Feladatsor:

Monoidok, kongruenciák:

0., Az alábbiak közül mely algebra monoid?

a., $(\Sigma^*, \cdot\,, \varepsilon)$, ahol $\cdot$ a konkatenáció művelet b., $(P(\Sigma^*), \cup\,, \varnothing)$ c., $(P(\Sigma^*), *\,, \{\varepsilon\})$, ahol $H * G = \{x\,y: x \in H,\, y \in G\}$ d., $(\mathbb{N}_0, +\,, 0)$ e., $(\mathbb{Z}, +\,, 0)$ f., $(\Sigma^*, +\,, \varepsilon)$, ahol $x + y =^{\text{def.}} x$, minden $x, y \in \Sigma^*$-ra g., $(P(\Sigma^*), +\,, \{\varepsilon\})$, ahol $H + G = \{x + y: x \in H,\, y \in G\}$ h., $(\mathbb{Z}, +\,, 1)$ i., $(\mathbb{R}, \cdot\,, 1)$ j., $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot\,, 1)$.

1., Legyen $\rho \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$, $(\Sigma = \{a, b\})$ a következő reláció:

a., $x\rho y \Leftrightarrow x = y$

b., ρ a legszűkebb ekvivalenciareláció, melyre $\varepsilon\rho(a\,a)$

c., $x\rho y \Leftrightarrow 2\,|x| = 2\,|y|$

d., $x\rho y \Leftrightarrow 2\,|x| = 3\,|y|$

e., $x\rho y \Leftrightarrow (|x| \bmod 3 \equiv 0$, és $|y| \bmod 3 \equiv 0)$

f., legyen $L \subseteq \Sigma^*$ tetszőleges nyelv, és ρ a legszűkebb ekvivalenciareláció, melyre $x\rho y \Rightarrow \forall z \in \Sigma^*$: $(x\,z \in L) \Leftrightarrow (y\,z \in L)$

g., legyen $L \subseteq \Sigma^*$ tetszőleges nyelv, és legyen $x\rho y \Leftrightarrow \forall z \in \Sigma^*$: $(x\,z \in L) \Leftrightarrow (y\,z \in L)$

h., legyen $L \subseteq \Sigma^*$ tetszőleges nyelv, és legyen $x\rho y \Leftrightarrow \exists z \in \Sigma^*$: $(x\,z \in L) \Leftrightarrow (y\,z \in L)$

i., legyen $L \subseteq \Sigma^*$ tetszőleges nyelv, és legyen $x\rho y \Leftrightarrow \forall z_1, z_2 \in \Sigma^*$: $(z_1\,x\,z_2 \in L) \Leftrightarrow (z_1 y\,z_2 \in L)$

j., legyen $L \subseteq \Sigma^*$ tetszőleges nyelv, és legyen $x\rho y \Leftrightarrow \forall z \in \Sigma^*$: $(z_1\,x\,z_2 \in L) \Leftrightarrow (z_2\,y\,z_1 \in L)$

k., legyen $L \subseteq \Sigma^*$ tetszőleges nyelv, és legyen $x\rho y \Leftrightarrow \forall z \in \Sigma^*$: $(z_1\,x\,z_2 \in L) \Leftrightarrow ((z_1 y\,z_2)^R \in L)$,

ahol ha $h = a_1 a_2 ... a_n$, akkor $h^R = a_n a_{n-1} ... a_1$.

Adjuk meg Σ^*/ρ egy konkrét leírását, ha ρ ekvivalencia! (azaz: milyen elemekből áll (Σ^*/ρ)?)

Mely esetekben lesz ρ kongruencia? Mely esetekben lesz Σ^*/ρ monoid a konkatenáció halmazokra való kiterjesztésével mint művelettel?

2., Legyen $x, y \in \Sigma^*$, $\rho \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ pedig egy ekvivalenciareláció. Az alábbiak közül melyek igazak tetszőleges x, y és ρ esetén?

a., Ha $x\rho y$, akkor $x = y$.

b., Ha $x\rho y$, akkor $(x/\rho) = (y/\rho)$.

c., Ha $x = y$, akkor $x\rho y$.

d., Ha $x = y$, akkor $(x/\rho) = (y/\rho)$.

e., $x = y$ akkor és csak akkor ha $x\rho y$.

f., Ha $x/\rho \neq y/\rho$, akkor létezik $z \in \Sigma^*$, melyre $z \in (x/\rho) \cap (y/\rho)$.

g., Ha $x \neq y$, akkor létezik $z \in \Sigma^*$, melyre $z \in (x/\rho) \cap (y/\rho)$.

h., Ha ρ kongruencia, akkor ρ^{-1} is az.

i., Ha ρ kongruencia, akkor $\rho \cup \rho^{-1}$ is az.

j., Ha $\rho\backslash\{(x, x): x \in \Sigma^*\}$ nem kongruencia, akkor ρ sem kongurencia.

3., Legyen $x, y \in \Sigma^*$, $\rho \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ pedig egy ekvivalenciareláció. Az alábbiak közül melyek igazak tetszőleges $x, y \in \Sigma^*$ esetén?

a., Van olyan ρ, hogy $x \neq y$ de létezik $z \in \Sigma^*$, melyre $z \in (x/\rho) \cap (y/\rho)$.

b., Van olyan ρ, hogy $x = y$ akkor és csak akkor ha $x \rho y$.

c., Van olyan ρ, hogy ha $x \rho y$ akkor $x/\rho = y/\rho$.

d., Van olyan ρ, hogy $x/\rho \neq y/\rho$, de létezik $z \in \Sigma^*$, melyre $z \in (x/\rho) \cap (y/\rho)$.

e., Van olyan ρ kongruencia, amelyre $\rho = \rho \setminus \{(x, x) : x \in \Sigma^*\}$.

4., Legyen $\rho \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ egy kongruencia, igazoljuk, hogy ekkor Σ^*/ρ egy monoid!

5., Igazoljuk, hogy ha Σ^*/ρ egy monoid, ahol $\rho \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ ekvivalenciareláció, akkor ρ kongurencia (is)!

6., Igazoljuk, hogy tetszőleges $\rho \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ ekvivalenciareláció esetén Σ^*/ρ akkor és csak akkor monoid, ha ρ kongruencia!

Generatív nyelvtanok:

1., Mely nyelveket generálják a következő generatív nyelvtanok? Melyek reguláris nyelvek? Melyek reguláris nyelvtanok?

a., $(\{A, Z, S\}, \{a, b\}, P, S)$, $P = \{S \to A, S \to Z, A \to A\,Z, A \to a\,a, Z \to Z\,b\}$,

b., $(\{A, Z, S\}, \{a, b\}, P, S)$, $P = \{S \to A, A \to A\,A, A \to A\,a, Z \to b\,Z, Z \to a\,S\,b\}$,

c., $(\{A, Z, S\}, \{a, b\}, P, S)$, $P = \{S \to S\,A\,A\,S, A \to a, S \to b\,b, Z \to b\,b\}$,

d., $(\{A, Z, S, R\}, \{a, b\}, P, S)$, $P = \{S \to S\,Z, Z \to Z\,A, A \to A\,R, S \to a, Z \to b\,b, A \to a, R \to b\,b\}$,

e., $(\{A, B, S\}, \{a, b\}, P, S)$, $P = \{S \to A\,S\,B\,, S \to \varepsilon, A \to a, B \to b\}$.

2., Az alábbiak közül melyek igazak?

a., Van olyan generatív nyelvtan, amely nemterminálisainak halmaza üres.

b., Létezik olyan Σ véges ábécé, melyre: $\varepsilon \in (\Sigma \cap \Sigma^*)$, ahol ε az üres szó.

c., Van olyan (N, Σ, P, S) generatív nyelvtan, és α szimbólum, amelyre $\alpha \in N$ és $\alpha \in \Sigma$.

d., Van olyan G generatív nyelvtan, és $x \in \Sigma^*$ szó, mely eleme a G nyelvtan által generált nyelvnek, és x véges sok derivációs lépésben nem kapható meg a kezdőszimbólumból.

e., Van olyan G generatív nyelvtan, melynek van olyan $\alpha \to \beta$ átírási szabálya, hogy $\alpha = \varepsilon$.

3., Igazoljuk (nyelvtanokkal), hogy minden egyetlen szóból álló nyelv reguláris!

4., Igazoljuk (nyelvtanokkal), hogy minden véges nyelv reguláris!

5., Igazoljuk (nyelvtanokkal), hogy a reguláris nyelvek zártak a véges unióra!

6., Engedjük meg, hogy a reguláris generatív nyelvtanok:

a., nemterminálisainak halmaza

b., átírási szabályok halmaza

c., mindkettő

végtelen számosságú lehessen! Továbbra is reguláris nyelvtanokat fognak generálni az így kapott generatív modellek? Miért? (*Hint*: ennél a feladatnál tudjuk, hogy az $\{a^n b^n : n \geqslant 0\}$ nem reguláris nyelv)

7., Nevezzük általánosított generatív nyelvtannak az olyan $G = (N, \Sigma, P, S')$ generatív modellt, melyre igaz, hogy $S' \subseteq N$ egy halmaz, a kezdőszimbólumok halmaza, továbbá minden mást úgy definiálunk, mint generatív nyelvtan esetében; csupán az általánosított nyelvtan által generált nyelv a következő: $\{w \in \Sigma^*$: $\exists S \in S'$, melyre $S \Rightarrow^* w\}$, ahol $\Rightarrow$ a nyelvtan által meghatározott deriváció reláció. Igazoljuk, hogy az általánosított generatív nyelvtanok által generált nyelvek megegyeznek a generatív nyelvtanok által generált nyelvekkel!

8., Nevezzük *szigorú* reguláris nyelvtannak az olyan $G = (N,\ \Sigma,\ P,\ S)$ generatív nyelvtant, melynek P szabályhalmaza csak $A \to a\,B$, $A \to B$, $A \to \varepsilon$, vagy $A \to a$ alakú szabályokat tartalmazhat, ahol $a \in \Sigma$ betű, $A, B \in N$ nemterminálisok. Igazoljuk, hogy a szigorú reguláris nyelvtanok által generált nyelvek megegyeznek a reguláris nyelvtanok által generált nyelvekkel!

Automaták, szintaktikus kongruencia, szintaktikus monoid:

1., Adjunk meg olyan teljesen definiált determinisztikus automatákat melyek az alábbi nyelveket ismerik fel:

a., $\{a\,a, a\,a\,a, a\,b, a\,b\,b, a\,b\,b\,a\}$ b., $\{\mathrm{ab}^*\}$ c., $\{w \in \{a,b\}^*\colon |w|_a$ páros$\}$ d., $\{w \in \{a,b\}^*\colon |w|_a$ páros és $|w|_b$ páratlan$\}$ e., $\{w \in \{a,b\}^* : |w| \bmod 3 \equiv 1\}$ f., $\{w \in \{a,b\}^*\colon |w|_a$ páros$\} \cup \{w \in \{a,b\}^* : |w| \bmod 3 \equiv 1\}$ g., $\{w \in \{a,b\}^*\colon |w|_a$ páros$\} \cap \{w \in \{a,b\}^* : |w| \bmod 3 \not\equiv 1\}$ h., $\{a\,b\,b\,a\,w \in \{a,b\}^*\colon |w|_a$ páros$\}$

2., Melyek igazak az alábbiak közül?

a., Van olyan determinisztikus automata, amely valamely $x \in \Sigma^*$ szón végtelen ciklusba kerül.

b., Van olyan nemdeterminisztikus automata, amely valamely $x \in \Sigma^*$ szón végtelen ciklusba kerül.

c., Van olyan determinisztikus automata amely $\mathcal{O}(n^2)$ lépés után megáll minden $x \in \Sigma^*$ szón.

d., Van olyan teljesen definiált determinisztikus automata amely $\mathcal{O}(\log\ n)$ lépés után megáll minden $x \in \Sigma^*$ szón.

e., Egy tetszőleges $M = (Q,\ \Sigma,\ \delta,\ q_0,\ F)$ teljesen definiált determinisztikus automata esetén δ-t legfeljebb $|Q|^{|Q \times \Sigma|}$ féle módon definiálhatjuk.

f., Egy tetszőleges $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ teljesen definiált nemdeterminisztikus automata esetén δ-t legfeljebb $|Q|^{|Q \times \Sigma|}$ féle módon definiálhatjuk.

3., Legyen $L \subseteq \Sigma^*$, és $w \in \Sigma^*$ esetén $w\,L =^{\text{def.}} \{w\,v : v \in L\}$.

Igazoljuk, hogy ha $L \subseteq \Sigma^*$ felismerhető automatával, akkor $a\,L$ is, tetszőleges $a \in \Sigma$-ra!

4., Igazoljuk, hogy ha $L \subseteq \Sigma^*$ felismerhető automatával, akkor $w\,L$ is, tetszőleges $w \in \Sigma^*$-ra!

5., Igazoljuk (automatákkal), hogy a reguláris nyelvek zártak a véges unióra!

6., Igazoljuk, hogy a reguláris nyelvek zártak a véges metszetre, kivonásra, komplementerképzésre is! (hint: ügyeljünk az üres unióra, üres metszetre)

7., Igazoljuk (automatákkal), hogy minden egyetlen szóból álló nyelv reguláris!

8., Igazoljuk (automatákkal), hogy minden véges nyelv reguláris!

9., Igazoljuk, hogy a reguláris nyelvek nem zártak a végtelen unióra!

(*Hint*: ennél a feladatnál tudjuk, hogy $\{a^n b^n : n \geqslant 0\}$ nem reguláris nyelv)

10., Igazoljuk hogy a reguláris nyelvek nem zártak a végtelen metszetre!

11., Ha megengedjük, hogy a determinisztikus automatáknak (megszámlálhatóan!) végtelen sok állapotuk legyen, akkor egy új átmeneti modellhez jutunk (amely már nem automata), nevezzük ezt "végtelenített automatának". Határozzuk meg, hogy mely nyelveket ismerik fel a "végtelenített automaták"!

12., Határozzuk meg mely nyelveket ismerik fel a nemdeterminisztikus "végtelenített automaták"!

13., Adjuk meg az $M = (Q, \{a, b\}, \delta, q_0, F)$ automata által felismert nyelv szintaktikus monoidjának egy konkrét leírását, ha:

a., $Q = \{q_0, q_1\}$, $F = \{q_0\}$, $\delta(q_0, a) = q_0$, $\delta(q_0, b) = q_1$, $\delta(q_1, a) = q_1$, $\delta(q_1, b) = q_0$

b., $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$, $F = \{q_1\}$, $\delta(q_0, a) = q_1$, $\delta(q_1, b) = q_2$, $\delta(q_2, b) = q_3$, $\delta(q_3, a) = q_4$, $\delta(q_4, a) = q_4$, és $\delta(q_0, b) = \delta(q_1, a) = \delta(q_2, a) = \delta(q_3, b) = \delta(q_4, b) = \delta(q_5, a) = \delta(q_5, b) = q_5$.

14., Igazoljuk, hogy ha egy nyelv szaturálható véges indexű kongruenciával akkor felismerhető automatával!

15., Igazoljuk, hogy ha egy nyelv felismerhető determinisztikus automatával akkor szaturálható véges indexű kongruenciával!

16., Igazoljuk, hogy ha egy nyelv felismerhető nemdeterminisztikus automatával akkor szaturálható véges indexű kongruenciával!

17., Igazoljuk, hogy ha egy nyelv szaturálható kongruenciával akkor felismerhető "végtelenített" automatával!

18., Igazoljuk, hogy minden nyelv szaturálható kongruenciával!

19., Igazoljuk, hogy tetszőleges $L \subseteq \Sigma^*$ esetén L -et szaturálja az L szerinti szintaktikus kongruencia (ami jelben: $\sim_L$)!

20., Igazoljuk, hogy tetszőleges $L \subseteq \Sigma^*$ esetén az L szerinti szintaktikus kongruencia (ami jelben: $\sim_L$) a legbővebb kongruencia, ami L-et szaturálja, azaz minden ρ kongruenciára, ha ρ szaturálja L-et, akkor $\rho \subseteq \sim_L$!

21., Igazoljuk, hogy $L \subseteq \Sigma^*$ akkor és csak akkor felismerhető, ha az L-szerinti szintaktikus kongruencia véges indexű!

22., Igazoljuk, hogy az $\{a^n b^n : n \geqslant 0\}$ nyelv nem szaturálható véges indexű kongruenciával!

(*Warning!* Ennél a feladatnál nem tudjuk hogy $\{a^n b^n : n \geqslant 0\}$ nem reguláris!)

23., Igazoljuk (kongruencia segítségével), hogy $\{a^n b^n : n \geqslant 0\}$ nem reguláris!

24., Igazoljuk (kongruencia segítségével), hogy $\{a^n b^n c^n : n \geqslant 0\}$ nem reguláris!

25., Igazoljuk, hogy ha $L \subseteq \Sigma^*$ felismerhető automatával, akkor bármely $T \subseteq \Sigma^* / \sim_L$ -re, a $\bigcup_{x \in T} (x / \sim_L)$ nyelv is felismerhető automatával!

Automaták átmenetmonidjai, szintaktikus monoidok:

1., Igazoljuk, hogy tetszőleges M teljesen definiált, determinisztikus automata esetén $T(M)$ monoid a függvénykompozícióval, mint művelettel! (azaz: $(f_x \cdot f_y)(q) =^{\text{def.}} f_y(f_x(q))$, minden q állapotra)

2., Definiáljuk $T(M)$-et teljesen definiált, nemdeterminisztikus automata esetére is! Igazoljuk, hogy $T(M)$ monoid a függvénykompozícióval, mint művelettel! (azaz: $(f_x \cdot f_y)(\{q\}) = f_y(f_x(\{q\}))$, minden q állapotra)

3., Igazoljuk, hogy ha $L \subseteq \Sigma^*$ felismerhető az M teljesen definiált, *determinisztikus* automatával, akkor szaturálható $\rho \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ kongruenciával, ahol minden x, y szóra: $x \rho y \Leftrightarrow f_x = f_y,\ f_x, f_y \in T(M)$.

4., Igazoljuk, hogy ha $L \subseteq \Sigma^*$ felismerhető az M teljesen definiált, *nemdeterminisztikus* automatával, akkor szaturálható $\rho \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ kongruenciával, ahol minden x, y szóra: $x \rho y \Leftrightarrow f_x = f_y,\ f_x, f_y \in T(M)$.

5., Igazoljuk, hogy ha $(A, \cdot, 1_A)$ és $(B, *, 1_B)$ monoidok, és $\varphi\colon A \to B$ monoidhomomorfizmus, akkor $(\varphi(A), *, 1_B)$ is monoid!

6., Igazoljuk, hogy tetszőleges Σ véges ábécére, $(B, *, 1_B)$ monoidra, tetszőleges $\varphi\colon \Sigma^* \to B$ monoidhomomorfizmust egyértelműen meghatároznak a Σ-n felvett értekei! (Azaz ha φ monoidhomomorfizmust Σ-ra definiáljuk, akkor egyértelműen definiált Σ^* minden elemére!)

7., Igazoljuk, hogy tetszőleges M teljesen definiált, determinisztikus automata átmenetmonoidjából létezik szürjektív homomorfizmus az M által felismert $L(M)$ nyelv szerinti szintaktikus monoidba! Azaz létezik $\varphi\colon T(M) \to \Sigma^*/\sim_{L(M)}$ szürjektív monoidhomomorfizmus!

8., Igazoljuk, hogy tetszőleges M teljesen definiált, nemdeterminisztikus automata átmenetmonoidjából létezik szürjektív homomorfizmus az M által felismert $L(M)$ nyelv szerinti szintaktikus monoidba! Azaz létezik $\varphi\colon T(M) \to \Sigma^*/\sim_{L(M)}$ szürjektív monoidhomomorfizmus!

9., Igazoljuk, hogy ha $(B, *, 1_B)$ monoid, és $\varphi\colon \Sigma^* \to B$ monoidhomomorfizmus, akkor a $\ker\varphi = \{(x, y) \in \Sigma^* \times \Sigma^*\colon \varphi(x) = \varphi(y)\}$ reláció kongruencia!

10., Igazoljuk, hogy ha $(B, *, 1_B)$ véges monoid, és $\varphi\colon \Sigma^* \to B$ monoidhomomorfizmus, akkor a $\ker\varphi = \{(x, y) \in \Sigma^* \times \Sigma^*\colon \varphi(x) = \varphi(y)\}$ reláció véges indexű kongruencia!

11., Igazoljuk, hogy ha $\rho \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ tetszőleges kongruencia, akkor létezik $\varphi\colon \Sigma^* \to \Sigma^*/\rho$ szürjektív monoidhomomorfizmus!

12., Igazoljuk, hogy ha $(B, *, 1_B)$ monoid, és $\varphi\colon \Sigma^* \to B$ monoidhomomorfizmus, akkor tetszőleges $L \subseteq \Sigma^*$ nyelvre, mely: $L = \varphi^{-1}(H)$ alakban áll elő, ahol $H \subseteq B$; igaz, hogy L szaturálható a $\ker\varphi$ kongruenciával!

13., Igazoljuk, hogy ha $(B, *, 1_B)$ véges monoid, és $\varphi\colon \Sigma^* \to B$ monoidhomomorfizmus, akkor tetszőleges $L \subseteq \Sigma^*$ nyelvre, mely: $L = \varphi^{-1}(H)$ alakban áll elő, ahol $H \subseteq B$, igaz, hogy L felismerhető!

14., Igazoljuk, hogy ha $L \subseteq \Sigma^*$ felismerhető, akkor létezik $(B, *, 1_B)$ véges monoid, és $\varphi\colon \Sigma^* \to B$ monoidhomomorfizmus, valamint $H \subseteq B$, melyre $L = \varphi^{-1}(H)$.

15., Melyek igazak a következőek közül? Miért?

a) Ha M determinisztikus automata nem teljesen definiált, akkor az általa felismert nyelv szerinti szintaktikus monoid fogalma nem értelmezett.

b) Tetszőleges M teljesen definiált, determinisztikus automata $T(M)$ átmenetmonoidja egyben valamely teljesen definiált, nemdeterminisztikus automata átmenetmonoidja is! (*nem fontos megj.: azaz inkább izomorf vele...*)

c) Tetszőleges M teljesen definiált, *determinisztikus* automatához létezik $\varphi\colon \Sigma^* \to T(M)$ monoidhomomorfizmus!

d) Tetszőleges M teljesen definiált, *nemdeterminisztikus* automatához létezik egy $\varphi\colon \Sigma^* \to T(M)$ monoidhomomorfizmus!

e) Tetszőleges, teljesen definiált, *determinisztikus* M automata δ átmenetfüggvénye egyértelműen meghatároz egy $\varphi\colon \Sigma^* \to T(M)$ monoidhomomorfizmust, az $\varphi(a) =^{\text{def.}} f_a$ definíció által, ahol $a \in \Sigma$ betű, és q állapot! (*Hint:* $f_a\colon Q \to Q$ olyan, hogy $f_a(q) = \delta(q, a)$)

f) Tetszőleges, teljesen definiált, *nemdeterminisztikus* M automata δ átmenetfüggvénye egyértelműen meghatároz egy $\varphi\colon \Sigma^* \to T(M)$ monoidhomomorfizmust, az $\varphi(a) =^{\text{def.}} f_a$ definíció által, ahol $a \in \Sigma$ betű, és q állapot! (*Hint:* $f_a\colon Q \to Q$ olyan, hogy $f_a(q) = \delta(q, a)$)

g) Egy $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv akkor és csak akkor felismerhető, ha létezik létezik $(B, *, 1_B)$ véges monoid, és $\varphi\colon \Sigma^* \to B$ monoidhomomorfizmus, valamint $H \subseteq B$, melyre $L = \varphi^{-1}(H)$.

h) Egy $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv akkor és csak akkor felismerhető, ha létezik létezik $(B, *, 1_B)$ monoid, és $\varphi\colon \Sigma^* \to B$ monoidhomomorfizmus, valamint $H \subseteq B$, melyre $L = \varphi^{-1}(H)$.

i) Tetszőleges $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv szerinti szintaktikus kongruencia kongruencia is.

j) Van olyan $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv, mely szerinti szintaktikus kongruencia nem kongruencia.

k) Minden $\rho \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ kongruenciához létezik $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv, melyre igaz, hogy ρ az L szerinti szintaktikus kongruencia.

l) Ha $L \subseteq \Sigma^*$ szaturálható véges indexű kongruenciával akkor az $\bar{L} = \{w \in \Sigma^*\colon w \notin L\}$ nyelv is szaturálható véges indexű kongruenciával.

m) Ha $L \subseteq \Sigma^*$ szaturálható kongruenciával akkor az $\bar{L} = \{w \in \Sigma^*\colon w \notin L\}$ nyelv is szaturálható kongruenciával.

n) Ha $L \subseteq \Sigma^*$ szaturálható kongruenciával akkor az $L\,L \cup \bar{L} = \{w\,v \in \Sigma^*\colon w, v \in L\} \cup \{w \in \Sigma^*\colon w \notin L\}$ nyelv is szaturálható kongruenciával.

o) Ha $L \subseteq \Sigma^*$ nem szaturálható kongruenciával akkor véges indexű kongruenciával sem.

p) Ha $L \subseteq \Sigma^*$ nem szaturálható kongruenciával akkor $\bar{L}$ kongruenciával szaturálható.

Automata minimalizáció:

0., Adott egy tetszőleges $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ teljesen definiált, determinisztikus automata, és egy tetszőleges $\rho \subseteq Q \times Q$ automata kongruencia. Igazoljuk, hogy ekkor M/ρ ugyanazt a nyelvet ismeri fel, mint M!

1., Igazoljuk, hogy tetszőleges teljesen definiált, determinisztikus M automatára a $\rho_M \subseteq Q \times Q$: $q_1 \rho q_2 \Leftrightarrow \forall x \in \Sigma^*\colon ((\delta^*(q_1, x) \in F) \leftrightarrow (\delta^*(q_2, x) \in F))$, reláció automata kongruencia!

2., Adott egy tetszőleges M teljesen definiált, determinisztikus automata. Automata kongruencia-e a következőképpen definiált $\rho \subseteq Q \times Q$ reláció? M/ρ állapotainak száma több lesz-e, vagy kisebb egyenlő mint M állapotainak száma?

a) $q_1 \rho q_2 \Leftrightarrow q_1 = q_2$,

b) $q_1 \rho q_2 \Leftrightarrow q_1 \neq q_2$,

c) $q_1 \rho q_2 \Leftrightarrow \forall a \in \Sigma\colon ((\delta(q_1,a) \in F) \leftrightarrow (\delta(q_2,a) \in F))$,

d) $q_1 \rho q_2 \Leftrightarrow \forall x \in \Sigma^*\colon ((\delta^*(q_1,x) \in F) \leftrightarrow (\delta^*(q_2,x) \in F))$,

e) $q_1 \rho q_2 \Leftrightarrow \forall x \in \Sigma^*\colon (\delta^*(q_1,x) \neq \delta^*(q_2,x))$,

f) $q_1 \rho q_2 \Leftrightarrow \forall x \in \Sigma^*\colon ((\delta^*(q_1,x) \in F) \leftrightarrow (\delta^*(q_2,x) \notin F))$,

g) $q_1 \rho q_2 \Leftrightarrow \forall x \in \Sigma^*\colon ((\delta^*(q_1,x) \in F) \wedge (\delta^*(q_2,x) \in F))$,

h) $q_1 \rho q_2 \Leftrightarrow \forall a \in \Sigma\colon ((\delta(q_1,a) = q_2) \wedge (\delta(q_2,a) = q_1))$.

3., Igazoljuk, vagy cáfoljuk meg, hogy adott M teljesen definiált, determinisztikus automatán értelmezett automata kongruenciák tetszőleges családjának *metszete* is automata kongruencia.

4., Igazoljuk, vagy cáfoljuk meg, hogy adott M teljesen definiált, determinisztikus automatán értelmezett automata kongruenciák tetszőleges családjának *uniója* is automata kongruencia.

5., Igazoljuk, vagy cáfoljuk meg, hogy adott M teljesen definiált, determinisztikus automatán értelmezett tetszőleges automata kongruencia *komplementere* is automata kongruencia.

6., Igazoljuk, vagy cáfoljuk meg, hogy bármely M teljesen definiált, determinisztikus automatához létezik olyan automata kongruencia, melynek a komplementere is automata kongruencia.

7., Adott M teljesen definiált, determinisztikus automata. A következőek közül melyek igazak?

a) M-en megszámlálhatóan végtelen sok, páronként különböző automata kongruenciát lehet definiálni,

b) M-en csak véges sok, páronként különböző automata kongruenciát lehet definiálni,

c) megszámlálhatóan végtelen sok (nem feltétlenül M-en értelmezett) automata kongruencia van,

d) ez a feladat megszámlálhatóan végtelenül unalmas, :)

e) véges sok (nem feltételenül M-en értelmezett) automata kongruencia van,

f) ha M minimális, akkor összefüggő is,

g) ha M összefüggő, akkor minimális is,

h) M akkor és csak akkor összefüggő, ha minimális,

i) a minimális automata fogalma egyértelműen meghatározott; azaz ha M teljesen definiált determinisztikus automata, akkor nem létezik két különböző M_1 és M_2 minimális automata, melyek mindegyike ugyanazt a nyelvet ismeri fel, mint M. (*nem fontos megj.: úgy értendő, hogy M_1 és M_2 nem is izomorfak!*)

8., Minimalizáljuk a következő automatákat, ahol $M=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$!

a) δ:

Q	Σ	$\mapsto_\delta$ Q	Q	Σ	$\mapsto_\delta$ Q
q_0	a	q_1	q_3	a	q_2
q_0	b	q_2	q_3	b	q_4
q_1	a	q_0	q_4	a	q_4
q_1	b	q_3	q_4	b	q_4
q_2	a	q_3	q_5	a	q_5
q_2	b	q_4	q_5	b	q_5

, ahol $F=\{q_4\}$

b) δ:

Q	Σ	$\mapsto_\delta$ Q	Q	Σ	$\mapsto_\delta$ Q	Q	Σ	$\mapsto_\delta$ Q
q_0	a	q_1	q_3	a	q_6	q_6	a	q_6
q_0	b	q_2	q_3	b	q_3	q_6	b	q_6
q_1	a	q_5	q_4	a	q_6			
q_1	b	q_3	q_4	b	q_4			
q_2	a	q_3	q_5	a	q_6			
q_2	b	q_4	q_5	b	q_5			

, ahol $F=\{q_6\}$

c) δ:

Q	Σ	$\mapsto_\delta$ Q	Q	Σ	$\mapsto_\delta$ Q
q_0	a	q_1	q_3	a	q_3
q_0	b	q_4	q_3	b	q_3
q_1	a	q_2	q_4	a	q_4
q_1	b	q_3	q_4	b	q_4
q_2	a	q_0			
q_2	b	q_3			

, ahol $F=\{q_3,q_4\}$

d) δ:

Q	Σ	$\mapsto_\delta$ Q	Q	Σ	$\mapsto_\delta$ Q	Q	Σ	$\mapsto_\delta$ Q	Q	Σ	$\mapsto_\delta$ Q
q_0	a	q_1	q_3	a	q_4	q_6	a	q_8	q_9	a	q_9
q_0	b	q_2	q_3	b	q_5	q_6	b	q_9	q_9	b	q_{11}
q_1	a	q_2	q_4	a	q_3	q_7	a	q_9	q_{10}	a	q_{10}
q_1	b	q_3	q_4	b	q_5	q_7	b	q_{10}	q_{10}	b	q_{11}
q_2	a	q_1	q_5	a	q_6	q_8	a	q_8	q_{11}	a	q_{11}
q_2	b	q_4	q_5	b	q_7	q_8	b	q_{11}	q_{11}	b	q_{11}

, ahol $F=\{q_{11}\}$

e) δ:

Q	Σ	$\mapsto_\delta$ Q	Q	Σ	$\mapsto_\delta$ Q	Q	Σ	$\mapsto_\delta$ Q	Q	Σ	$\mapsto_\delta$ Q
q_0	a	q_1	q_3	a	q_4	q_6	a	q_5	q_9	a	q_{10}
q_0	b	q_2	q_3	b	q_5	q_6	b	q_{11}	q_9	b	q_{11}
q_1	a	q_3	q_4	a	q_3	q_7	a	q_8	q_{10}	a	q_9
q_1	b	q_4	q_4	b	q_6	q_7	b	q_9	q_{10}	b	q_{11}
q_2	a	q_7	q_5	a	q_6	q_8	a	q_7	q_{11}	a	q_{11}
q_2	b	q_8	q_5	b	q_{11}	q_8	b	q_{10}	q_{11}	b	q_{11}

, ahol $F=\{q_{11}\}$

f) δ:

Q	Σ	$\mapsto_\delta$ Q	Q	Σ	$\mapsto_\delta$ Q	Q	Σ	$\mapsto_\delta$ Q
q_0	a	q_1	q_3	a	q_4	q_6	a	q_7
q_0	b	q_0	q_3	b	q_7	q_6	b	q_5
q_1	a	q_2	q_4	a	q_5	q_7	a	q_3
q_1	b	q_1	q_4	b	q_3	q_7	b	q_6
q_2	a	q_0	q_5	a	q_6			
q_2	b	q_2	q_5	b	q_4			

, ahol $F=\{q_0,q_1,q_2\}$

g) δ:

Q	Σ	$\mapsto_\delta$ Q	Q	Σ	$\mapsto_\delta$ Q	Q	Σ	$\mapsto_\delta$ Q	Q	Σ	$\mapsto_\delta$ Q
q_0	a	q_1	q_3	a	q_6	q_6	a	q_6	q_9	a	q_7
q_0	b	q_2	q_3	b	q_7	q_6	b	q_6	q_9	b	q_8
q_1	a	q_3	q_4	a	q_6	q_7	a	q_7			
q_1	b	q_4	q_4	b	q_7	q_7	b	q_7			
q_2	a	q_4	q_5	a	q_6	q_8	a	q_9			
q_2	b	q_5	q_5	b	q_7	q_8	b	q_8			

, ahol $F=\{q_6,q_7\}$

h) δ: $$\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc} Q & \Sigma & \mapsto_\delta & Q & Q & \Sigma & \mapsto_\delta & Q & Q & \Sigma & \mapsto_\delta & Q & Q & \Sigma & \mapsto_\delta & Q \\ q_0 & a & & q_1 & q_3 & a & & q_2 & q_6 & a & & q_7 & q_9 & a & & q_8 \\ q_0 & b & & q_2 & q_3 & b & & q_5 & q_6 & b & & q_7 & q_9 & b & & q_{10} \\ q_1 & a & & q_0 & q_4 & a & & q_5 & q_7 & a & & q_7 & q_{10} & a & & q_{10} \\ q_1 & b & & q_3 & q_4 & b & & q_6 & q_7 & b & & q_7 & q_{10} & b & & q_{10} \\ q_2 & a & & q_3 & q_5 & a & & q_4 & q_8 & a & & q_8 & & & & \\ q_2 & b & & q_4 & q_5 & b & & q_6 & q_8 & b & & q_2 & & & & \end{array}$$, ahol $F = \{q_6, q_7\}$

i) δ: $$\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc} Q & \Sigma & \mapsto_\delta & Q & Q & \Sigma & \mapsto_\delta & Q & Q & \Sigma & \mapsto_\delta & Q & Q & \Sigma & \mapsto_\delta & Q \\ q_0 & a & & q_1 & q_3 & a & & q_4 & q_6 & a & & q_5 & q_9 & a & & q_9 \\ q_0 & b & & q_3 & q_3 & b & & q_5 & q_6 & b & & q_8 & q_9 & b & & q_9 \\ q_1 & a & & q_0 & q_4 & a & & q_3 & q_7 & a & & q_8 & & & & \\ q_1 & b & & q_4 & q_4 & b & & q_6 & q_7 & b & & q_9 & & & & \\ q_2 & a & & q_3 & q_5 & a & & q_6 & q_8 & a & & q_7 & & & & \\ q_2 & b & & q_2 & q_5 & b & & q_7 & q_8 & b & & q_9 & & & & \end{array}$$, ahol $F = \{q_8, q_9\}$

9., (ez nem lesz zhban!) Igazoljuk, hogy tetszőleges M teljesen definiált, determinisztikus, *minimális* automata átmenetmonoidjából létezik *bijektív* homomorfizmus az M által felismert $L(M)$ nyelv szerinti szintaktikus monoidba! Azaz létezik $\varphi\colon T(M) \to \Sigma^*/\sim_{L(M)}$ bijektív monoidhomomorfizmus!

10., Adjuk meg a 8-as feladatban szereplő automaták által felismert nyelvek szintaktikus monoidjait! (*Hint: Az automaták által felismert nyelvek meghatározása nélkül!*)