, n > m \} \subseteq \Sigma^*$, $\Sigma = \{ 0, 1 \}$
Adjuk meg azt a G generatív nyelvtant, amelyre $L = L(G)$!

2.) Adjuk meg a $G = (\{ S, A, B \}, \{ a, b, c \}, \{ S \rightarrow c S c, S \rightarrow A, S \rightarrow B, A \rightarrow a A a a, B \rightarrow b b B b, A \rightarrow \lambda, B \rightarrow \lambda \}, S)$
generatív nyelvtan által generált nyelvet !

3.) Adjuk meg a $G = (\{ S \}, \{ a, b \}, \{ S \rightarrow a S b b, S \rightarrow \lambda \}, S)$
generatív nyelvtan által generált nyelvet !

4.) Legyen $L = \{ a b^n \mid n > 0 \} \subseteq \Sigma^*$, $\Sigma = \{ a, b \}$
Adjuk meg azt a G generatív nyelvtant, amelyre $L = L(G)$!

5.) Adjuk meg a $G = (\{ S, A \}, \{ a, b \}, \{ S \rightarrow \lambda, S \rightarrow A, S \rightarrow a S b, A \rightarrow A b b, A \rightarrow \lambda \}, S)$
generatív nyelvtan által generált nyelvet !

6.) Legyen $L = \{ a^{n+2m} b^n \mid n \geq 0, m \geq 0 \} \subseteq \Sigma^*$, $\Sigma = \{ a, b \}$
Adjuk meg azt a G generatív nyelvtant, amelyre $L = L(G)$!

7.) Legyen $L = \{ a^n b^{n + (n \% 2)} \mid n \geq 0 \} \subseteq \Sigma^*$, $\Sigma = \{ a, b \}$
Adjuk meg azt a G generatív nyelvtant, amelyre $L = L(G)$!
Megjegyzés: $(n \% 2) == n$ 2-es maradéka

8.) Legyen $L = \{a^n b^m \mid n, m \geq 0, (n+m) \% 2 = 0\} \subseteq \Sigma^*$, $\Sigma = \{a, b\}$
Adjuk meg azt a G generatív nyelvtant amire $L = L(G)$!

9.) Legyen $L = \{ab^n cd^m e \mid n \geq 0, m \geq 2\} \subseteq \Sigma^*$, $\Sigma = \{a, b, c, d, e\}$
Adjuk meg azt a G generatív nyelvtant amire $L = L(G)$!

10.) Legyen $L = \{\omega \mid \overline{\omega} \% 3 = 0\} \subseteq \Sigma^*$, $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
Megjegyzés: $\overline{\omega}$ a ω szó 10-es számrendszer beli értéke.
Adjuk meg azt a G generatív nyelvtant amire $L = L(G)$!

11.) Legyen $L = \{x^n c x^n \mid n \geq 0, x \in \{a, b\}\} \subseteq \Sigma^*$, $\Sigma \in \{a, b\}$
Adjuk meg azt a G generatív nyelvtant amire $L = L(G)$!

12.) Adjuk meg a $G = (\{S, A, B, C, D\}, \{a, b, c\}, \{S \Rightarrow A, S \Rightarrow B, A \Rightarrow aAa, B \Rightarrow bBb, A \Rightarrow C, B \Rightarrow D, C \Rightarrow bCb, D \Rightarrow aDa, C \Rightarrow c, D \Rightarrow c\}, S)$
generatív nyelvtan által generált nyelvet !

13.) Adjuk meg a $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, \{S \Rightarrow aAa, A \Rightarrow aBa, B \Rightarrow aCa, C \Rightarrow aAa, A \Rightarrow aba, B \Rightarrow b, C \Rightarrow aabaa\}, S)$
generatív nyelvtan által generált nyelvet !

14.) Legyen $L = \{a^{2k+1} b c^{2k+1} \mid k \geq 0\} \subseteq \Sigma^*$, $\Sigma = \{a, b, c\}$
Adjuk meg azt a G generatív nyelvtant amire $L = L(G)$!

Nemdeterminisztikus Automata:

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F), \text{ ahol}$$

- Q nemüres, véges állapothalmaz
- Σ input Ábécé
- $q_0 \in Q$ a kezdőállapot
- $F \subseteq Q$ a végállapotok halmaza
- $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow P(Q)$ leképezés az átmenetfüggvény

Ismétlés :

Ha H egy halmaz, akkor $P(H)$ a H összes részhalmazának a halmaza

Példa 1 automatára :

$$M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_1, q_2\}), \text{ ahol}$$

$$\delta(q_0, a) = \{q_1, q_2\} \quad \delta(q_0, b) = \{q_0\}$$

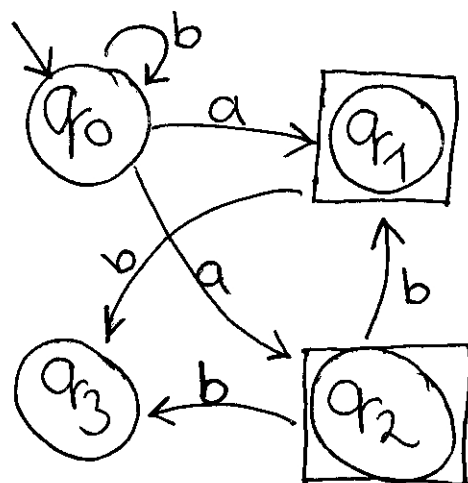
$$\delta(q_1, a) = \emptyset \quad \delta(q_1, b) = \{q_3\}$$

$$\delta(q_2, a) = \emptyset \quad \delta(q_2, b) = \{q_1, q_3\}$$

$$\delta(q_3, a) = \emptyset \quad \delta(q_3, b) = \emptyset$$

Másik megadási módok:

	a	b
q_0	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_2	$\emptyset$	$\{q_1, q_3\}$
q_3	$\emptyset$	$\emptyset$



M konfigurációinak halmaza:

$$C = Q \times \Sigma^*$$

A $(q, a_1 \dots a_n)$ konfiguráció azt jelenti, hogy

M a q állapotban van és az $a_1 \dots a_n$ szót kapja inputként

Átmeneti Reláció:

$(q, w), (q', w') \in C$ esetén $(q, w) \vdash_M (q', w')$, ha
 $w = aw'$ valamely $a \in \Sigma$ -ra és $q' \in \delta(q, a)$

Példák (Tekintsük az előző oldalon lévő automatát):

$$(q_0, bbaab) \vdash_M (q_0, baab) \vdash_M (q_0, aab) \begin{matrix} \vdash_M (q_1, ab) \\ \vdash_M (q_2, ab) \end{matrix}$$

$$(q_0, babb) \vdash_M (q_0, abb) \begin{matrix} \vdash_M (q_1, bb) \vdash_M (q_3, b) \\ \vdash_M (q_2, bb) \vdash_M (q_3, b) \\ \vdash_M (q_1, b) \vdash_M (q_3, \lambda) \end{matrix}$$

$$(q_0, bbab) \vdash_M (q_0, bab) \vdash_M (q_0, ab) \begin{matrix} \vdash_M (q_1, b) \vdash_M (q_3, \lambda) \\ \vdash_M (q_2, b) \vdash_M (q_3, \lambda) \\ \vdash_M (q_1, \lambda) \end{matrix}$$

elfogadó végkonfiguráció

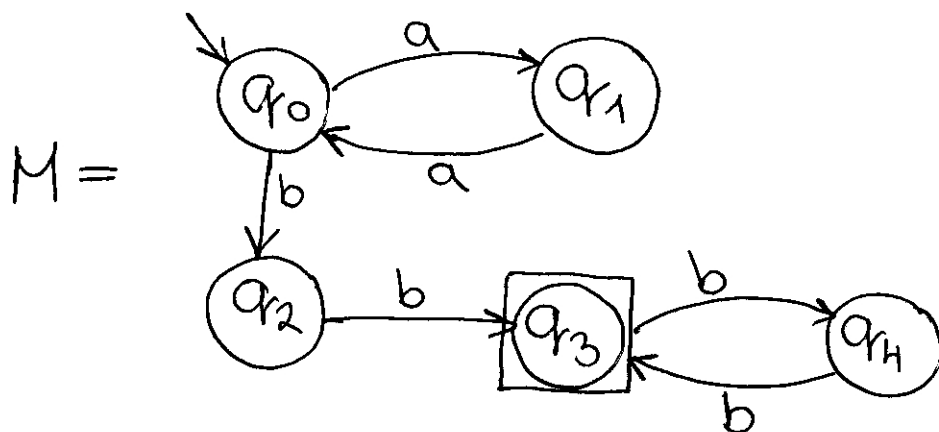
$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ automata által felismert nyelv:

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid (q_0, w) \vdash_M^* (q, \lambda) \text{ valamely } q \in F\text{-re}\}$$

Legyen M a 10. oldalon lévő automata.

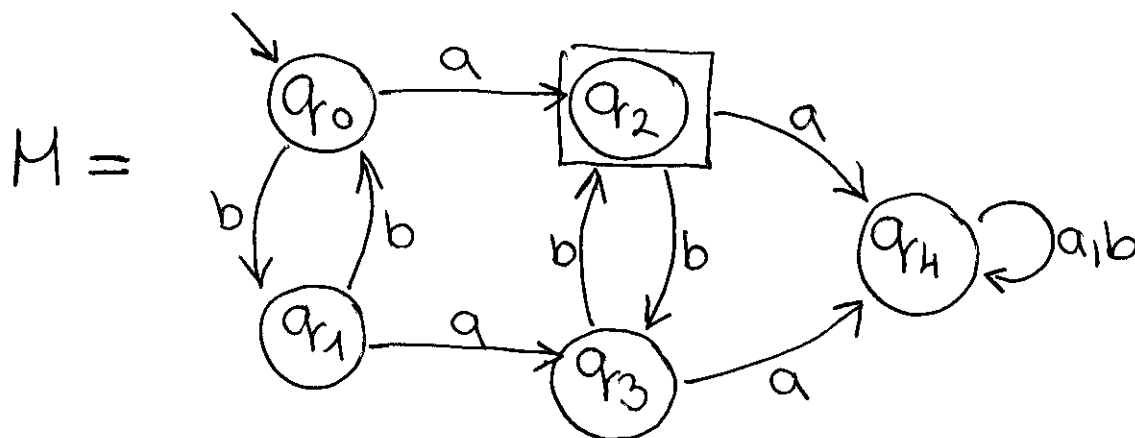
$$L(M) = \{b^n a b^m \mid n \geq 0, m \in \{0, 1\}\}$$

Példa 2 automatára:



$$L(M) = \{a^{2n} b^{2m} \mid n \geq 0, m \geq 1\}$$

Példa 3 automatára:

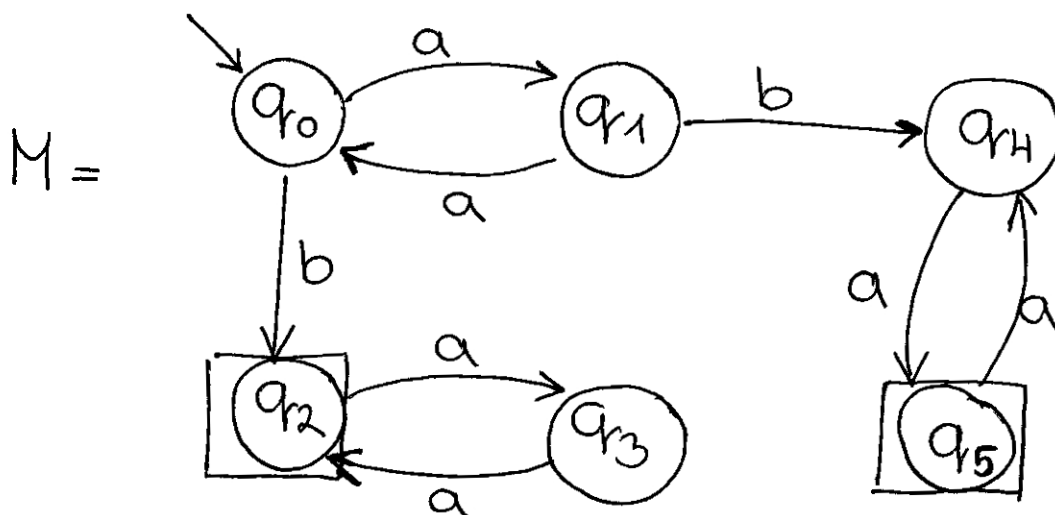


$$L(M) = \{b^{2n} a b^{2m} \mid n, m \geq 0\} \cup \{b^{2n+1} a b^{2m+1} \mid n, m \geq 0\}$$

Példa 4 automatára:

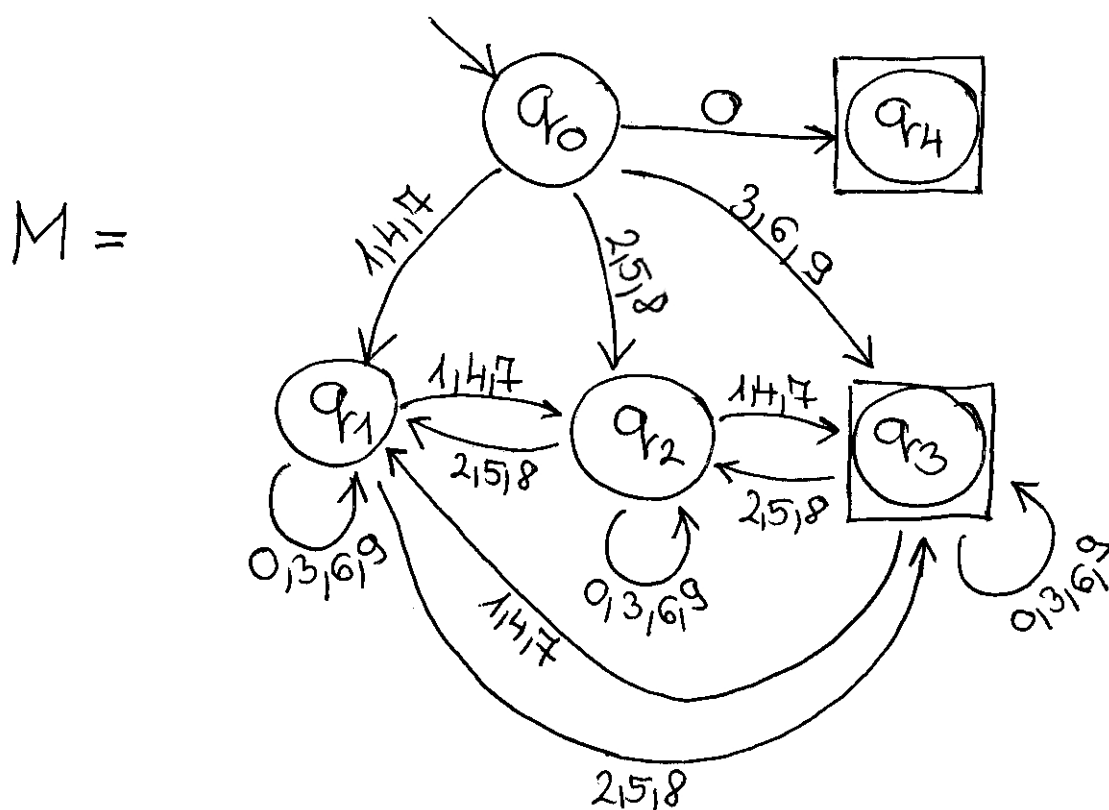
Legyen $L = \{a^n b a^m \mid n, m \geq 0, (n+m) \% 2 = 0\}$

Készítsünk egy olyan M automatát, amelyre $L = L(M)$!

Példa 5 automatára:

Legyen $L = \{w \in \{0-9\}^* \mid \overline{w} \% 3 = 0\}$

Készítsünk egy olyan M automatát, amelyre $L = L(M)$!



15.) Legyen $L = \{w \in \{0, \dots, 9\}^* \mid w \text{ 10-es számrendszerbeli értékére teljesül, hogy a számjegyek összege osztható 4-el}\}$

Adjunk meg olyan $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ automatát, amelyre $L = L(M)$!

16.) Legyen $L = \{ab^n \mid n > 0\} \subseteq \Sigma^*$, $\Sigma = \{a, b\}$

Adjunk meg olyan $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ automatát, amelyre $L = L(M)$!

17.) Legyen $L = \{a^n ccc b^m \mid n, m \geq 0\} \cup \{aaa b^n \mid n \geq 0\}$

Adjunk meg olyan $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ automatát, amelyre $L = L(M)$!

18.) Legyen $L = \{a^n b^m c^e \mid n, m, e \geq 1\} \subseteq \Sigma^*$, $\Sigma = \{a, b, c\}$

Adjunk meg olyan $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ automatát, amelyre $L = L(M)$!

19.) Legyen $L = \{a^{2n} b^{3m} \mid n \geq 1, m \geq 0\} \subseteq \Sigma^*$, $\Sigma = \{a, b\}$

Adjunk meg olyan $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ automatát, amelyre $L = L(M)$!

20.) Legyen $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ 2-es számrendszerbeli értéke osztható 2-vel}\}$

Adjunk meg olyan $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ automatát, amelyre $L = L(M)$!

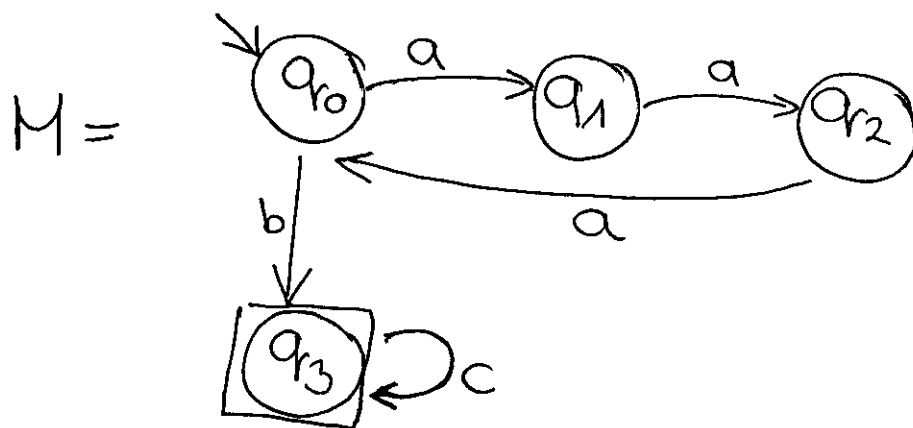
21.) Legyen $L = \{ \delta^n c \delta^m \mid n, m \geq 1, \delta \in \{a, b\}^* \} \subseteq \Sigma^*$, $\Sigma = \{a, b, c\}$

Adjunk meg olyan $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ automatát, amelyre $L = L(M)$!

22.) Legyen $L = \{ a^{2k+1} b \mid k \geq 0 \} \cup \{ a^{3k+1} b^{2l+1} \mid k, l \geq 0 \}$

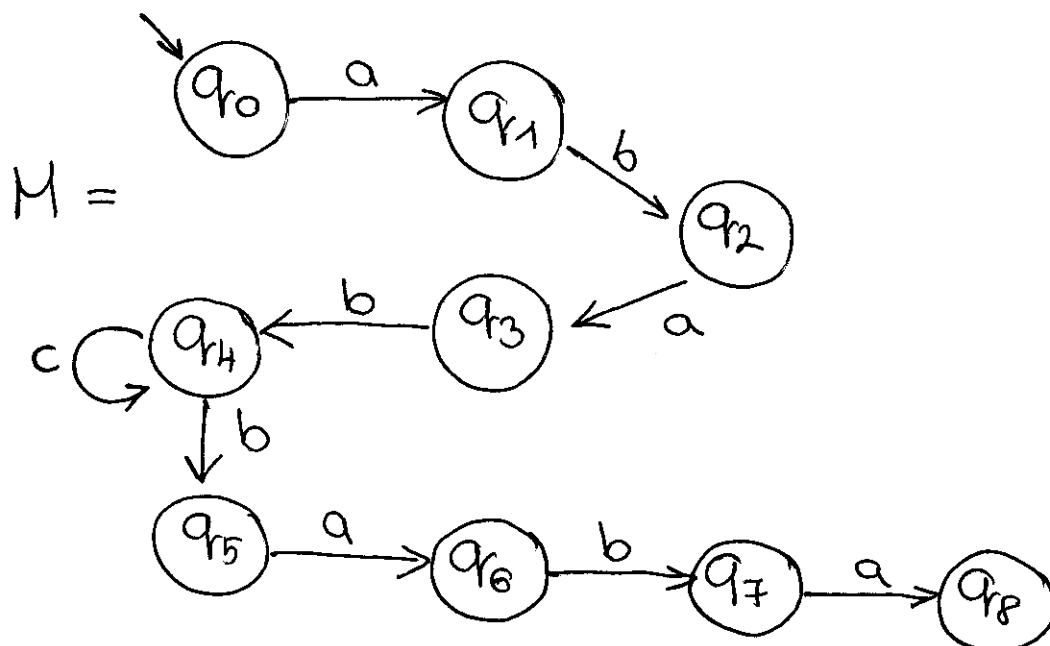
Adjunk meg olyan $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ automatát, amelyre $L = L(M)$!

23.) Tekintsük a következő M automatát:



Adjuk meg az M által felismert nyelvet !

24.) Tekintsük a következő M automatát:



Adjuk meg az M által felismert nyelvet !

Determinisztikus Automata:

$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ automata, ahol minden $q \in Q$
és $a \in \Sigma$ esetén a $\delta(q, a)$ halmaz legfeljebb egy elemű.

Nemdeterminisztikus Automata determinizálása:

Bemenet : $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ nemdeterminisztikus automata

Kimenet : $M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ determinisztikus automata

amelyre: $L(M) = L(M')$

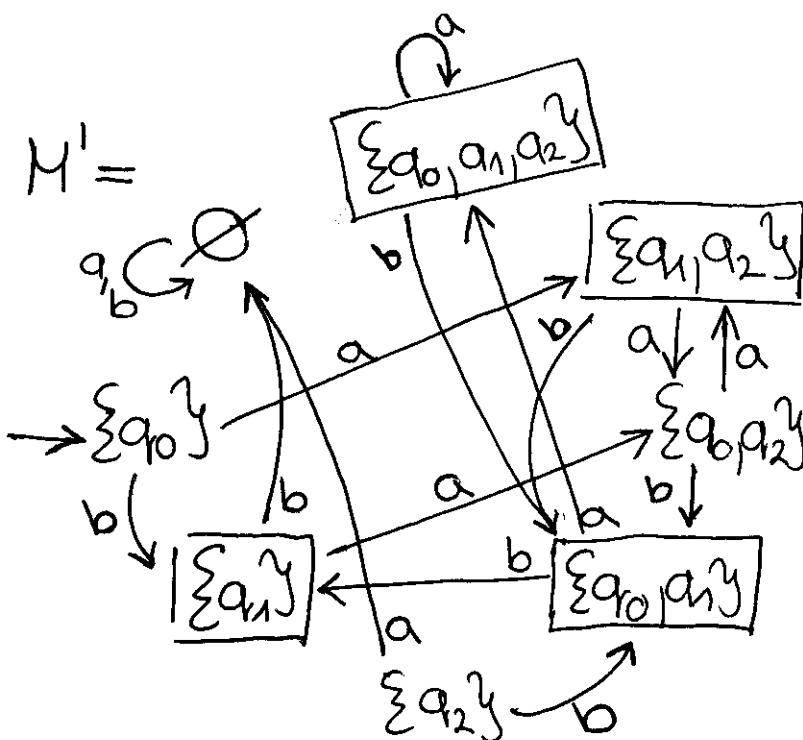
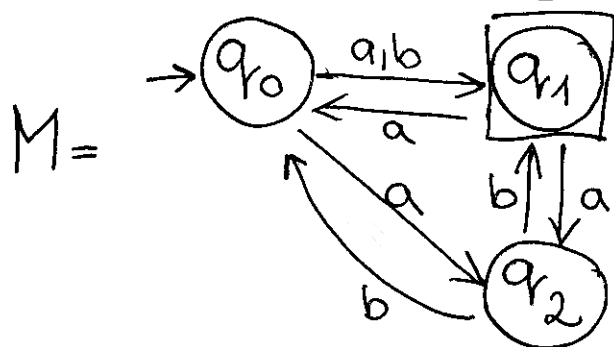
továbbá: $Q' = P(Q)$

$$q_0' = \{q_0\}$$

$$F' = \{S \subseteq Q \mid S \cap F \neq \emptyset\}$$

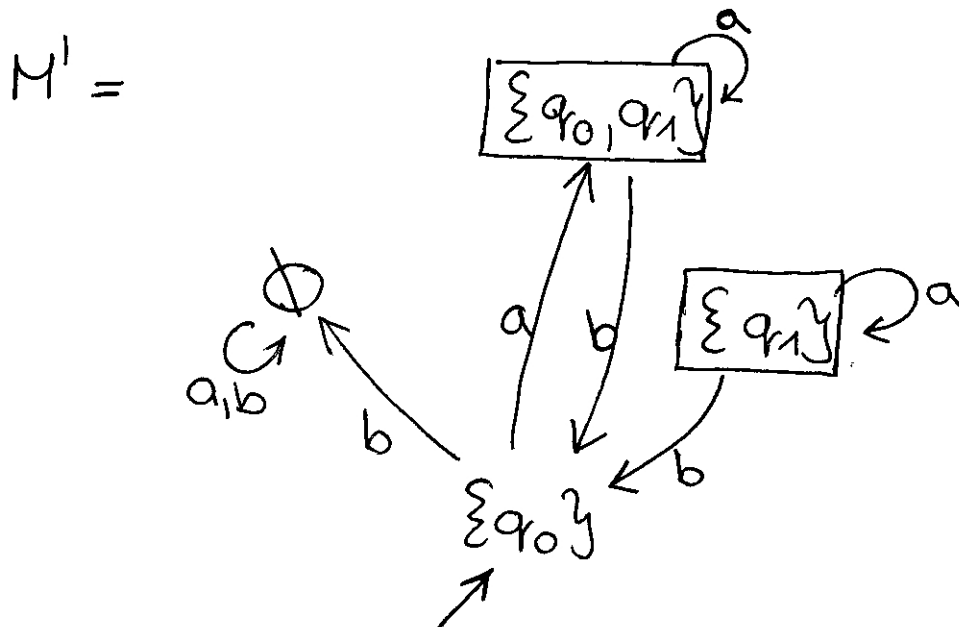
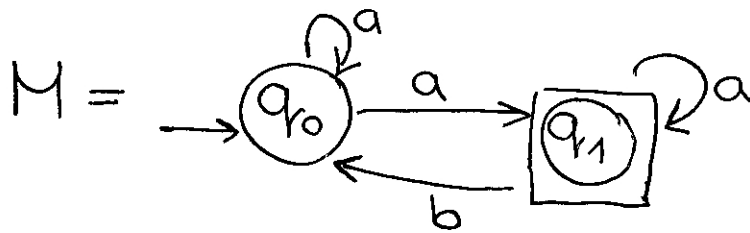
$\delta' : Q' \times \Sigma \rightarrow Q'$ az a leképezés, amelyre
tetszőleges $S \in Q'$ és $a \in \Sigma$ esetén

$$\delta'(S, a) = \bigcup_{q \in S} \delta(q, a)$$

Példa 1 determinizálásra:

Példa 2 determinizálásra:

17



Teljes Automata:

$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ automata, ahol minden $q \in Q$
és $a \in \Sigma$ esetén a $\delta(q, a)$ halmaz legalább egy elemű.

Automata teljessé tétele:

Bemenet: $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ Automata

Kimenet: $M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0, F)$ Teljes Automata

amelyre: $L(M) = L(M')$

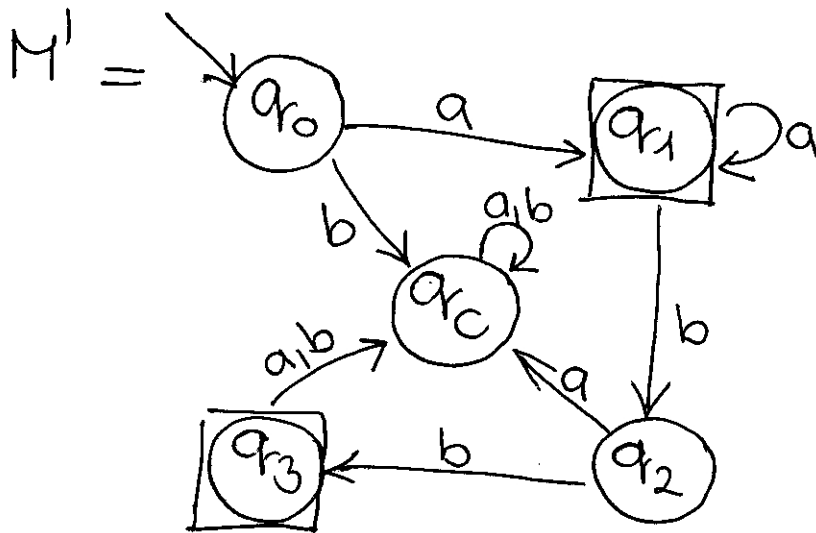
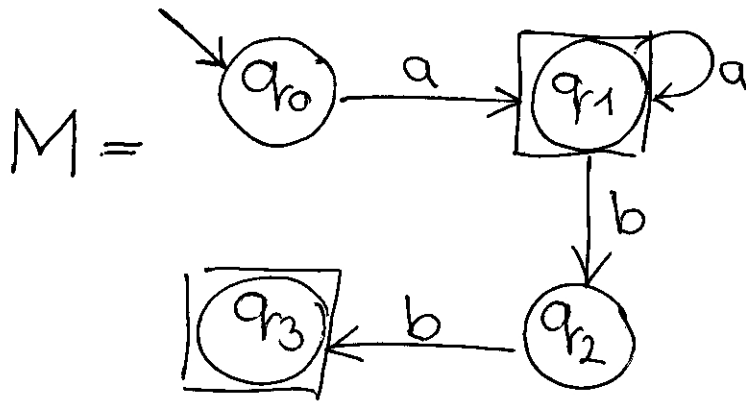
továbbá: $Q' = Q \cup \{q_c\}$, ahol $q_c \notin Q$

minden $q \in Q$ és $a \in \Sigma$ -ra.

$$\delta'(q, a) = \begin{cases} \delta(q, a), & \text{ha } \delta(q, a) \neq \emptyset \\ \{q_c\}, & \text{ha } \delta(q, a) = \emptyset \end{cases}$$

Példa Automata teljessé tételére:

18



Nyelvek konkatenációja:

Legyenek L_1, L_2 nyelvek

$$L_1 L_2 = \{uv \mid u \in L_1, v \in L_2\}$$

Példák:

$$L_1 = \{abba, bb\} \quad L_2 = \{ab, a\} \quad L_3 = \emptyset \quad L_4 = \{\lambda\}$$

$$L_1 L_2 = \{abbaab, abbaa, bbab, bba\}$$

$$L_1 L_3 = \emptyset$$

$$L_1 L_4 = L_1$$

Legyen L egy nyelv. Ekkor $L^* = \{\lambda\} \cup L \cup LL \cup LLL \cup \dots$

Reguláris Kifejezés:

Egy Σ ábécé feletti reguláris kifejezések halmaza a $(\Sigma \cup \{\emptyset, (,), +, *\})^*$ halmaz legszűkebb olyan U részhalmaza, amelyre az alábbi feltételek teljesülnek:

- 1.) $\emptyset \in U$
- 2.) $\forall a \in \Sigma - \text{ra } a \in U$
- 3.) Ha $R_1, R_2 \in U$, akkor $(R_1) + (R_2), (R_1)(R_2), (R_1)^*$ is $\in U$

Példák Reguláris Kifejezésre:

Legyen $\Sigma = \{a, b\}$

$$R_1 = ((a) + (b))^* \quad R_2 = ((a)(b))^* \quad R_3 = (((a) + (b))^* + ((a)(b)))$$

$$R_4 = (((((a)(b))(b))^*) + (a)^*)$$

Egyszerűbben (a zárójelezést megfelelő módon elhagyva):

$$R_1 \equiv (a+b)^* \quad R_2 \equiv (ab)^* \quad R_3 \equiv (a+b)^* + ab$$

$$R_4 \equiv (abbb)^* + a^*$$

Reguláris Kifejezés által meghatározott nyelv:

Legyen R egy Σ ábécé feletti reguláris kifejezés. Ekkor az R által meghatározott nyelven azt az $|R| \subseteq \Sigma^*$ nyelvet értjük, amelyre a következők teljesülnek:

- 1) Ha $R = a \in \Sigma$, akkor $|R| = \{a\}$
- 2) Ha $R = \emptyset$ (mint szimbólum), akkor $|R| = \emptyset$
- 3) Ha $R = (R_1) + (R_2)$, akkor $|R| = |R_1| \cup |R_2|$
- Ha $R = (R_1)(R_2)$, akkor $|R| = |R_1||R_2|$
- Ha $R = (R_1)^*$, akkor $|R| = |R_1|^*$

Példák Reguláris Kifejezés által meghatározott nyelvre:

$$R_1 = (aba)^* + b^*$$

$$|R_1| = |(aba)^*| \cup |b^*| = |aba|^* \cup |b|^*$$

$$|b| = \{b\} \quad |b|^* = \{b\}^* = \{\lambda, b, bb, bbb, \dots\}$$

$$|aba| = |ab||a| = |a||b||a| = \{a\}\{b\}\{a\} = \\ = \{ab\}\{a\} = \{aba\}$$

$$|aba|^* = \{aba\}^* = \{\lambda, aba, abaaba, abaabaaba, \dots\}$$

$$|R_1| = \{\lambda, b, bb, bbb, \dots\} \cup \{\lambda, aba, abaaba, \dots\}$$

$$R_2 = (ab)^* + (ba)^* + a^*b$$

$$|R_2| = |(ab)^*| \cup |(ba)^*| \cup |a^*b| = |ab|^* \cup |ba|^* \cup |a^*b|$$

$$|ab| = |a||b| = \{a\}\{b\} = \{ab\}$$

$$|ab|^* = \{ab\}^* = \{\lambda, ab, abab, ababab, \dots\}$$

$$|ba| = |b||a| = \{b\}\{a\} = \{ba\}$$

$$|ba|^* = \{ba\}^* = \{\lambda, ba, baba, bababa, \dots\}$$

$$|a^*b| = |a^*||b| = |a|^*|b|$$

$$|a| = \{a\} \quad |a|^* = \{a\}^* = \{\lambda, a, aa, aaa, \dots\}$$

$$|b| = \{b\}$$

$$|a|^*|b| = \{\lambda, a, aa, \dots\}\{b\} = \{b, ab, aab, aaab, aaaaab, \dots\}$$

Feladatok:

- 25.) Adjuk meg az $(a^*b^* + ba^*)$ reguláris kifejezés által meghatározott nyelvet !
- 26.) Adjuk meg a $((ba)^*(ab))$ reguláris kifejezés által meghatározott nyelvet !
- 27.) Adjuk meg az $(a^*b^*a^*)$ reguláris kifejezés által meghatározott nyelvet !
- 28.) Adjuk meg az $(ab^*a + ba^*b)$ reguláris kifejezés által meghatározott nyelvet !
- 29.) Adjuk meg az $(a^* + (a^*)^* + b)$ reguláris kifejezés által meghatározott nyelvet !
- 30.) Adjuk meg az $(a + b^* + a)$ reguláris kifejezés által meghatározott nyelvet !
-

Pumpáló Lemma Reguláris Nyelvekre:

Minden $L \subseteq \Sigma^*$ Reguláris Nyelv esetén megadható olyan L -től függő $k > 0$ egész szám, hogy minden $w \in L$ -re, ha $|w| \geq k$, akkor vannak olyan $w_1, w_2, w_3 \in \Sigma^*$ szavak, melyekre teljesülnek az alábbi feltételek:

1.) $w = w_1 w_2 w_3$

2.) $0 < |w_2| \leq k$

3.) $\forall n \geq 0$ -ra $w_1 w_2^n w_3 \in L$

Bizonyítsuk be, hogy az $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ nyelv nem reguláris!

Bizonyítás (indirekt módon):

1.) Tegyük fel, hogy L reguláris.

Ekkor van olyan $k > 0$ egész szám, amelyre a Pumpáló Lemma feltételei teljesülnek.

2.) Tekintsük az $a^k b^k \in L$ szót.

Nyilvánvaló, hogy $|a^k b^k| = 2k > k$.

3.) Ekkor a Pumpáló Lemma miatt vannak olyan

$w_1, w_2, w_3 \in \{a, b\}^*$ szavak, hogy

a.) $a^k b^k = w_1 w_2 w_3$

b.) $0 < |w_2| \leq k$

c.) $\forall n \geq 0$ -ra $w_1 w_2^n w_3 \in L$

4.) Vizsgáljuk meg w_2 elhelyezkedését $a^k b^k$ -ban

1. eset : w_2 csak a betűt tartalmaz.

Ekkor $w_1 w_2^3 w_3$ -ban több az a betű

mint b, ezért $w_1 w_2^3 w_3 \notin L$ $\downarrow$

2. eset : w_2 csak b betűt tartalmaz.

Hasonlóképpen az 1. esethez: $w_1 w_2^3 w_3 \notin L$

3. eset : w_2 a és b betűt is tartalmaz.

Ekkor $w_1 w_2^2 w_3$ -ban b betűt fog követni

a betű, ezért $w_1 w_2^2 w_3 \notin L$ $\downarrow$

5.) Több eset nincs. Mivel nem találtunk olyan w_1, w_2, w_3 szavakat, amelyek kielégítik a Pumpáló Lemma feltételeit, ezért az indukciós feltevés hamis, vagyis L nem reguláris.

Példa 2 Pumpáló Lemma használatára:

Bizonyítsuk be, hogy az $L = \{a^p \mid p \text{ prím}\}$ nyelv nem reguláris!

Bizonyítás (indirekt módon):

1.) Tegyük fel, hogy L reguláris.
Ekkor van olyan $k > 0$ egész szám, amelyre a Pumpáló Lemma feltételei teljesülnek.

2.) Legyen ℓ prím, és $\ell > k$
Tekintsük az $a^\ell \in L$ szót. $|a^\ell| > k$

3.) Ekkor a Pumpáló Lemma miatt vannak olyan $w_1, w_2, w_3 \in \{a\}^*$ szavak, hogy

$$a.) a^\ell = w_1 w_2 w_3$$

$$b.) 0 < |w_2| \leq k$$

$$c.) \forall n \geq 0 \text{-ra } w_1 w_2^n w_3 \in L$$

4.) Legyen $m = |w_2| > 0$

$$|w_1 w_3| = \ell - m$$

$$|w_1 w_2^n w_3| = \ell - m + n \cdot m = \ell + m(n-1)$$

$$\text{Legyen } n = \ell + 1$$

$$\text{Ekkor } |w_1 w_2^n w_3| = \ell + m \cdot \ell = \ell(1+m)$$

Mivel $m > 0$, ezért $1 + m \geq 2$.

Tehát $|w_1 w_2^n w_3|$ nem prím. $\downarrow$

5.) Ellentmondásra jutottunk, vagyis az indukciós feltevés hamis. Tehát L nem reguláris.

Feladatok:

31.) Bizonyítsuk be, hogy a következő nyelvek nem regulárisak !

$$a.) L = \{ca^n b^n c \mid n \geq 0\}$$

$$b.) L = \{a^n b^{2n} \mid n \geq 0\}$$

$$c.) L = \{a^n b^{\lceil \log n \rceil} \mid n > 0\}$$

$$d.) L = \{a^n b^{2n} c^n \mid n \geq 0\}$$

$$e.) L = \{a^n b^{2^n} \mid n \geq 0\}$$

$$f.) L = \{ab^n c^{\lfloor n/2 \rfloor} \mid n \geq 0\}$$

$$g.) L = \{a^{n^2} \mid n \geq 0\}$$

$$h.) L = \{a^{n^3} \mid n \geq 0\}$$

$$i.) L = \{a^n b^m c^{n+m} \mid n, m \geq 0\}$$

$$j.) L = \{a^n b^m c^{n \cdot m} \mid n, m \geq 0\}$$

$$k.) L = \{a^n b^m c^{|n-m|} \mid n, m \geq 0\}$$

$$l.) L = \{a^n b^m \mid n, m \geq 0, n > m\}$$

$$m.) L = \{a^n b^m c^{\lfloor n/m \rfloor} \mid n \geq 0, m \geq 1\}$$

Bizonyítsuk be, hogy az $L = \{ a^{n^2} \mid n \geq 0 \} \subseteq \Sigma^*$ $\Sigma = \{ a \}$ Nyelv nem Reguláris !

1.) Tegyük fel, hogy L Reguláris. Ekkor van olyan $k > 0$ egész szám, amelyre a Pumpáló Lemma feltételei teljesülnek.

2.) Tekintsük az $a^{k^2} \in L$ szót!

Nyilvánvaló, hogy $|a^{k^2}| = k^2 > k$.

3.) Ekkor a Pumpáló Lemma miatt vannak olyan $w_1, w_2, w_3 \in \Sigma^*$ szavak, hogy

a.) $w = a^{k^2} = w_1 w_2 w_3$

b.) $0 < |w_2| \leq k$

c.) $\forall n \geq 0$ esetén $w_1 w_2^n w_3 \in L$

4.) Legyen $|w_2| = m$.

Ekkor $|w_1 w_3| = k^2 - m$.

A Pumpáló Lemma miatt $|w_1 w_2^2 w_3|$ is négyzetszám kell legyen.

$$|w_1 w_2^2 w_3| = |w_1 w_3| + |w_2|^2 = k^2 - m + 2m = k^2 + m.$$

Viszont k^2 után a következő négyzetszám a $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$

A harmadik lépésben viszont kikötöttük, hogy $|w_2| \leq k$.

Vagyis: $m \leq k$. Tehát nyilvánvaló, hogy $m \leq 2k + 1$.

$$\text{Tehát } k^2 < k^2 + m < k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2.$$

Mivel $k^2 + m$ két négyzetszám között van, ezért nem lehet négyzetszám.

Vagyis ellentmondásra jutottunk!

5.) Tehát az indukciós feltétel hamis!

Vagyis L nem Reguláris.

Bizonyítsuk be, hogy az $L = \{ a^{2^n} \mid n \geq 0 \} \subseteq \Sigma^*$ $\Sigma = \{ a \}$ Nyelv nem Reguláris !

1.) Tegyük fel, hogy L Reguláris. Ekkor van olyan $k > 0$ egész szám, amelyre a Pumpáló Lemma feltételei teljesülnek.

2.) Tekintsük az $a^{2^k} \in L$ szót!

Nyilvánvaló, hogy $|a^{2^k}| = 2^k > k$.

3.) Ekkor a Pumpáló Lemma miatt vannak olyan $w_1, w_2, w_3 \in \Sigma^*$ szavak, hogy

a.) $w = a^{2^k} = w_1 w_2 w_3$

b.) $0 < |w_2| \leq k$

c.) $\forall n \geq 0$ esetén $w_1 w_2^n w_3 \in L$

4.) Legyen $|w_2| = m$.

Ekkor $|w_1 w_3| = 2^k - m$.

A Pumpáló Lemma miatt $|w_1 w_2^2 w_3|$ is kettő hatvány kell legyen.

$$|w_1 w_2^2 w_3| = |w_1 w_3| + |w_2|^2 = 2^k - m + 2m = 2^k + m.$$

Viszont 2^k után a következő kettő hatvány a $2^{(k+1)} = 2 \times 2^k = 2^k + 2^k$.

A harmadik lépésben viszont kikötöttük, hogy $|w_2| \leq k$.

Vagyis: $m \leq k$. Tehát nyilvánvaló, hogy $m \leq 2^k$.

$$\text{Tehát } 2^k < 2^k + m < 2^k + 2^k = 2^{(k+1)}.$$

Mivel $2^k + m$ két kettő hatvány között van, ezért nem lehet kettő hatvány.

Vagyis ellentmondásra jutottunk!

5.) Tehát az indukciós feltétel hamis!

Vagyis L nem Reguláris.

Bizonyítsuk be, hogy az $L = \{ a^n b^m \mid n, m \geq 0, n > m \} \subseteq \Sigma^*$ $\Sigma = \{ a, b \}$ Nyelv nem Reguláris !

1.) Tegyük fel, hogy L Reguláris. Ekkor van olyan $k > 0$ egész szám, amelyre a Pumpáló Lemma feltételei teljesülnek.

2.) Tekintsük az $a^{(k+1)}b^k$ szót!

Nyilvánvaló, hogy $|a^{(k+1)}b^k| = 2k + 1 > k$.

És mivel a szóban valahány a betű után kevesebb b jön, ezért $a^{(k+1)}b^k \in L$.

3.) Ekkor a Pumpáló Lemma miatt vannak olyan $w_1, w_2, w_3 \in \Sigma^*$ szavak, hogy

a.) $w = a^{(k+1)}b^k = w_1 w_2 w_3$

b.) $0 < |w_2| \leq k$

c.) $\forall n \geq 0$ esetén $w_1 w_2^n w_3 \in L$

4.) Vizsgáljuk meg w_2 elhelyezkedését $a^{(k+1)}b^k$ -ban.

a.) w_2 -ben csak b betű van

Ekkor viszont $w_1 w_2^2 w_3$ -ban nem lesz több a mint b.

b.) w_2 -ben a és b betű is van

Ekkor viszont $w_1 w_2^2 w_3$ -ban a betű fog jönni b után.

c.) w_2 -ben csak a betű van

Ekkor vizsgáljuk meg a $w_1 w_2^0 w_3$ szót! Ha $a^{(k+1)}b^k$ -ből akár csak egyetlen egy a betűt is elhagyunk – márpedig mivel a w_2 -t 0-szor vesszük, ezért most pont ez történik – akkor megint csak nem lesz több a betű a szóban, mint b.

5.) Minden eset ellentmondásra vezetett. Tehát az indukciós feltétel hamis!

Vagyis L nem Reguláris.

Bizonyítsuk be, hogy az $L = \{ a^n b^m c^{\lfloor n/m \rfloor} \mid n \geq 0, m \geq 1 \} \subseteq \Sigma^*$ $\Sigma = \{ a, b, c \}$ Nyelv nem Reguláris !

1.) Tegyük fel, hogy L Reguláris. Ekkor van olyan $k > 0$ egész szám, amelyre a Pumpáló Lemma feltételei teljesülnek.

2.) Tekintsük az $a^{2k} b^k c c$ szót!

Nyilvánvaló, hogy $|a^{2k} b^k c c| = 3k + 2 > k$.

És mivel $\frac{2k}{k} = 2$ db c betű jön a b betűk után, ezért $a^{2k} b^k c c \in L$.

3.) Ekkor a Pumpáló Lemma miatt vannak olyan $w_1, w_2, w_3 \in \Sigma^*$ szavak, hogy

a.) $w = a^{2k} b^k c c = w_1 w_2 w_3$

b.) $0 < |w_2| \leq k$

c.) $\forall n \geq 0$ esetén $w_1 w_2^n w_3 \in L$

4.) Vizsgáljuk meg w_2 elhelyezkedését $a^{2k} b^k c c$ -ban.

a.) w_2 -ben csak c betű van

Ekkor viszont $w_1 w_2^2 w_3$ -ban több c lesz mint az a és b betűk hányadosa.

b.) w_2 -ben csak b betű van

Ekkor viszont $w_1 w_2^2 w_3$ -ban k-nál több b betű lesz. És $2k$ és egy k-nál nagyobb szám hányadosának alsó egészrésze kisebb lesz, mint 2, vagyis több c betűnk lesz a kelleténél.

c.) w_2 -ben csak a betű van

Ekkor vizsgáljuk meg a $w_1 w_2^{(k+1)} w_3$ szót! Ha csak egy a betűt is $(k+1)$ -szer veszek, akkor az a betűk száma tuti nagyobb vagy egyenlő lesz, mint $3k$. És egy $3k$ -nál nagyobb vagy egyenlő, és k hányadosának alsó egészrésze nagyobb lesz, mint 2, vagyis kevesebb c betűnk lesz a kelleténél.

d.) w_2 -ben többfajta betű is van

Ekkor viszont nyilván a betűk sorrendje nem lesz jó.

5.) Minden eset ellentmondásra vezetett. Tehát az indukciós feltétel hamis!

Vagyis L nem Reguláris.

$A \ G = (N, \Sigma, P, S)$ nyelvtan környezetfüggetlen,
 ha minden P -beli szabály $A \rightarrow \alpha$ alakú, ahol $A \in N$, $\alpha \in (N \cup \Sigma)^*$.

Tehát míg egy generatív nyelvtanban lehetnek ilyen alakú szabályok: $aAaa \rightarrow bAaa$, $Aa \rightarrow aAa$, $BaA \rightarrow BaAa$, $AB \rightarrow AaBa$ addig a környezetfüggetlen nyelvtanokban a szabályok jobb oldalán már csak egyetlen egy szimbólum állhat, méghozzá egy nemterminális szimbólum.

Példa Környezetfüggetlen Nyelvtanra:

$$G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aSa, S \rightarrow bSb, S \rightarrow a, S \rightarrow b\}, S)$$

$$L(G) = \{w\gamma w^{-1} \mid w \in \{a, b\}^*, \gamma \in \{a, b\}\}$$

λ -mentesség :

$A \ G = (N, \Sigma, P, S)$ környezetfüggetlen nyelvtan λ -mentes,
 ha P nem tartalmaz $A \rightarrow \lambda$ alakú szabályokat, kivéve esetleg
 az $S \rightarrow \lambda$ alakú szabályt. Ha azonban $S \rightarrow \lambda \in P$, akkor
 S nem szerepelhet semmelyik P -beli szabály jobb oldalán.

Tétel : Tetszőleges $G = (N, \Sigma, P, S)$ cf nyelvtan-

26

hoz megkonstruálható vele ekvivalens λ -mentes

$G' = (N', \Sigma', P', S')$ cf nyelvtan, amire $L(G) = L(G')$.

Az algoritmus:

Bemenet : $G = (N, \Sigma, P, S)$ cf nyelvtan

Kimenet : $G' = (N', \Sigma', P', S')$ λ -mentes cf nyelvtan

- 1.) Legyen $H = \{A \in N \mid A \Rightarrow^* \lambda\}$
- 2.) Legyen P_1 az a legszűkebb halmaz, amelyre a következő teljesülnek:

$\forall A \rightarrow \alpha \in P$ -re, ha $\alpha \neq \lambda$, akkor
 $\forall$ olyan $A \rightarrow \alpha_1 \in P_1$, ahol $\alpha_1 \neq \lambda$
és α_1 úgy keletkezik α -ból, hogy
töröljük belőle a H -beli nemterminálisok
0 vagy több előfordulását.

- 3.) Ha $\lambda \notin L(G)$, akkor $G' = (N, \Sigma, P_1, S)$,
különben $G' = (N \cup \{S'\}, \Sigma, P_1 \cup \{S' \Rightarrow S, S' \Rightarrow \lambda\}, S')$

Példa λ -mentesítésre:

27

Legyen $G = (\Sigma S, A, B, C, D, E, F, \Sigma a, b, c, d, e, f, g, h, P, S)$

ahol $P = \{ S \rightarrow aSa, S \rightarrow bSb, S \rightarrow \lambda, S \rightarrow cAc, S \rightarrow E, \\ A \rightarrow ccAcc, A \rightarrow \lambda, A \rightarrow BDCeee, \\ B \rightarrow ddB, B \rightarrow f, \\ C \rightarrow Ceee, C \rightarrow \lambda, \\ D \rightarrow fDf, D \rightarrow \lambda, \\ E \rightarrow gEgg, E \rightarrow F, \\ F \rightarrow hhFhh, F \rightarrow \lambda \}$

Nyilvánvaló, hogy G környezetfüggetlen.

Legyen H -ban minden olyan nemterminális szimbólum, amiből levezethető λ

$H = \{ S, A, C, D, E, F \}$

Ekkor $P_1 = \{ S \rightarrow aSa, S \rightarrow aa, S \rightarrow bSb, S \rightarrow bb, \\ S \rightarrow cAc, S \rightarrow cc, S \rightarrow E, A \rightarrow ccAcc, \\ A \rightarrow cccc, A \rightarrow BDCeee, A \rightarrow BCeee, \\ A \rightarrow BDeee, A \rightarrow Beee, B \rightarrow ddB, B \rightarrow f, \\ C \rightarrow Ceee, C \rightarrow eee, D \rightarrow fDf, D \rightarrow f, \\ E \rightarrow gEgg, E \rightarrow ggg, E \rightarrow F, F \rightarrow hhFhh, F \rightarrow hhhh \}$

Mivel $\lambda \in L(G)$, ezért

$G' = (N \cup \{ S' \}, \Sigma, P_1 \cup \{ S' \rightarrow S, S' \rightarrow \lambda \}, S')$

Egy nyelvtanban az $A \rightarrow B$ alakú szabályokat láncszabályoknak nevezzük.

Chmosky-normálforma:

Egy $G = (N, \Sigma, P, S)$ cf nyelvtan Chmosky-normálformájú, ha λ -mentes és P -ben csak $S \rightarrow \lambda$, $A \rightarrow BC$, $A \rightarrow a$ alakú szabályok vannak, ahol $S, A, B, C \in N$, $a \in \Sigma$.

Tétel: Minden $G = (N, \Sigma, P, S)$ cf nyelvtanhoz van vele ekvivalens Chmosky-normálformájú

$G' = (N', \Sigma, P', S)$ cf nyelvtan, amire $L(G) = L(G')$.

Az algoritmus:

Bemenet: $G = (N, \Sigma, P, S)$ cf λ - és láncszabálymentes nyelvtan

Kimenet: $G' = (N', \Sigma, P', S)$ cf Chmosky-normálformájú nyelvtan

1.) Legyen $G_1 = (N_1, \Sigma, P_1, S)$, ahol

$$N_1 = N \cup \{a' \mid a \in \Sigma\}$$

P_1 a legszűkebb halmaz, amire:

* ha $S \rightarrow \lambda \in P$, akkor $S \rightarrow \lambda \in P_1$

* ha $A \rightarrow a \in P$, akkor $A \rightarrow a \in P_1$

* ha $A \rightarrow X_1 \dots X_n \in P$, ahol $n \geq 2$, akkor

$A \rightarrow X_1' \dots X_n' \in P_1$, ahol

$$X_i' = \begin{cases} X_i, & \text{ha } X_i \in N \\ a', & \text{ha } X_i = a \in \Sigma \end{cases}$$

* $\forall a \in \Sigma$ -ra $a' \rightarrow a \in P_1$

2.) Legyen $G' = (N', \Sigma, P', S)$, ahol P' a legrövidebb olyan halmaz, amelyre a következők teljesülnek:

- * ha $S \rightarrow \lambda \in P_1$, akkor $S \rightarrow \lambda \in P'$
- * ha $A \rightarrow a \in P_1$, akkor $A \rightarrow a \in P'$
- * ha $A \rightarrow BC \in P_1$, akkor $A \rightarrow BC \in P'$
- * ha $A \rightarrow A_1 \dots A_n (n > 2) \in P_1$, akkor az

$$\begin{aligned} & A \rightarrow A_1 [A_2 \dots A_n], \\ & [A_2 \dots A_n] \rightarrow A_2 [A_3 \dots A_n], \\ & \vdots \\ & [A_{n-1} A_n] \rightarrow A_{n-1} A_n \end{aligned}$$

szabályok P' -ben vannak, ahol

$[A_2 \dots A_n], \dots, [A_{n-1} A_n]$ új nemterminálisok

$$N' = N_1 \cup \{ \text{új nemterminálisok} \}$$

Példa Chomsky-normálformára hozásra:

Legyen $G = (\{S, A, B, C, D, E, F\}, \{a, b, c, d, e, f, q\}, P, S)$,

ahol $P = \{ S \rightarrow ABCD, A \rightarrow aaaaA, A \rightarrow q, B \rightarrow bbB, B \rightarrow q, C \rightarrow cC, C \rightarrow q, D \rightarrow ddddD, D \rightarrow qEF, E \rightarrow eeE, E \rightarrow q, F \rightarrow fF, F \rightarrow q \}$

$$N_1 = N \cup \{a', b', c', d', e', f', q'\}$$

$$P_1 = \{ A \rightarrow q, B \rightarrow q, C \rightarrow q, E \rightarrow q, F \rightarrow q, \\ S \rightarrow ABCD, A \rightarrow dda'A, B \rightarrow b'b'B, C \rightarrow c'C, \\ D \rightarrow d'd'd'D, D \rightarrow q'EF, E \rightarrow e'e'E, F \rightarrow g'F, \\ a' \rightarrow a, b' \rightarrow b, c' \rightarrow c, d' \rightarrow d, e' \rightarrow e, g' \rightarrow g, q' \rightarrow q \}$$

$$P' = \{ A \rightarrow q, B \rightarrow q, C \rightarrow q, E \rightarrow q, F \rightarrow q, \\ S \rightarrow A[BCD], [BCD] \rightarrow B[CD], [CD] \rightarrow CD, \\ A \rightarrow a'[ab'A], [ab'A] \rightarrow a'[a'A], [a'A] \rightarrow a'A, \\ B \rightarrow b'[b'B], [b'B] \rightarrow b'B, C \rightarrow c'C, \\ D \rightarrow d'[d'dd'D], [d'dd'D] \rightarrow d'[d'd'D], [d'd'D] \rightarrow d'[d'D], \\ [d'D] \rightarrow d'D, D \rightarrow q'[EF], [EF] \rightarrow EF, E \rightarrow e'[e'E], \\ [e'E] \rightarrow e'E, F \rightarrow g'F, \\ a' \rightarrow a, b' \rightarrow b, c' \rightarrow c, d' \rightarrow d, e' \rightarrow e, g' \rightarrow g, q' \rightarrow q \}$$

$$N' = N_1 \cup \{ [BCD], [CD], [ab'A], [a'A], [b'B], [d'dd'D], \\ [d'd'D], [d'D], [EF], [e'E] \}$$

$$G = (N', \Sigma, P', S)$$

Veremautomaták

$$P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F), \text{ ahol}$$

- Q véges állapothalmaz
- Σ input abc
- Γ verem abc
- $q_0 \in Q$ a kezdőállapot
- $Z_0 \in \Gamma$ a kezdő veremszimbólum
- $F \subseteq Q$ a végállapotok halmaza
- $\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma \rightarrow P_f(Q \times \Gamma^*)$ az átmenetfgv.

Tetszőleges $q \in Q$, $a \in (\Sigma \cup \{\lambda\})$ és $Z \in \Gamma$ esetén

$$\delta(q, a, Z) = \{(q_1, d_1), \dots, (q_n, d_n)\}, \text{ ahol } n \geq 0, \text{ és}$$

$$q_1, \dots, q_n \in Q \text{ és } d_1, \dots, d_n \in \Gamma^*.$$

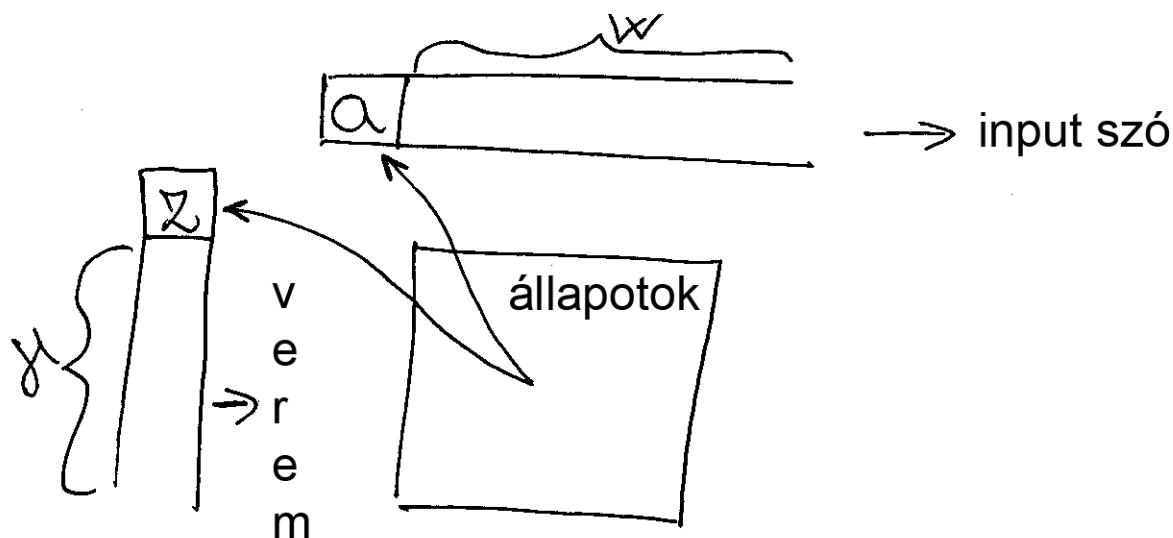
A $C = Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$ halmazt a P konfigurációi halmazának nevezzük.

Egy $(q, w, \gamma) \in C$ konfiguráció jelentése:

p a $q \in Q$ állapotban van, a $w \in \Sigma^*$ szót kapja inputként és a vermenek tartalma γ .

A konfigurációt $(q, aw, Z\gamma)$ alakban is megadhatjuk, ahol $q \in Q$, $a \in (\Sigma \cup \Sigma^{-1})$, $w \in \Sigma^*$, $Z \in \Gamma$, $\gamma \in \Gamma^*$

Veremautomata működése:



Átmeneti reláció:

Jele : $\vdash_p$.

$\vdash_p \subseteq C \times C$. Tetszőleges $p, q \in Q$, $a \in (\Sigma \cup \Sigma^{-1})$, $w \in \Sigma^*$, $Z \in \Gamma$, és $\alpha, \gamma \in \Gamma^*$ -ra:

$(q, aw, Z\gamma) \vdash_p (p, w, \alpha\gamma)$, ha $(p, \alpha) \in \delta(q, a, Z)$

Legyen $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ egy veremautomata

133

P által végállapotokkal felismert nyelv:

$$L_f(P) = \{ w \in \Sigma^* \mid (q_0, w, Z_0) \vdash_P^* (q, \lambda, \gamma), \text{ ahol } q \in F, \gamma \in \Gamma^* \}$$

P által üres veremmel felismert nyelv:

$$L_\emptyset(P) = \{ w \in \Sigma^* \mid (q_0, w, Z_0) \vdash_P^* (q, \lambda, \lambda), \text{ ahol } q \in Q \}$$

Példa 1 veremautomatára:

$$P_1 = (\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{Z_0, Z_b\}, \delta, q_0, Z_0, \emptyset), \text{ ahol}$$

$$\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, Z_b Z_b Z_0)\}$$

$$\delta(q_0, a, Z_b) = \{(q_0, Z_b Z_b Z_b)\}$$

$$\delta(q_0, b, Z_b) = \{(q_1, \lambda)\}$$

$$\delta(q_1, b, Z_b) = \{(q_1, \lambda)\}$$

$$\delta(q_1, \lambda, Z_0) = \{(q_1, \lambda)\}$$

$$\delta(q_0, \lambda, Z_0) = \{(q_0, \lambda)\}$$

$$(q_0, \underline{a}abbbb, \underline{Z_0}) \vdash_P (q_0, \underline{a}bbbb, \underline{Z_b Z_b Z_0}) \vdash_P (q_0, \underline{b}bbb, \underline{Z_b Z_b Z_b})$$

$$\vdash_P (q_1, \underline{b}bbb, \underline{Z_b Z_b Z_b Z_0}) \vdash_P (q_1, \underline{b}b, \underline{Z_b Z_b Z_0}) \vdash_P (q_1, \underline{b}, \underline{Z_b Z_0})$$

$$\vdash_P (q_1, \lambda, Z_0) \vdash_P (q_1, \lambda, \lambda)$$

Veremautomatával végállapotokkal felismerhető nyelvek osztálya megegyezik a veremautomatával üres veremmel felismerhető nyelvek osztályával, azonban egy konkrét P veremautomatára általában $L_g(P) \neq L_\emptyset(P)$

Vagyis: $\{L \mid L = L_g(P) \text{ valamely } P \text{ veremautomatára}\}$
 $\parallel$
 $\{L \mid L = L_\emptyset(P) \text{ valamely } P \text{ veremautomatára}\}$

$$L_\emptyset(P_1) = \{a^n b^{2n} \mid n \geq 0\}$$

$$L_g(P_1) = \emptyset, \text{ mert nincs is végállapota}$$

Példa 2 veremautomatára:

$$\text{Legyen } L = \{w c w^{-1} \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

Adjunk meg egy olyan P_2 veremautomatát, amelyre $L_\emptyset(P_2) = L$

$$P_2 = (\{q_0, q_1\}, \{a, b, c\}, \{z_0, z_a, z_b\}, \sigma, q_0, z_0, \emptyset), \text{ ahol}$$

$$\sigma(q_0, a, z_0) = \{(q_0, z_0)\}$$

$$\sigma(q_0, b, z_0) = \{(q_0, z_b)\}$$

$$\sigma(q_0, a, z_a) = \{(q_0, z_a z_a)\}$$

$$\sigma(q_0, a, z_b) = \{(q_0, z_a z_b)\}$$

$$\sigma(q_0, b, z_a) = \{(q_0, z_b z_a)\}$$

$$\sigma(q_0, b, z_b) = \{(q_0, z_b z_b)\}$$

$$\sigma(q_0, c, z_b) = \{(q_1, z_b)\}$$

$$\sigma(q_0, c, z_a) = \{(q_1, z_a)\}$$

$$\sigma(q_1, b, z_b) = \{(q_1, \lambda)\}$$

$$\sigma(q_1, a, z_a) = \{(q_1, \lambda)\}$$

$$\sigma(q_0, c, z_0) = \{(q_0, \lambda)\}$$

Másik megoldás:

$$P_2 = (\{q_0\}, \{a, b, c\}, \{z_0, z_a, z_b\}, \delta, q_0, z_0, \emptyset), \text{ ahol}$$

$$\delta(q_0, a, z_0) = \{(q_0, z_0 z_a)\}$$

$$\delta(q_0, b, z_0) = \{(q_0, z_0 z_b)\}$$

$$\delta(q_0, c, z_0) = \{(q_0, \lambda)\}$$

$$\delta(q_0, b, z_a) = \{(q_0, \lambda)\}$$

$$\delta(q_0, a, z_a) = \{(q_0, \lambda)\}$$

Példa 3 veremautomatára:

Legyen $L = \{a^{2n}b^n \mid n \geq 0\}$

Adjunk meg egy olyan P_3 veremautomatát, amire $L(P_3) = L$

$$P_3 = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \{z_0, z_a\}, \delta, q_0, z_0, \emptyset)$$

ahol $\delta(q_0, a, z_0) = \{(q_1, z_a z_0)\}$

$$\delta(q_1, a, z_a) = \{(q_0, z_a)\}$$

$$\delta(q_0, a, z_a) = \{(q_1, z_a z_a)\}$$

$$\delta(q_0, b, z_a) = \{(q_2, \lambda)\}$$

$$\delta(q_2, b, z_a) = \{(q_2, \lambda)\}$$

$$\delta(q_2, \lambda, z_0) = \{(q_2, \lambda)\}$$

Példa 4 veremautomatára:

136

$$\text{Legyen } L = \{a^n b^m \mid n < m, n, m \geq 0\}$$

Adjunk meg egy olyan P_H veremautomatát, amelyre $L_g(P_H) = L$

$$P_H = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \{z_0, z_a\}, \delta, q_0, z_0, \{q_2\})$$

$$\delta(q_0, a, z_0) = \{(q_0, a, z_a z_0)\}$$

$$\delta(q_0, a, z_a) = \{(q_0, a, z_a z_a)\}$$

$$\delta(q_0, b, z_a) = \{(q_1, \lambda)\}$$

$$\delta(q_1, b, z_a) = \{(q_1, \lambda)\}$$

$$\delta(q_1, b, z_0) = \{(q_2, z_0)\}$$

$$\delta(q_0, b, z_0) = \{(q_2, z_0)\}$$

$$\delta(q_2, b, z_0) = \{(q_2, z_0)\}$$

Feladatok:

32) Adjunk meg egy-egy olyan veremautomatát, ami üres veremmel és egy-egy olyat ami végállapotokkal ismeri fel a következő nyelveket:

a) $L = \{a^n b^m \mid n < 2m, n, m \geq 0\} \subseteq \Sigma^*, \Sigma = \{a, b\}$

b) $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \subseteq \Sigma^*, \Sigma = \{a, b\}$

c) $L = \{w \mid w \in \Sigma^*, |w|_a = |w|_b\} \subseteq \Sigma^*, \Sigma = \{a, b\}$

d) $L = \{a^n b^m c^n \mid n, m \geq 0\} \subseteq \Sigma^*, \Sigma = \{a, b, c\}$

e) $L = \{a^n b^m c^{n+m} \mid n, m \geq 0\} \subseteq \Sigma^*, \Sigma = \{a, b, c\}$

f) $L = \{a^n b^m c^k \mid n, m, k \geq 0, (n=m \text{ vagy } m=k)\} \subseteq \{a, b, c\}^*$

g) $L = \{a^n b^m \mid n, m \geq 0, n \neq m\} \subseteq \Sigma^*, \Sigma = \{a, b\}$

- h) $L = \{a^{n+m}b^n c^m \mid n, m \geq 0\} \subseteq \Sigma^*, \Sigma = \{a, b, c\}$ 137
- i) $L = \{a^{2n}b^{3n} \mid n \geq 0\} \subseteq \Sigma^*, \Sigma = \{a, b\}$
- j) $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, 2 \cdot |w|_a = 3 \cdot |w|_b\} \subseteq \{a, b\}^*$
- k) $L = \{a^{2n+1}b^{3n+2} \mid n \geq 0\} \subseteq \Sigma^*, \Sigma = \{a, b\}$
- l) $L = \{a^n b^m c^{n-m} \mid n, m \geq 0, n \geq m\} \subseteq \Sigma^*, \Sigma = \{a, b, c\}$
- m) $L = \{a^n b^m c^{2n+3m} \mid n, m \geq 0\} \subseteq \Sigma^*, \Sigma = \{a, b, c\}$
- n) $L = \{a^n b^{2n} c^m \mid n, m \geq 0\} \subseteq \Sigma^*, \Sigma = \{a, b, c\}$
- o) $L = \{a^{2n} b^n c^m \mid n, m \geq 0\} \subseteq \Sigma^*, \Sigma = \{a, b, c\}$
- p) $L = \{a^n b^m c^{2n} \mid n, m \geq 0\} \subseteq \Sigma^*, \Sigma = \{a, b, c\}$
- q) $L = \{a^n b^m c^{2(n+m)} \mid n, m \geq 0\} \subseteq \Sigma^*, \Sigma = \{a, b, c\}$
- r) $L = \{a^n b^{n-m} c^m \mid n, m \geq 0\} \subseteq \Sigma^*, \Sigma = \{a, b, c\}$
- s) $L = \{a^n b^{2(n-m)} c^m \mid n, m \geq 0\} \subseteq \Sigma^*, \Sigma = \{a, b, c\}$
- t) $L = \{a^n b^m c^{|n-m|} \mid n, m \geq 0\} \subseteq \Sigma^*, \Sigma = \{a, b, c\}$
- u) $L = \{a^n b^{\lfloor n/2 \rfloor} \mid n \geq 0\} \subseteq \Sigma^*, \Sigma = \{a, b\}$
- v) $L = \{a^n c^m b^{\lfloor (m+n)/2 \rfloor} \mid n, m \geq 0\} \subseteq \Sigma^*, \Sigma = \{a, b, c\}$
- w) $L = \{a^n c^m b^{\lfloor |n-m|/2 \rfloor} \mid n, m \geq 0\} \subseteq \Sigma^*, \Sigma = \{a, b, c\}$
- x) $L = \{a^n b^{\lfloor 3n/2 \rfloor} \mid n \geq 0\} \subseteq \Sigma^*, \Sigma = \{a, b\}$
- y) $L = \{a^n b^{2 \cdot \lfloor n/2 \rfloor} \mid n \geq 0\} \subseteq \Sigma^*, \Sigma = \{a, b\}$
- z) $L = \{a^n b^m c^{2 \cdot \lfloor (n+m)/2 \rfloor} \mid n, m \geq 0\} \subseteq \Sigma^*, \Sigma = \{a, b, c\}$

Tétel: Minden cf nyelv felismerhető veremautomatával

Bizonyítás: előadáson

Az algoritmus:

Bemenet: $G = (N, \Sigma, R, S)$ cf nyelvtan

Kimenet: $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z_0, F)$ veremautomata

amelyre:

$$Q = \{q\}$$

$$\Gamma = N \cup \Sigma$$

$$q_0 = q$$

$$z_0 = S$$

$$F = \emptyset$$

$$\delta: \forall A \in N - \epsilon: \delta(q, \lambda, A) = \{(q, \alpha) \mid A \rightarrow \alpha \in R\}$$

$$\forall a \in \Sigma - \epsilon: \delta(q, a, a) = \{(q, \lambda)\}$$

A végeredmény: $L_\epsilon(P) = L(G)$

Példa cf nyelvtanhoz veremautomata készítésére:

$$\text{Legyen } G = (\{S, A\}, \{a, b, c\}, \{S \rightarrow abSba, \\ S \rightarrow A, S \rightarrow cAc, \\ A \rightarrow cc\}, S)$$

$$L(G) = \{(ab)^n c^m (ba)^n \mid n \geq 1, m \in \{2, 4\}\}$$

$$P = (\{q\}, \{a, b, c\}, \{S, A, a, b, c\}, \delta, q, S, \emptyset), \text{ ahol}$$

$$\delta(q, \lambda, S) = \{(q, abSba), (q, A), (q, cAc)\}$$

$$\delta(q, \lambda, A) = \{(q, cc)\} \quad \delta(q, b, b) = \{(q, \lambda)\}$$

$$\delta(q, a, a) = \{(q, \lambda)\} \quad \delta(q, c, c) = \{(q, \lambda)\}$$

Futtassuk le az előbb elkészített P veremautomatát az
ababccbabaa input szón!

$$\begin{aligned}
 (q, \underline{a} \underline{b} \underline{a} \underline{b} \underline{c} \underline{c} \underline{b} \underline{a} \underline{b} \underline{a}, S) &\vdash_P (q, \underline{a} \underline{b} \underline{a} \underline{b} \underline{c} \underline{c} \underline{b} \underline{a} \underline{b} \underline{a}, \underline{a} \underline{b} \underline{S} \underline{b} \underline{a}) \vdash_P \\
 (q, \underline{b} \underline{a} \underline{b} \underline{c} \underline{c} \underline{b} \underline{a} \underline{b} \underline{a}, \underline{b} \underline{S} \underline{b} \underline{a}) &\vdash_P (q, \underline{a} \underline{b} \underline{c} \underline{c} \underline{b} \underline{a} \underline{b} \underline{a}, \underline{S} \underline{b} \underline{a}) \vdash_P \\
 (q, \underline{a} \underline{b} \underline{c} \underline{c} \underline{b} \underline{a} \underline{b} \underline{a}, \underline{a} \underline{b} \underline{S} \underline{b} \underline{a} \underline{b} \underline{a}) &\vdash_P (q, \underline{b} \underline{c} \underline{c} \underline{b} \underline{a} \underline{b} \underline{a}, \underline{b} \underline{S} \underline{b} \underline{a} \underline{b} \underline{a}) \vdash_P \\
 (q, \underline{c} \underline{c} \underline{b} \underline{a} \underline{b} \underline{a}, \underline{S} \underline{b} \underline{a} \underline{b} \underline{a}) &\vdash_P (q, \underline{c} \underline{c} \underline{b} \underline{a} \underline{b} \underline{a}, \underline{A} \underline{b} \underline{a} \underline{b} \underline{a}) \vdash_P \\
 (q, \underline{c} \underline{c} \underline{b} \underline{a} \underline{b} \underline{a}, \underline{c} \underline{c} \underline{b} \underline{a} \underline{b} \underline{a}) &\vdash_P (q, \underline{c} \underline{b} \underline{a} \underline{b} \underline{a}, \underline{c} \underline{b} \underline{a} \underline{b} \underline{a}) \vdash_P \\
 (q, \underline{b} \underline{a} \underline{b} \underline{a}, \underline{b} \underline{a} \underline{b} \underline{a}) &\vdash_P (q, \underline{a} \underline{b} \underline{a}, \underline{a} \underline{b} \underline{a}) \vdash_P (q, \underline{b} \underline{a}, \underline{b} \underline{a}) \vdash_P \\
 (q, \underline{a}, \underline{a}) &\vdash_P \boxed{(q, \lambda, \lambda)}
 \end{aligned}$$

Feladatok:

33) Készítsük el az alábbi cf nyelvtanok által generált nyelveket
 üres veremmel felismerő veremautomatákat, és futtassuk le
 egy $L(G)$ -beli szón!

a) $G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \Rightarrow aSbSa, S \Rightarrow \lambda\}, S)$

b) $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, \{S \Rightarrow ASB, S \Rightarrow \lambda, \\ A \Rightarrow aSb, A \Rightarrow \lambda, \\ B \Rightarrow aBb, B \Rightarrow ba\}, S)$

c) $G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \Rightarrow aSbS, S \Rightarrow bSaS, S \Rightarrow \lambda\}, S)$

d) $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, \{S \Rightarrow aSb, S \Rightarrow A, A \Rightarrow bAa, A \Rightarrow \lambda\}, S)$

e) $G = (\{S, A, B\}, \{a, b, c\}, \{S \Rightarrow ASA, S \Rightarrow c, A \Rightarrow bAb, \\ A \Rightarrow B, B \Rightarrow a, B \Rightarrow c\}, S)$

Tétel: Minden veremautomatával felismerhető nyelv környezetfüggetlen.

Bizonyítás: előadáson

Az algoritmus:

Bemenet: $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ veremautomata

Kimenet: $G = (N, \Sigma, R, S)$ cf nyelvtan

amelyre :

S = új szimbólum

$$N = \{S\} \cup \{[qZr] \mid q, r \in Q, Z \in \Gamma\}$$

R : szabályok olyan legszűkebb halmaza, amire:

$$(1) \forall q \in Q \text{-ra } S \rightarrow [q_0 Z_0 q] \in R$$

$$(2) \forall q \in Q, a \in (\Sigma \cup \{\lambda\}), Z \in \Gamma \text{-ra, ha}$$

$$(s_0, Z_1 \dots Z_k) \in \delta(q, a, Z), \text{ ahol } k \geq 1, \text{ és}$$

$$Z_1, \dots, Z_k \in \Gamma, \text{ akkor minden } s_1, \dots, s_k \in Q$$

sorozatra legyen $[qZs_k] \rightarrow a[s_0 Z_1 s_1] \dots [s_{k-1} Z_k s_k]$ szabály R -ben.

$$(3) \forall q \in Q, a \in (\Sigma \cup \{\lambda\}), Z \in \Gamma \text{-ra, ha}$$

$$(s_0, \lambda) \in \delta(q, a, Z), \text{ akkor legyen } [qZs_0] \rightarrow a \in R$$

Legyen $P = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \{z_0, z_1, z_2\}, \delta, q_0, z_0, \emptyset)$,

$$\text{ahol } \delta(q_0, a, z_0) = \{(q_2, z_0 z_1 z_1)\} \quad (1)$$

$$\delta(q_2, a, z_1) = \{(q_1, z_2 z_0 z_2 z_1)\} \quad (2)$$

$$\delta(q_2, b, z_1) = \{(q_2, \lambda)\} \quad (3)$$

$$\delta(q_2, a, z_0) = \{(q_1, \lambda)\} \quad (4)$$

Adjunk meg olyan $G = (N, \Sigma, P, S)$ cf nyelvtant, amire $L_\emptyset(P) = L(G)$

$$N = \{S\} \cup \{[q_0 z_0 q_0], [q_0 z_0 q_1], \dots, [q_2 z_2 q_2]\}$$

$$P: \forall q_i \in Q \text{ állapotra legyen } S \rightarrow [q_0 z_0 q_i] \in P$$

- (1) átmenet esetén a veremautomata 3 hosszúságú szót tesz a verembe, ezért minden $q_i, q_j, q_k \in Q$ három elemű sorozatra, ahol $0 \leq i, j, k \leq 2$ legyen:

$$[q_0 z_0 q_k] \rightarrow a [q_2 z_0 q_i] [q_i z_1 q_j] [q_j z_1 q_k] \in P$$

- (2) $\forall q_i, q_j, q_k, q_l \in Q$ sorozatra, ahol $0 \leq i, j, k, l \leq 2$ legyen:

$$[q_2 z_1 q_l] \rightarrow a [q_1 z_2 q_i] [q_i z_0 q_j] [q_j z_2 q_k] [q_k z_1 q_l] \in P$$

$$(3), (4) \quad [q_2 z_1 q_2] \rightarrow b \in P$$

$$[q_2 z_0 q_1] \rightarrow a \in P$$

Bar-Hillel Lemma

Minden $L \subseteq \Sigma^*$ környezetfüggetlen nyelvhez megadhatók olyan L -től függő $p, q > 0$ egész számok, hogy minden $w \in L$ esetén, ha $|w| > p$, akkor vannak olyan $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 \in \Sigma^*$ szavak, melyekre teljesülnek az alábbi feltételek:

- 1.) $w = w_1 w_2 w_3 w_4 w_5$
- 2.) $|w_2 w_3 w_4| \leq q$
- 3.) $w_2 w_4 \neq \lambda$
- 4.) $\forall n \geq 0$ -ra $w_1 w_2^n w_3 w_4^n w_5 \in L$

Példa 1 Bar-Hillel Lemma használatára

Bizonyítsuk be, hogy az $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ nem cf.

- 1.) Tegyük fel, hogy L környezetfüggetlen. Ekkor vannak olyan $p, q > 0$ egész számok, amelyek teljesítik a Bar-Hillel Lemma feltételeit.
- 2.) Tekintsük az $a^p b^p c^p \in L$ szót.
 $|a^p b^p c^p| = 3p > p$.
- 3.) Ekkor vannak olyan $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 \in \Sigma^*$ szavak, hogy:
 - 1.) $w = w_1 w_2 w_3 w_4 w_5$
 - 2.) $|w_2 w_3 w_4| \leq q$
 - 3.) $w_2 w_4 \neq \lambda$
 - 4.) $\forall n \geq 0$ -ra $w_1 w_2^n w_3 w_4^n w_5 \in L$

4.) Vizsgáljuk meg w_2 és w_4 elhelyezkedését az $a^p b^p c^p$ szóban.

43

a.) Ha w_2 vagy w_4 többfajta betűt is tartalmaz, akkor felborúl a betűk sorrendje. Tehát w_2 és w_4 is csak egyfajta betűt tartalmazhat.

b.) Ha w_2 vagy w_4 az üres szó, és a másik nem az, akkor csak egyfajta betű száma fog növekedni és így nem lesz ugyanannyi az a-k, b-k és c-k száma.

c.) Ha w_2 és w_4 is tartalmaznak pontosan egyfajta betűt, akkor legfeljebb csak két fajta betű szám fog növekedni.

5.) Minden lehetőség ellentmondásra vezetett, tehát L nem környezetfüggetlen.

Példa 2 Bar-Hillel Lemma használatára:

144

Bizonyítsuk be, hogy az $L = \{a^p \mid p \text{ prím}\} \subseteq \Sigma^*$ nyelv nem környezetfüggetlen.

1.) Tegyük fel, hogy L környezetfüggetlen. Ekkor vannak olyan $p, q > 0$ egész számok, amelyek teljesítik a Bar-Hillel Lemma feltételeit.

2.) Tekintsük az $a^l \in L$ szót, ahol l prím, és $l > p$. Nyilvánvaló, hogy $|a^l| = l > p$.

3.) Ekkor vannak olyan $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 \in \Sigma^*$ szavak, hogy:

- 1.) $w = w_1 w_2 w_3 w_4 w_5$
- 2.) $|w_2 w_3 w_4| \leq p$
- 3.) $w_2 w_4 \neq \lambda$
- 4.) $\forall n \geq 0$ -ra $w_1 w_2^n w_3 w_4^n w_5 \in L$

4.) Legyen $|w_2| = j$ $|w_4| = k$

Ekkor $|w_1 w_3 w_5| = l - j - k$

$$|w_1 w_2^n w_3 w_4^n w_5| = l - j - k + n \cdot j + n \cdot k =$$

$$l + j(n-1) + k(n-1) = l + (n-1)(k+j)$$

Legyen $n = l+1$. Ekkor $l + (l+1-1)(k+j) =$
 $= l + l(k+j) = l(1+k+j).$

$$k+j = |w_2 w_4| \neq \lambda \Rightarrow k+j \geq 1$$

$$(1+k+j) \geq 2$$

$$l \geq 2$$

} szorzatuk
nem
prím

Feladatok:

145

34.) Bizonyítsuk be, hogy a következő nyelvek nem környezetfüggetlenek !

a.) $L = \{a^{n^2} \mid n \geq 0\} \subseteq \Sigma^*$, $\Sigma = \{a\}$

b.) $L = \{a^{2^n} \mid n \geq 0\} \subseteq \Sigma^*$, $\Sigma = \{a\}$

c.) $L = \{a^n b^m a^n \mid n \geq m\} \subseteq \Sigma^*$, $\Sigma = \{a, b\}$

d.) $L = \{a^n b^m a^n b^m \mid n, m \geq 0\} \subseteq \{a, b\}^*$

e.) $L = \{a^n b^n c^n d^n \mid n \geq 0\} \subseteq \{a, b, c, d\}^*$

f.) $L = \{a^n b^{2n} c^n \mid n \geq 0\} \subseteq \{a, b, c\}^*$

g.) $L = \{a^{2n} b^{3n} c^{4n} \mid n \geq 0\} \subseteq \{a, b, c\}^*$

h.) $L = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\} \subseteq \{a, b\}^*$

i.) $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, |w|_a = |w|_b = |w|_c\} \subseteq \{a, b, c\}^*$

j.) $L = \{a^n b^m c^k \mid n < m < k\} \subseteq \{a, b, c\}^*$

k.) $L = \{a^n b^n c^{\lfloor n/2 \rfloor} \mid n \geq 0\} \subseteq \{a, b, c\}^*$

l.) $L = \{a^n b^{\lfloor n/2 \rfloor} c^{\lfloor n/3 \rfloor} \mid n \geq 0\} \subseteq \{a, b, c\}^*$

m.) $L = \{a^{n^3} \mid n \geq 0\} \subseteq \{a\}^*$

Turing-gép:

146

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \delta, F)$ rendszer, ahol

- Q véges állapothalmaz
- Γ munka ábécé, $\triangleright, \triangleright, \triangleright \in \Gamma$
- Σ input ábécé, $\Sigma \subseteq \Gamma - \{\triangleright, \triangleright, \triangleright\}$
- $q_0 \in Q$ a kezdőállapot
- $F \subseteq Q$ a végállapotok halmaza
- $\delta: Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times D$ egy parciális függvény, az átmenetfüggvény, ahol $D = \{-, \rightarrow, \leftarrow\}$ a következő mozgási irányokat jelentik: $-$: helyben maradás, $\rightarrow$ lépés jobbra, $\leftarrow$ lépés balra

Kikötés : $\delta(p, \triangleright) = (q, b, d)$, akkor $b = \triangleright$
 $d = \rightarrow$

M konfigurációi:

$p \triangleright \alpha$ vagy $\triangleright \alpha p a \beta$ alakú szavak, ahol
 $p \in Q, a \in \Sigma, \alpha, \beta \in \Gamma^*$

Kezdő konfiguráció :

$q_0 \triangleright x$ alakú, ahol $x \in \Sigma^*$

Vég konfiguráció :

$C = p \triangleright \alpha$ vagy $C = \triangleright \alpha p a \beta$ alakú, ahol $p \in F$ és nincs rákövetkező konfiguráció

M felismeri az $x \in \Sigma^*$ szót, ha $q_0 \triangleright x \vdash^* C$, ahol C végkonfiguráció.

M által felismert nyelv:

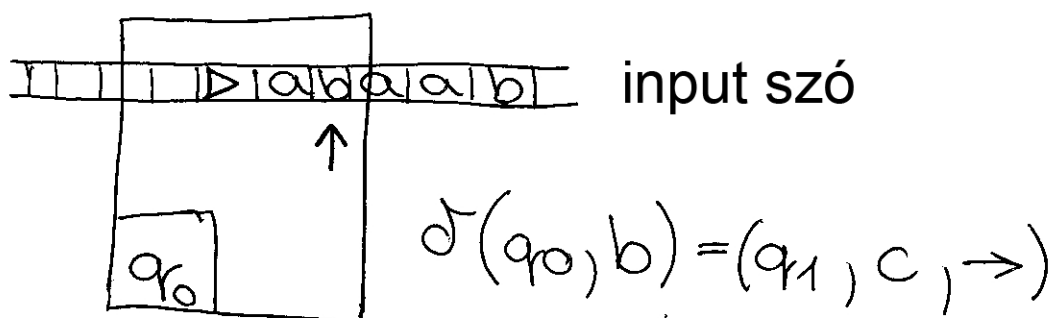
$$L(M) = \{ x \in \Sigma^* \mid q_0 \triangleright x \vdash^* C \text{ végkonfiguráció} \}$$

Definíciók:

Egy L nyelv rekurzívan felsorolható, ha $L = L(M)$ valamely M Turing-gépre.

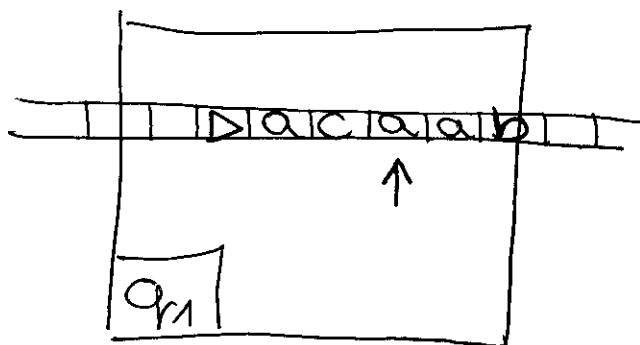
Egy L nyelv rekurzív, vagy eldönthető, ha $L = L(M)$ valamely M Turing-gépre, és M minden input szón megáll.

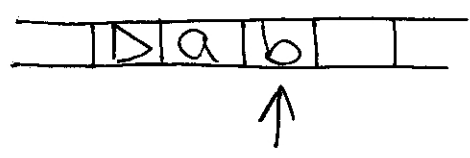
Tuing-gép:



$$\delta(q_0, b) = (q_1, c, \rightarrow)$$

A szalagról olvas és ír a Turing-gép !

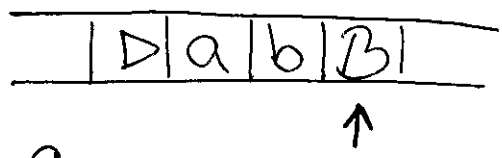




q_0

$$\delta(q_0, b) = (q_2, b, \rightarrow)$$

A szalag jobbra végtelen !



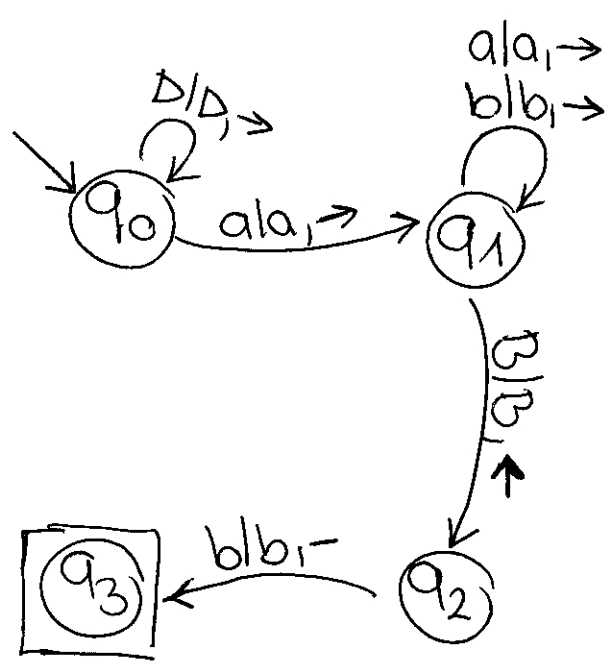
q_2

Példa 1 Turing-gépre:

$$L = \{ a w b \mid w \in \{ a, b \}^* \} \subseteq \{ a, b \}^*$$

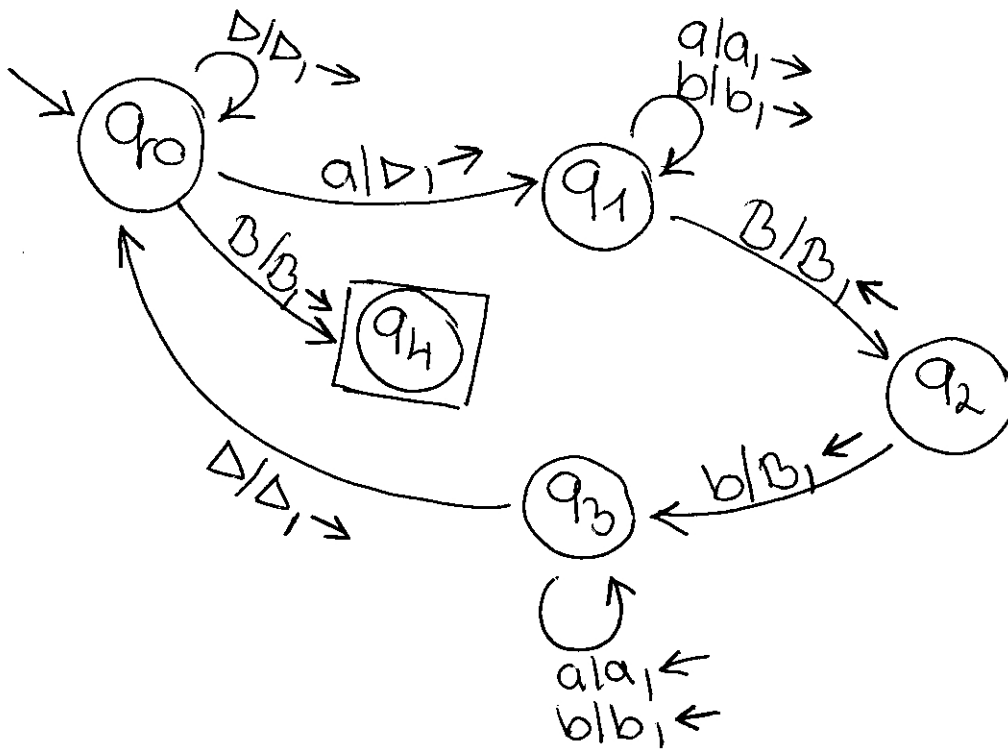
$$M = (\{ q_0, q_1, q_2, q_3 \}, \{ a, b \}, \{ \Delta, B \}, q_0, \delta, \{ q_3 \})$$

- $\delta(q_0, \Delta) = (q_0, \Delta, \rightarrow)$
- $\delta(q_0, a) = (q_1, a, \rightarrow)$
- $\delta(q_1, a) = (q_1, a, \rightarrow)$
- $\delta(q_1, b) = (q_1, b, \rightarrow)$
- $\delta(q_1, B) = (q_2, B, \leftarrow)$
- $\delta(q_2, b) = (q_3, b, -)$



Példa 2 Turing-gépre:

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \subseteq \{a, b\}^*$$

Feladatok:

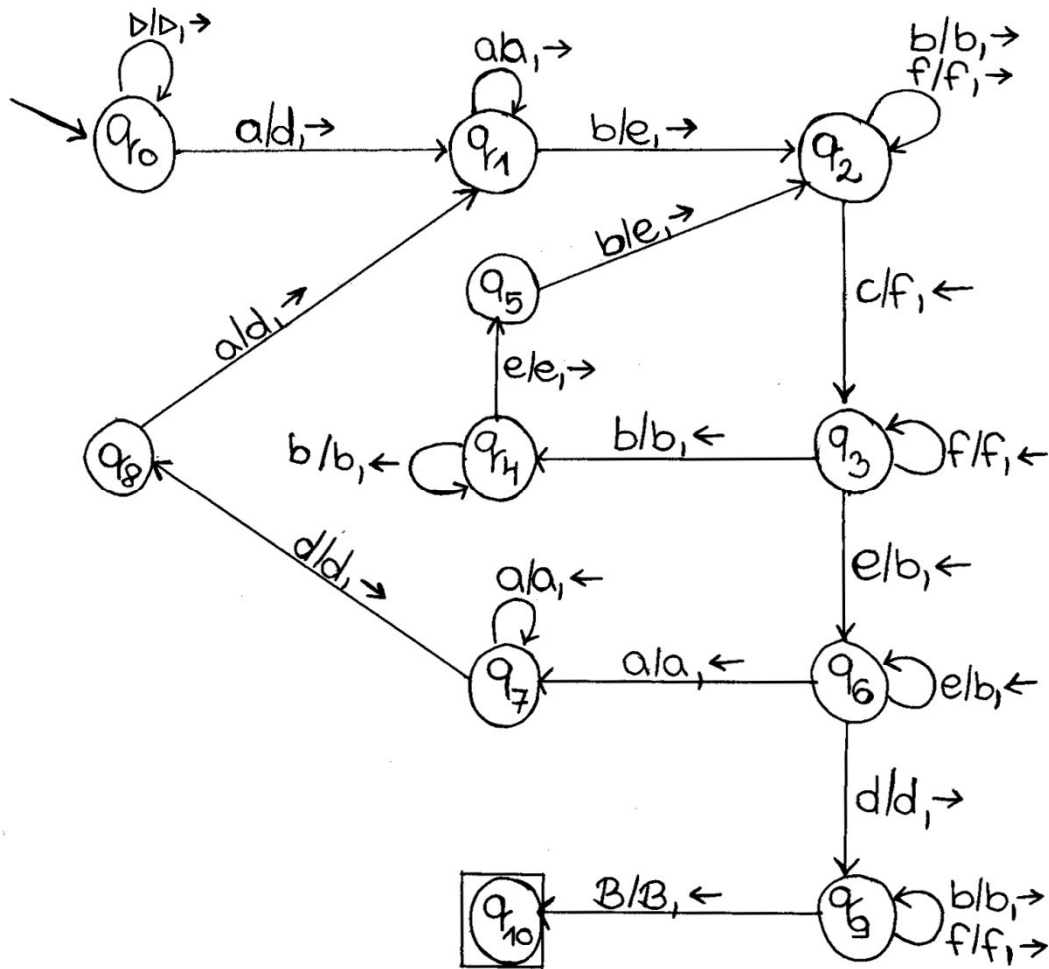
35.) Adjunk meg olyan Turing-gépeket, melyek az alábbi nyelveket ismerik fel.

- $L = \{a^{2n} \mid n \geq 0\} \subseteq \{a\}^*$
- $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\} \subseteq \{a, b, c\}^*$
- $L = \{a^n b^{2n} \mid n \geq 0\} \subseteq \{a, b\}^*$
- $L = \{ww^{-1} \mid w \in \{a, b\}^*\} \subseteq \{a, b\}^*$
- $L = \{a^n b a^m b a^{n+m} \mid n, m \geq 1\} \subseteq \{a, b\}^*$
- $L = \{w c a^{|w|} b^{|w|} \mid w \in \{a, b\}^*\} \subseteq \{a, b, c\}^*$
- $L = \{a^{2n} b^n \mid n \geq 0\} \subseteq \{a, b\}^*$

Legyen $L = \{ a^n b^m c^{nm} \mid n, m \geq 1 \} \subseteq \{a, b, c\}^*$

50

Adjunk meg egy olyan $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \delta, F)$ Turing-gépet, amire $L = L(M)$



A gép működése:

- 1.) Átlépjük a $\triangleright$ szimbólumot, majd a legelső a betűt átírjuk d-re.
- 2.) Megkeressük a legelső b betűt, ehhez átpörgetjük az összes a betűt, majd ezt a b-t átírjuk e-re.
- 3.) Megkeressük a legelső c betűt, ehhez át kell pörgetni az összes b betűt, és az összes f betűt.
- 4.) Ezt a legelső c betűt átírjuk f-re, majd visszalépünk 1-et.
- 5.) Visszafelé menve átlépjük az összes f betűt.
- 6.) Ha b betűhöz érkezünk, akkor megkeressük a legelső, még át nem írt b betűt, majd átírjuk e-re, majd ezután ugrás a 3.)-as ponthoz.
- 7.) Ha nem b betűhöz érkeztünk, akkor az azt jelenti, hogy egyszer figyelembe vettük az összes b betűt, vagyis átírtuk őket e-re, ezért most vissza kell írni őket b-re. Vagyis visszafelé lépkedve az összes e betűt átírjuk b-re.
- 8.) Ha most a betűhöz érkezünk, akkor megkeressük a legelső, még át nem írt a betűt, majd átírjuk d-re, majd ezután ugrás a 2.)-es ponthoz.
- 9.) Ha nem a betűhöz érkezünk, akkor az azt jelenti, hogy az összes a betűt figyelembe vettük, vagyis a b betűk számát a betűk számaszor figyelembe vettük, vagyis elvileg végeztünk. Ennek ellenőrzéséhez átpörgetjük az összes b és f betűt, és ha így eljutunk a szó végéhez, akkor valóban $n \times m$ db c betűt volt a szóban, ezért átmegyünk végállapotba.

k-Szalagos Turing-gép

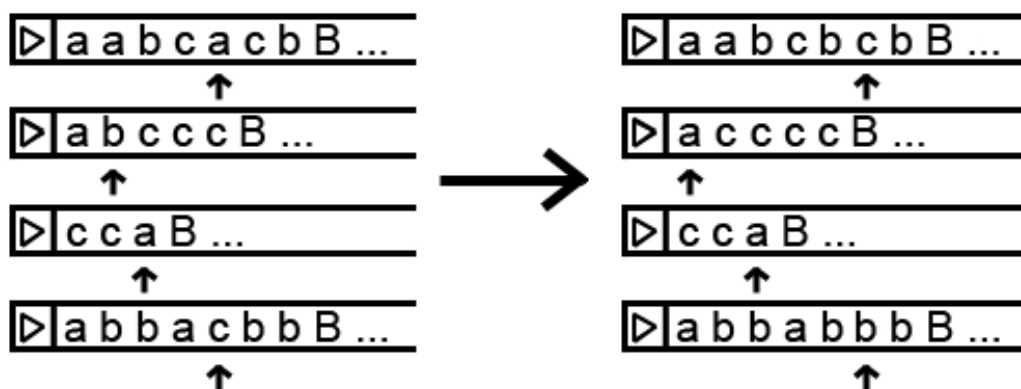
M átmenetfüggvénye $\delta: Q \times \Gamma^k \rightarrow Q \times (\Gamma \times D)^k$ alakú. Vagyis M k db jobbra végtelen szalagon számol.

Ha M egy adott p állapotban van, és a szalagokról pedig az $a_1, \dots, a_k \in \Gamma$ betűket olvassa, akkor az egyes szalagokra az írást és az azokon való elmozdulást a

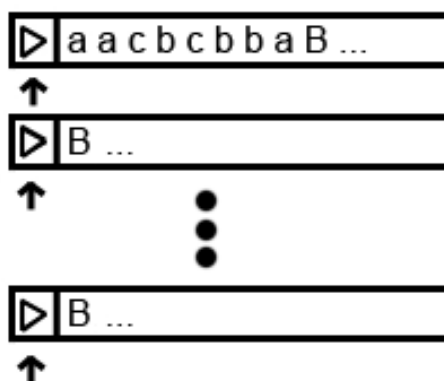
$$\delta(p, a_1, \dots, a_k) = (q, b_1, d_1, \dots, b_k, d_k)$$

érték határozza meg, ahol $b_1, \dots, b_k \in \Gamma$ és $d_1, \dots, d_k \in D$. Az i.-ik szalagon a_i helyére b_i -t ír, és d_i irányban mozdul el.

Például a $\delta(q_3, a, b, a, c) = (q_1, b, \rightarrow, c, \leftarrow, a, -, b, \rightarrow)$ átmenet jelentése, hogy, ha a Turing-gép a q_3 állapotban van, és az első szalagon éppen egy a betűt, a másodikon egy b betűt, a harmadikon egy a betűt, és a negyedik szalagon pedig egy c betűt olvas, akkor átmegy a q_1 állapotba. Továbbá első szalagon lévő betűt átírja b-re, majd jobbra mozog az első szalagon, a második szalagon lévő betűt átírja c-re, majd balra mozog a második szalagon, a harmadik szalagon lévő betűt átírja a-ra, és helyben marad a harmadik szalagon, a negyedik szalagon lévő betűt pedig átírja b-re, és jobbra mozog a negyedik szalagon.

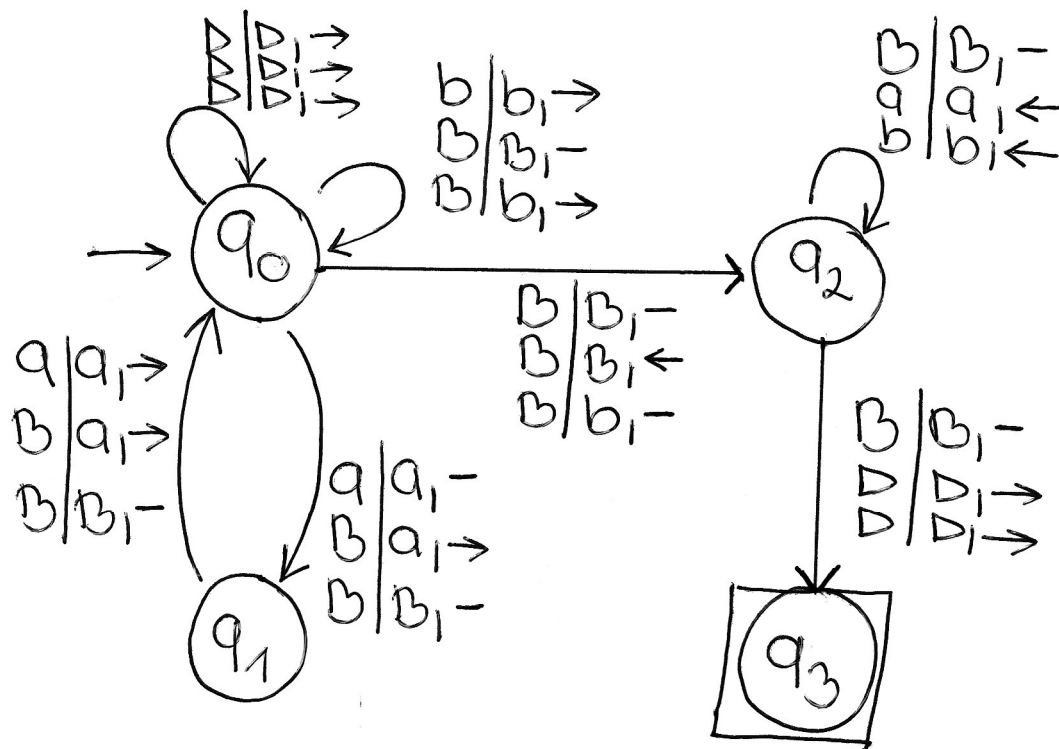


A $w = aacbcbbba$ input szó esetén a kezdőkonfiguráció:



Legyen $L = \{ w \mid w \in \{a, b\}^*, 2|w|_a = |w|_b + 1 \} \subseteq \{a, b\}^*$

Készítünk egy olyan 3-Szalagos M Turing-gépet, amire $L = L(M)$.

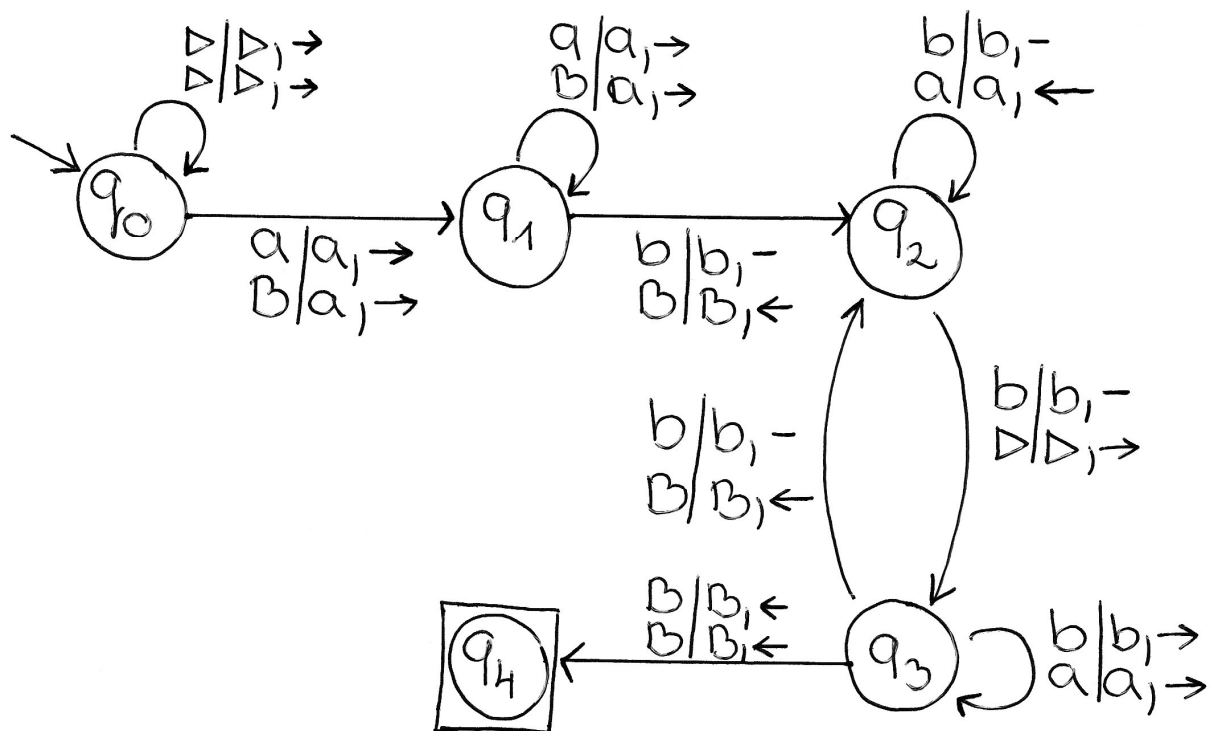


A gép működése:

- 1.) Először mindhárom szalagon átlépjük a $\triangleright$ szimbólumot.
- 2.) Utána olvassuk az inputot.
- 3.) Miközben b-t olvasunk ráírunk egy b-t a 3. szalagra.
- 4.) Miközben a-t olvasunk ráírunk 2 db a-t a 2. szalagra, még hozzá úgy, hogy miközben írjuk az első a-t a 2. szalagra nem pörgetjük át a betűt az inputon, hanem csak miközben a második a-t írjuk a 2. szalagra.
- 5.) Ha végig értünk az inputon, akkor még ráírunk egy db b-t a harmadik szalagra.
- 6.) Ezután egyszerre elkezdünk visszafele menni a 2. és 3. szalagon.
- 7.) És ha egyszerre érünk mindkét szalag elejére, akkor ugyanannyi a volt a szóban, mint b.

Legyen $L = \{ a^m b^n \mid m, n \geq 1 \text{ és } m \text{ osztja } n\text{-t maradék nélkül} \} \subseteq \{ a, b \}^*$

Készítünk egy olyan 2-Szalagos M Turing-gépet, amire $L = L(M)$.

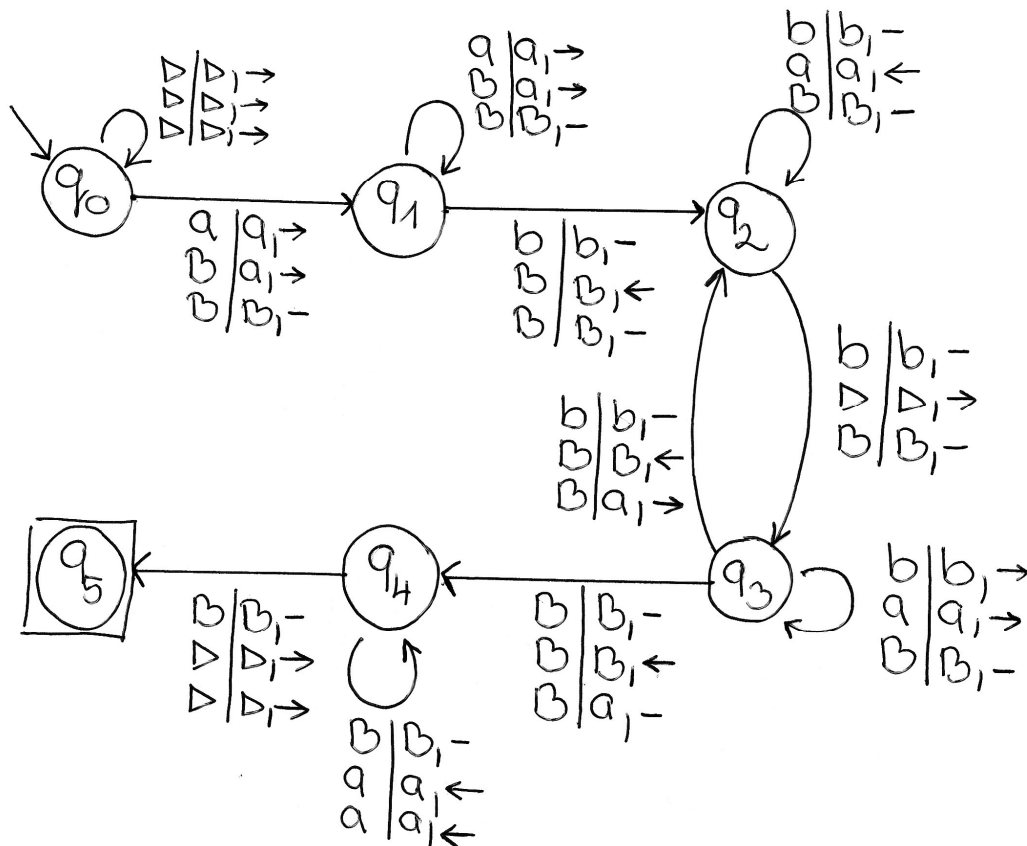


A gép működése:

- 1.) Mindkét szalagon átpörgetjük a $\triangleright$ szimbólumot.
- 2.) Olvassuk az a betűket, és eközben ráírunk egy a betűt a második szalagra.
- 3.) Ha b betűt olvasunk, akkor az inputon helyben maradunk, a második szalagot pedig az elejére tekerjük.
- 4.) Ezután elolvasunk egy db b-t az inputról, és egy db a-t a második szalagról.
- 5.) Ha végigértünk a második szalagon, akkor azt újra előretekerjük miközben az input szalagon egy helyben maradunk.
- 6.) Ugrás a 4.)-es ponthoz.
- 7.) Ha egyszerre érünk az input szó és a második szalag végére, akkor az a betűk száma osztja a b betűk számát.

Legyen $L = \{ a^n b^{n^2} \mid n \geq 1 \} \subseteq \{ a, b \}^*$

Készítünk egy olyan 2-Szalagos M Turing-gépet, amire $L = L(M)$.



A gép működése:

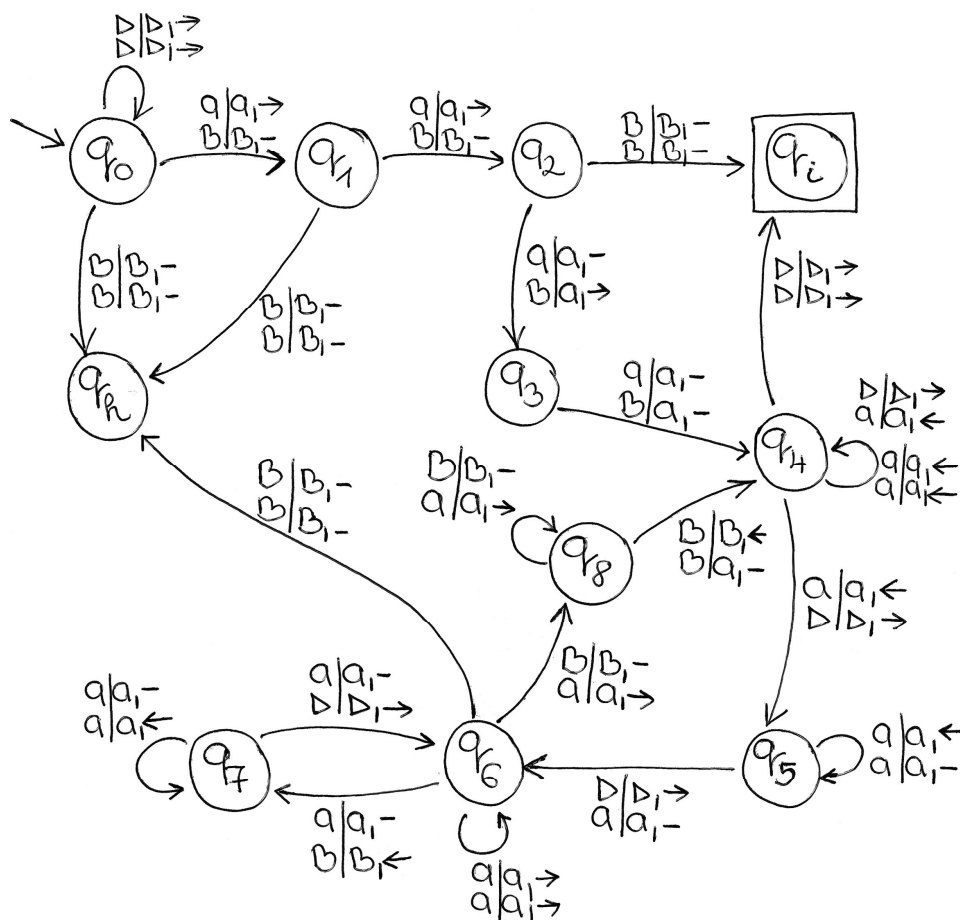
Hasonló az előző gép működéséhez, csak itt van egy harmadik szalag amit arra használunk, hogy ha ahogy az előző gépnél az 5.)-ös pontban végigértünk a második szalagon, akkor itt ráírunk egy a betűt a harmadik szalagra. Tehát gyakorlatilag itt is oszthatóságot vizsgálunk, csak a 3. szalagon számoljuk, hogy az a-k száma hányszor van meg a b-k számában.

És amikor az input és a második szalag egyszerre a végére ér, és a második és harmadik szalagon ugyanannyi a betű van, akkor az azt jelenti, hogy az a betűk száma a betűk számaszor van meg a b betűk számában. Vagyis $n \times n$ db b betű van az a betűk után.

És ezt természetesen úgy ellenőrizzük le, hogy egyszerre elkezdjük visszatekerni a második és harmadik szalagot, és ha egyszerre érünk mindkettő elejére, akkor megegyezik a második és harmadik szalagon lévő a-k száma.

Legyen $L = \{ a^p \mid p \text{ prím} \} \subseteq \{ a \}^*$

Készítünk egy olyan 2-Szalagos M Turing-gépet, amire $L = L(M)$.



A gép működése:

Lesz egy q_h állapotunk, amibe akkor megyünk, ha biztosan tudjuk, hogy nem prímszám db a-ból áll a szó. És innen nem megyünk sehova tovább. És lesz egy q_i állapotunk, amibe akkor megyünk, ha meggyőződünk róla, hogy prímszám db a-ból áll a szó. Ez lesz a végállapot, és innen sem megyünk sehova tovább.

- 1.) Mindkét szalagon átpörgetjük a $\triangleright$ szimbólumot.
- 2.) Ha 0, 1 vagy 2 db a-ból áll a szó azt külön lekezeljük.
- 3.) Ha 2-nél több a van a szóban, akkor rámásolunk 2 db a-t a második szalagra.
- 4.) Visszapörgetjük mindkét szalagot az elejére, és a második példához hasonló módon megvizsgáljuk, hogy a második szalagon lévő a-k száma osztja-e az input szalagon lévő a-k számát.
- 5.) Ha igen, akkor átmegyünk q_h -ba, mivel 1-en és p -n kívül találtunk egy számot, ami osztja p -t.
- 6.) Ha nem, akkor a második szalagot a végére tekerjük, és még ráírunk egy a betűt.
- 7.) Ugrás a 4.) ponthoz.
- 8.) Ha a 4.)-es pontban egyszerre érünk az input és a második szalag elejére, akkor az azt jelenti, hogy $p-1$ -re is megvizsgáltuk, hogy osztja-e p -t és most éppen p db a van a második szalagon. Ezért is érünk egyszerre az input és a második szalag elejére. Erre már nem kell az oszthatóságot megvizsgálni, ezért átmehetünk q_i -be, mivel semmilyen i -re ($2 \leq i \leq p-1$) nem találtunk olyan számot, ami osztaná p -t. Vagyis p tényleg prímszám.