Feladatok a Formális nyelvekhez I.

1 Fogalmak, jelölések

- Legyen $L_1 = \{00, 11\}$, valamint $L_2 = \{0, 00\}$. Határozd meg $L_1 \cup L_2, L_1 \cap L_2, L_1 - L_2, L_1^{-1}, L_1L_2, L_1^2, L_1^*$, és $(L_1 \cup L_2)^*$-ot! Jelölés: $w^{-1} = a_n...a_1$, ha $w = a_1...a_n$. $L^{-1} = \{w^{-1} | w \in L\}$
- Legyen $\Sigma = \{0, 1\}$, és legyen $L = \{011, 111, 110\}$ Σ feletti nyelv. Határozzuk meg L^{-1}, $\Sigma^* - L$, L^2, L^*, L^+-t!
- Legyen $\Sigma = \{0, 1\}$, és legyenek $L_1 = \{00, 11\}$, $L_2 = \{0, 00\}$ Σ feletti nyelvek. Határozzuk meg $L_1 \cup L_2, L_1 \cap L_2, L_1 - L_2, L_1L_2$-t!
- Adott az L nyelv. Határozzuk meg, hogy mikor teljesül az $L^* = L$ egyenlőség!
- Legyen L_1, L_2 és L_3 közös ábécé feletti tetszőleges nyelv. Igazak-e a következő egyenlőségek? Ha igen, bizonyítsuk, ha nem akkor adjunk ellenpéldát!
  - $L_1^* \cup L_2^* = (L_1 \cup L_2)^*$
  - $(L_1^* L_2^*)^* = (L_1 \cup L_2)^*$
  - $L_1^* L_2^* = (L_1 L_2)^*$
  - $(L_1 \cup L_2)^* = L_1^* \cup L_2^*$
  - $(L_1 \cap L_2)^* = L_1^* \cap L_2^*$
  - $L_1(L_2 \cup L_3) = (L_1L_2) \cup (L_1L_3)$
  - $L_1(L_2 \cap L_3) = (L_1L_2) \cap (L_1L_3)$
  - $L_1 \cup (L_2L_3) = (L_1 \cup L_2)(L_1 \cup L_3)$

– $L_1 \cap (L_2L_3) = (L_1 \cap L_2)(L_1 \cap L_3)$

- Legyenek L_1, L_2, L_3 Σ feletti tetszőleges nyelvek. Bizonyítsuk vagy cáfoljuk az alábbi egyenlőségeket:

  a) $(L_1L_2 \cup L_2)^* = L_1(L_2L_1 \cup L_1)^*$

  b) $(L_1L_2)L_3 = L_1(L_2L_3)$

  c) $(L_1 \cup L_2)L_3 = L_1L_3 \cup L_2L_1$

2 Generatív nyelvtanok

- Tekintsük a következő szabályokat:

  (1) $S \to \lambda$

  (2) $S \to aS$

  (3) $S \to Sb$

  (4) $S \to aSb$

  (5) $S \to bSa$

  (6) $S \to SS$

  Adjunk meg a $G = (\{S\}, \{a, b\}, P_i, S)$ nyelvtanok által generált nyelveket, ha

  P_1 az (1),(2);

  P_2 az (1),(2),(3);

  P_3 az (1),(4);

  P_4 az (1),(2),(3),(6) szabályokból áll.

- **A)** Adj meg 5-5 szót, amelyet az alábbi nyelvtanok generálnak!

  B) Adj meg 5-5 szót, amelyet az alábbi nyelvtanok nem generálnak!

  – $S \to aAbc \mid \lambda$
  $A \to aAbC \mid \lambda$
  $Cb \to bC$
  $Cc \to cc$

- $S \to CAaDS$
  $Aa \to aA$
  $AD \to BD$
  $aB \to Baaa$
  $CB \to CA$
  $CA \to A$
  $AD \to \lambda$
- $S \to AaB$
  $A \to AC \mid \lambda$
  $Ca \to aaC$
  $CB \to B$
  $B \to \lambda$

- Vajon a következő nyelvtan a helyes zárójelezések nyelvét generálja? Indokoljuk a választ!

  $S \to ()$

  $S \to (S)$

  $S \to SSS$

- Legyen $\Sigma = \{0, 1\}$. Mely nyelvet generálja a következő nyelvtan?

  $S \to 0B \mid 1A$

  $A \to 0 \mid 0S \mid 1AA$

  $B \to 1 \mid 1S \mid 0BB$

- Adjuk meg a következő nyelveket generáló nyelvtanokat:
  - $L = \{a^n b a^n \mid n \geq 0\}$
  - $L = \{a^n b^m a^n \mid n, m \geq 0\}$
  - $L = \{a^n b^{2n} \mid n \geq 0\} \cup \{a^n c^n \mid n \geq 0\}$
  - $L = \{a^n b^n c^m d^m \mid m, n \geq 1\} \cup \{a^n b^m c^m d^n \mid m, n \geq 1\}$
  - $L = \{a^n b^m \mid n \geq m \geq 0\}$
  - $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid N_a(w) = N_b(w)\}$
  - $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid N_a(w) \text{ páratlan } \}$

Jelölés: $N_a(w)$ a w-ben az a karakterek száma

- Adjunk nyelvtanokat, melyek az alábbi nyelveket generálják:
  a) $L = \{a^i b^j c^k \mid i,j,k \geq 0$ és $i = j = k\}$
  b) $L = \{a^i b^j c^k \mid i,j,k \geq 0$ és $j \leq i \leq k\}$
  c) $L = \{a^i b^j c^k \mid i,j,k \geq 0$ és $i \neq j \neq k\}$

3 Reguláris nyelvek

- Legyen $M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_0\})$ véges determinisztikus automata, ahol
$$\delta(q_0, a) = q_1, \quad \delta(q_0, b) = q_0,$$
$$\delta(q_1, a) = q_1, \quad \delta(q_1, b) = q_2,$$
$$\delta(q_2, a) = q_1, \quad \delta(q_2, b) = q_0,$$
  a) Adjuk meg M állapotdiagramját!
  b) Kövessük végig M működését a *babaab* szón!
  c) Adjunk reguláris kifejezést, mely $L(M)$-et írja le!
  d) Adjuk meg az $L(M)$-et leíró reguláris kifejezést feltéve, hogy a végállapothalmaz: $\{q_0, q_1\}$!
- Legyen $\Sigma = \{0, 1\}$, és adjunk meg olyan determinisztikus véges automatákat, amelyek az alábbi nyelveket ismerik fel:
  a) $L_1 = \{w \in \Sigma^* : w$ pontosan három darab 1-esre végződik$\}$
  b) $L_2 = \{w \in \Sigma^* : w$-ben a 010 előfordul részszóként$\}$
  c) $L_3 = \{w \in \Sigma^+ : w$ nem kezdődik két egymás utáni 0-val$\}$
  d) $L_4 = \{w \in \Sigma^* : w$ az 101 valamilyen pozitív kitevős hatványával kezdődik$\}$
  e) $L_5 = \{w \in \Sigma^* : w$-ben van pontosan k darab egymás utáni 1-es$\}$

- Készítsünk véges determinisztikus automatát, mely az alábbi véges determinisztikus automatapárokkal felismert nyelvek
  - metszetét
  - egyesítését ismeri fel.

  a) $M_1 = (\{1,2\},\{a,b\},\delta_1,1,\{2\})$ $M_2 = (\{1,2\},\{a,b\},\delta_2,1,\{2\})$

δ_1	a	b
1	2	2
2	1	1

δ_2	a	b
1	1	2
2	2	1

- Adjuk meg az L nyelvet felismerő véges nemdeterminisztikus automata állapotdiagramját! Az L nyelv

  1) olyan szavakból áll $\{a,b\}$ felett, melyeknek minden négy hosszú részszavában van legalább egy b betű.
  2) olyan szavakból áll $\{a,b\}$ felett, melyeknek minden négy hosszú részszavában van pontosan egy b betű.
  3) olyan szavakból áll $\{a,b\}$ felett, melyekben a jobbról harmadik betű b.

- Adj olyan **G** reguláris nyelvtant és **M** véges automatát, ami az L nyelvet generálja illetve ismeri fel $\Sigma = \{a,b,c\}$ felett, ahol L:

  – pontosan azokat a szavakat tartalmazza, amelyek páratlan hosszúságúak.

  – pontosan azokat a szavakat tartalmazza, amik páros hosszúságúak, és szerepel bennük legalább egy c betű.

  – pontosan azokat a szavakat tartalmazza, amelyekben legalább kétszer szerepel részként az ab szó.

  – pontosan azokat a szavakat tartalmazza, amikben egy a után valahol egy b, vagy egy b után valahol egy c, vagy egy c után valahol egy a betű szerepel.

  – pontosan azokat a szavakat tartalmazza, amelyekben minden betűből legfeljebb három szerepel egymás mellett.

- Legyen G a következő nyelvtan:

$$S \to aS \mid bA \mid a$$

$$A \to aS \mid bA \mid b.$$

  a) Készítsünk egy M véges nemdeterminisztikus automatát, mely $L(G)$-t ismeri fel!
  b) Az a) rész felhasználásával adjunk M' véges determinisztikus automatát, mely $L(G)$-t ismeri fel!
  c) Keressünk reguláris nyelvtant M-hez, mely $L(M)$-et generálja!
  d) Keressünk reguláris nyelvtant M'-höz, mely $L(M')$-et generálja!
  e) Adjunk $L(G)$-t leíró reguláris kifejezést!

- Keressünk reguláris kifejezéseket, melyek az alábbi nyelveket írják le:

  a) $L = \{x \in \{a,b,c\}^* \mid x = a^i b^j c^k;\ i,k \geq 0,\ j \geq 1\}$
  b) $L = \{x \in \{a,b,c\}^* \mid x = a^i b^j c^k;\ i,k \geq 1,\ j \geq 0\}$
  c) $L = \{a\}\{a,b\}^*\{b\} \cup \{\lambda\}$
  d) $L = \{x \in \{a,b\}^* \mid |x|$ osztható 3-mal $\}$
  e) $L = \{x \in \{a,b\}^* \mid$ nem fordul elő x-ben az aaa részszó $\}$
  f) $L = \{x \in \{a,b\}^* \mid x$-ben előfordul az aaa részszó $\}$
  g) $L = \{x \in \{a,b\}^* \mid$ pontosan egyszer fordul elő az x szóban az aaa részszó $\}$

  Adjunk véges automatákat, melyek a fenti nyelveket ismerik fel!

- Adjuk meg az alábbi nyelveket felismerő véges determinisztikus automaták állapotdiagramját!

  a) $(ab)^*ba$
  b) $(ab)^*(ba)^*$
  c) $aa(a \cup b)^+bb$

- Adjunk az alábbi automaták által felismert nyelvekhez ekvivalens reguláris kifejezéseket:

a) $M_1 = (\{0,1,2\},\{a,b\},\delta_1,0,\{2\})$

b) $M_2 = (\{0,1,2\},\{a,b\},\delta_2,0,\{0,2\})$

δ_1	a	b
0	1	1
1	0	2
2	0	0

δ_2	a	b
0	1	0
1	0	2
2	2	1

- Tegyük determinisztikussá a következő automatákat:
  - $\mathbf{M_1} = (\{0,1,2,3\},\{a,b\},\delta_1,0,\{0,1\})$
  - $\mathbf{M_2} = (\{0,1,2,3\},\{a,b\},\delta_2,0,\{2,3\})$
  - $\mathbf{M_3} = (\{0,1,2,3\},\{a,b\},\delta_3,0,\{0,3\})$
  - $\mathbf{M_4} = (\{0,1,2,3\},\{a,b\},\delta_4,0,\{1,2\})$

δ_1	a	b
0	1	0, 3
1	2, 3	1
2	0, 3	1, 2
3	2	0

δ_2	a	b
0	0, 1	1, 2
1	0, 3	2
2	3	0
3	2	1, 3

δ_3	a	b
0	2	1, 3
1	1, 3	0, 2
2	0, 1	2
3	3	0

δ_4	a	b
0	0, 3	2
1	2	0, 1
2	1	3
3	0, 1	2, 3

- Adjunk meg a következő $\mathbf{G} = (N,\Sigma,P,S)$ reguláris nyelvtanok által generált nyelveket felismerő automatákat.
  - $G = (\{S,A,B,C\},\ \{a,b\},$
    $\{S \to a|bA,\ A \to aB|bC,\ B \to aA|bB,\ C \to aC|bA\},\ S)$
  - $G = (\{S,A\},\ \{a,b\},$
    $\{S \to aS|bA|\lambda,\ A \to bS\},\ S)$
  - $G = (\{S,A,B,C\},\ \{a,b\},$
    $\{S \to abA|a,\ A \to bC|B,\ B \to a|bB|C,\ C \to baA|b\},\ S)$
- Adjunk meg olyan determinisztikus véges automatákat, amelyek az alábbi reguláris kifejezésekkel jelölt nyelveket ismerik fel:

a) $bba(a+b)^*$;

b) $(a+b)^*bab$;

c) $(bb+a)^*(aa+b)^*$;

d) $(\lambda+1+11)(01)^*$;

e) $((0+1)(0+1)(0+1))^*$.

- Konstruáljunk az alábbi reguláris kifejezésekkel ekvivalens véges automatákat:

  - $10+(0+11)0^*1$
  - $01(((10)^*+111)^*+0)^*1$

- Bizonyítsuk be, hogy a következő nyelvek nem regulárisak:

  - $L=\{a^nba^n|\ n\geq 0\}$
  - $L=\{a^nb^ma^n|\ n,m\geq 0\}$
  - $L=\{w\in\{a,b\}^*|\ N_a(w)=N_b(w)\}$
  - $L=\{w\in\{a,b\}^*|\ N_a(w)\neq N_b(w)\}$
  - $L=\{a^ib^j|\ i\geq 0, i<j\}$

- Legyen L $\{a,b,c\}$ feletti reguláris nyelv. Igazoljuk, hogy az alábbi nyelvek mindegyike reguláris:

  a) $L'=\{w|\ w\in L$ és w tartalmaz egy a-t$\}$

  b) $L'=\{w|\ w\in L$ vagy w tartalmaz egy a-t$\}$

  c) $L'=\{w|\ w\notin L$ és w nem tartalmaz a-t$\}$.

- Bizonyítsa be vagy cáfolja meg, hogy ha $L, L_1, L_2\subseteq\Sigma^*$ reguláris nyelvek, akkor

  - $L^{-1}=\{x^{-1}\mid x\in L\}$
  - $L_{prefix}=\{x\mid(\exists y)(xy\in L)\}$
  - $L_{suffix}=\{y\mid(\exists x)(xy\in L)\}$

  is reguláris.