

# Feladatok a Formális nyelvekhez I.

## 1 Fogalmak, jelölések

- Legyen  $L_1 = \{00, 11\}$ , valamint  $L_2 = \{0, 00\}$ . Határozd meg  $L_1 \cup L_2, L_1 \cap L_2, L_1 - L_2, L_1^{-1}, L_1 L_2, L_1^2, L_1^*$ , és  $(L_1 \cup L_2)^*$ -ot! Jelölés:  $w^{-1} = a_n \dots a_1$ , ha  $w = a_1 \dots a_n$ .  $L^{-1} = \{w^{-1} | w \in L\}$
- Legyen  $\Sigma = \{0, 1\}$ , és legyen  $L = \{011, 111, 110\}$   $\Sigma$  feletti nyelv. Határozzuk meg  $L^{-1}, \Sigma^* - L, L^2, L^*, L^+$ -t!
- Legyen  $\Sigma = \{0, 1\}$ , és legyenek  $L_1 = \{00, 11\}$ ,  $L_2 = \{0, 00\}$   $\Sigma$  feletti nyelvek. Határozzuk meg  $L_1 \cup L_2, L_1 \cap L_2, L_1 - L_2, L_1 L_2$ -t!
- Adott az  $L$  nyelv. Határozzuk meg, hogy mikor teljesül az  $L^* = L$  egyenlőség!
- Legyen  $L_1, L_2$  és  $L_3$  közös ábécé feletti tetszőleges nyelv. Igazak-e a következő egyenlőségek? Ha igen, bizonyítsuk, ha nem akkor adjunk ellenpéldát!

- $L_1^* \cup L_2^* = (L_1 \cup L_2)^*$
- $(L_1^* L_2^*)^* = (L_1 \cup L_2)^*$
- $L_1^* L_2^* = (L_1 L_2)^*$
- $(L_1 \cup L_2)^* = L_1^* \cup L_2^*$
- $(L_1 \cap L_2)^* = L_1^* \cap L_2^*$
- $L_1(L_2 \cup L_3) = (L_1 L_2) \cup (L_1 L_3)$
- $L_1(L_2 \cap L_3) = (L_1 L_2) \cap (L_1 L_3)$
- $L_1 \cup (L_2 L_3) = (L_1 \cup L_2)(L_1 \cup L_3)$

$$- L_1 \cap (L_2 L_3) = (L_1 \cap L_2)(L_1 \cap L_3)$$

- Legyenek  $L_1, L_2, L_3$   $\Sigma$  feletti tetszőleges nyelvek. Bizonyítsuk vagy cáfoljuk az alábbi egyenlőségeket:

$$\text{a) } (L_1 L_2 \cup L_2)^* = L_1(L_2 L_1 \cup L_1)^*$$

$$\text{b) } (L_1 L_2) L_3 = L_1(L_2 L_3)$$

$$\text{c) } (L_1 \cup L_2) L_3 = L_1 L_3 \cup L_2 L_1$$

## 2 Generatív nyelvtanok

- Tekintsük a következő szabályokat:

$$(1) S \rightarrow \lambda$$

$$(2) S \rightarrow aS$$

$$(3) S \rightarrow Sb$$

$$(4) S \rightarrow aSb$$

$$(5) S \rightarrow bSa$$

$$(6) S \rightarrow SS$$

Adjunk meg a  $G = (\{S\}, \{a, b\}, P_i, S)$  nyelvtanok által generált nyelveket, ha

$$P_1 \text{ az } (1), (2);$$

$$P_2 \text{ az } (1), (2), (3);$$

$$P_3 \text{ az } (1), (4);$$

$$P_4 \text{ az } (1), (2), (3), (6) \text{ szabályokból áll.}$$

- **A)** Adj meg 5-5 szót, amelyet az alábbi nyelvtanok generálnak!
- **B)** Adj meg 5-5 szót, amelyet az alábbi nyelvtanok nem generálnak!

$$- S \rightarrow aAbc \mid \lambda$$

$$A \rightarrow aAbC \mid \lambda$$

$$Cb \rightarrow bC$$

$$Cc \rightarrow cc$$

- $S \rightarrow CAaDS$   
 $Aa \rightarrow aA$   
 $AD \rightarrow BD$   
 $aB \rightarrow Baaa$   
 $CB \rightarrow CA$   
 $CA \rightarrow A$   
 $AD \rightarrow \lambda$
- $S \rightarrow AaB$   
 $A \rightarrow AC \mid \lambda$   
 $Ca \rightarrow aaC$   
 $CB \rightarrow B$   
 $B \rightarrow \lambda$

- Vajon a következő nyelvtan a helyes zárójelezések nyelvét generálja?  
Indokoljuk a választ!

- $S \rightarrow ()$
- $S \rightarrow (S)$
- $S \rightarrow SSS$

- Legyen  $\Sigma = \{0, 1\}$ . Mely nyelvet generálja a következő nyelvtan?

- $S \rightarrow 0B \mid 1A$
- $A \rightarrow 0 \mid 0S \mid 1AA$
- $B \rightarrow 1 \mid 1S \mid 0BB$

- Adjuk meg a következő nyelveket generáló nyelvtanokat:

- $L = \{a^n b a^n \mid n \geq 0\}$
- $L = \{a^n b^m a^n \mid n, m \geq 0\}$
- $L = \{a^n b^{2n} \mid n \geq 0\} \cup \{a^n c^n \mid n \geq 0\}$
- $L = \{a^n b^n c^m d^m \mid m, n \geq 1\} \cup \{a^n b^m c^m d^n \mid m, n \geq 1\}$
- $L = \{a^n b^m \mid n \geq m \geq 0\}$
- $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid N_a(w) = N_b(w)\}$
- $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid N_a(w) \text{ páratlan} \}$

Jelölés:  $N_a(w)$  a  $w$ -ben az  $a$  karakterek száma

- Adjunk nyelvtanokat, melyek az alábbi nyelveket generálják:

a)  $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0 \text{ és } i = j = k\}$

b)  $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0 \text{ és } j \leq i \leq k\}$

c)  $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0 \text{ és } i \neq j \neq k\}$

### 3 Reguláris nyelvek

- Legyen  $M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_0\})$  véges determinisztikus automata, ahol

$$\delta(q_0, a) = q_1, \quad \delta(q_0, b) = q_0,$$

$$\delta(q_1, a) = q_1, \quad \delta(q_1, b) = q_2,$$

$$\delta(q_2, a) = q_1, \quad \delta(q_2, b) = q_0,$$

- a) Adjuk meg  $M$  állapotdiagramját!
  - b) Kövessük végig  $M$  működését a *babaab* szón!
  - c) Adjunk reguláris kifejezést, mely  $L(M)$ -et írja le!
  - d) Adjuk meg az  $L(M)$ -et leíró reguláris kifejezést feltéve, hogy a végállapothalmaz:  $\{q_0, q_1\}$ !
- Legyen  $\Sigma = \{0, 1\}$ , és adjunk meg olyan determinisztikus véges automatókat, amelyek az alábbi nyelveket ismerik fel:
    - a)  $L_1 = \{w \in \Sigma^* : w \text{ pontosan három darab } 1\text{-esre végződik}\}$
    - b)  $L_2 = \{w \in \Sigma^* : w\text{-ben a } 010 \text{ előfordul részszóként}\}$
    - c)  $L_3 = \{w \in \Sigma^+ : w \text{ nem kezdődik két egymás utáni } 0\text{-val}\}$
    - d)  $L_4 = \{w \in \Sigma^* : w \text{ az } 101 \text{ valamilyen pozitív kitevős hatványával kezdődik}\}$
    - e)  $L_5 = \{w \in \Sigma^* : w\text{-ben van pontosan } k \text{ darab egymás utáni } 1\text{-es}\}$

- Készítsünk véges determinisztikus automatát, mely az alábbi véges determinisztikus automatákkal felismert nyelvek
  - metszetét
  - egyesítését ismeri fel.

$$a) M_1 = (\{1, 2\}, \{a, b\}, \delta_1, 1, \{2\}) \quad M_2 = (\{1, 2\}, \{a, b\}, \delta_2, 1, \{2\})$$

$\delta_1$	$a$	$b$
1	2	2
2	1	1

$\delta_2$	$a$	$b$
1	1	2
2	2	1

- Adjuk meg az  $L$  nyelvet felismerő véges nemdeterminisztikus automata állapotdiagramját! Az  $L$  nyelv
  - 1) olyan szavakból áll  $\{a, b\}$  felett, melyeknek minden négy hosszú részszavában van legalább egy  $b$  betű.
  - 2) olyan szavakból áll  $\{a, b\}$  felett, melyeknek minden négy hosszú részszavában van pontosan egy  $b$  betű.
  - 3) olyan szavakból áll  $\{a, b\}$  felett, melyekben a jobbról harmadik betű  $b$ .
- Adj olyan  $\mathbf{G}$  reguláris nyelvtant és  $\mathbf{M}$  véges automatát, ami az  $L$  nyelvet generálja illetve ismeri fel  $\Sigma = \{a, b, c\}$  felett, ahol  $L$ :
  - pontosan azokat a szavakat tartalmazza, amelyek páratlan hosszúságúak.
  - pontosan azokat a szavakat tartalmazza, amik páros hosszúságúak, és szerepel bennük legalább egy  $c$  betű.
  - pontosan azokat a szavakat tartalmazza, amelyekben legalább kétszer szerepel részként az  $ab$  szó.
  - pontosan azokat a szavakat tartalmazza, amikben egy  $a$  után valahol egy  $b$ , vagy egy  $b$  után valahol egy  $c$ , vagy egy  $c$  után valahol egy  $a$  betű szerepel.
  - pontosan azokat a szavakat tartalmazza, amelyekben minden betűből legfeljebb három szerepel egymás mellett.

- Legyen  $G$  a következő nyelvtan:

$$S \rightarrow aS \mid bA \mid a$$

$$A \rightarrow aS \mid bA \mid b.$$

- Készítsünk egy  $M$  véges nemdeterminisztikus automatát, mely  $L(G)$ -t ismeri fel!
  - Az  $a$ ) rész felhasználásával adjunk  $M'$  véges determinisztikus automatát, mely  $L(G)$ -t ismeri fel!
  - Keressünk reguláris nyelvtant  $M$ -hez, mely  $L(M)$ -et generálja!
  - Keressünk reguláris nyelvtant  $M'$ -hez, mely  $L(M')$ -et generálja!
  - Adjunk  $L(G)$ -t leíró reguláris kifejezést!
- Keressünk reguláris kifejezéseket, melyek az alábbi nyelveket írják le:

- $L = \{x \in \{a, b, c\}^* \mid x = a^i b^j c^k; i, k \geq 0, j \geq 1\}$

- $L = \{x \in \{a, b, c\}^* \mid x = a^i b^j c^k; i, k \geq 1, j \geq 0\}$

- $L = \{a\}\{a, b\}^*\{b\} \cup \{\lambda\}$

- $L = \{x \in \{a, b\}^* \mid |x| \text{ osztható } 3\text{-mal}\}$

- $L = \{x \in \{a, b\}^* \mid \text{nem fordul elő } x\text{-ben az } aaa \text{ részszó}\}$

- $L = \{x \in \{a, b\}^* \mid x\text{-ben előfordul az } aaa \text{ részszó}\}$

- $L = \{x \in \{a, b\}^* \mid \text{pontosan egyszer fordul elő az } x \text{ szóban az } aaa \text{ részszó}\}$

Adjunk véges automatákat, melyek a fenti nyelveket ismerik fel!

- Adjuk meg az alábbi nyelveket felismerő véges determinisztikus automaták állapotdiagramját!
  - $(ab)^*ba$
  - $(ab)^*(ba)^*$
  - $aa(a \cup b)^+bb$
- Adjunk az alábbi automaták által felismert nyelvekhez ekvivalens reguláris kifejezéseket:

- a)  $M_1 = (\{0, 1, 2\}, \{a, b\}, \delta_1, 0, \{2\})$   
 b)  $M_2 = (\{0, 1, 2\}, \{a, b\}, \delta_2, 0, \{0, 2\})$

$\delta_1$	a	b	$\delta_2$	a	b
0	1	1	0	1	0
1	0	2	1	0	2
2	0	0	2	2	1

- Tegyük determinisztikussá a következő automatákat:

- $M_1 = (\{0, 1, 2, 3\}, \{a, b\}, \delta_1, 0, \{0, 1\})$
- $M_2 = (\{0, 1, 2, 3\}, \{a, b\}, \delta_2, 0, \{2, 3\})$
- $M_3 = (\{0, 1, 2, 3\}, \{a, b\}, \delta_3, 0, \{0, 3\})$
- $M_4 = (\{0, 1, 2, 3\}, \{a, b\}, \delta_4, 0, \{1, 2\})$

$\delta_1$	a	b	$\delta_2$	a	b	$\delta_3$	a	b	$\delta_4$	a	b
0	1	0, 3	0	0, 1	1, 2	0	2	1, 3	0	0, 3	2
1	2, 3	1	1	0, 3	2	1	1, 3	0, 2	1	2	0, 1
2	0, 3	1, 2	2	3	0	2	0, 1	2	2	1	3
3	2	0	3	2	1, 3	3	3	0	3	0, 1	2, 3

- Adjunk meg a következő  $\mathbf{G} = (N, \Sigma, P, S)$  reguláris nyelvtanok által generált nyelveket felismerő automatákat.

- $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow a|bA, A \rightarrow aB|bC, B \rightarrow aA|bB, C \rightarrow aC|bA\}, S)$
- $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aS|bA|\lambda, A \rightarrow bS\}, S)$
- $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow abA|a, A \rightarrow bC|B, B \rightarrow a|bB|C, C \rightarrow baA|b\}, S)$

- Adjunk meg olyan determinisztikus véges automatákat, amelyek az alábbi reguláris kifejezésekkel jelölt nyelveket ismerik fel:

- a)  $bba(a + b)^*$ ;
- b)  $(a + b)^*bab$ ;
- c)  $(bb + a)^*(aa + b)^*$ ;
- d)  $(\lambda + 1 + 11)(01)^*$ ;
- e)  $((0 + 1)(0 + 1)(0 + 1))^*$ .

- Konstruáljunk az alábbi reguláris kifejezésekkel ekvivalens véges automatókat:

- $10 + (0 + 11)0^*1$
- $01(((10)^* + 111)^* + 0)^*1$

- Bizonyítsuk be, hogy a következő nyelvek nem regulárisak:

- $L = \{a^nba^n \mid n \geq 0\}$
- $L = \{a^n b^m a^n \mid n, m \geq 0\}$
- $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid N_a(w) = N_b(w)\}$
- $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid N_a(w) \neq N_b(w)\}$
- $L = \{a^i b^j \mid i \geq 0, i < j\}$

- Legyen  $L$   $\{a, b, c\}$  feletti reguláris nyelv. Igazoljuk, hogy az alábbi nyelvek mindegyike reguláris:

- a)  $L' = \{w \mid w \in L \text{ és } w \text{ tartalmaz egy } a\text{-t}\}$
- b)  $L' = \{w \mid w \in L \text{ vagy } w \text{ tartalmaz egy } a\text{-t}\}$
- c)  $L' = \{w \mid w \notin L \text{ és } w \text{ nem tartalmaz } a\text{-t}\}$ .

- Bizonyítsa be vagy cáfolja meg, hogy ha  $L, L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$  reguláris nyelvek, akkor

- $L^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in L\}$
- $L_{prefix} = \{x \mid (\exists y)(xy \in L)\}$
- $L_{suffix} = \{y \mid (\exists x)(xy \in L)\}$

is reguláris.