

Feladatok környezetfüggetlen nyelvekre és veremautomatákra

- Adjunk meg a következő szabályokkal adott $\mathbf{G} = (\{K, T, F\}, \{a, b, *, +, (,)\}, P, K)$ CF nyelvtenhöz olyan $t \in D_K$ derivációs fát, melyre $fr(t) = ((a * b + b * b) + b) * (a + a)$.

$$K \rightarrow K + T | T$$

$$T \rightarrow T * F | F$$

$$F \rightarrow (K) | a | b$$

- A** Adjon meg 3-3 szót, amelyet az alábbi környezetfüggetlen nyelvtenok generálnak!
- B** Minden szóhoz rajzolja fel a lehetséges derivációs fákat és számolja ki a fák magasságát!
- C** Minden szóhoz írja fel a bal- és jobboldali derivációkat!

$$(a) \quad S \rightarrow abSba \mid A \mid cAc \quad (b) \quad S \rightarrow aSbSa \mid \lambda$$

$$A \rightarrow cc$$

$$(c) \quad S \rightarrow ASB \mid \lambda \quad (d) \quad S \rightarrow SS \mid a_1Sa_2 \mid a_1a_2$$

$$A \rightarrow aSb \mid \lambda \quad S \rightarrow a_3Sa_4 \mid a_3a_4 \mid a_5Sa_6 \mid a_5a_6$$

$$B \rightarrow aBb \mid ba$$

$$(e) \quad S \rightarrow aSb \mid A \quad (f) \quad S \rightarrow aSbS \mid bSaS \mid \lambda$$

$$A \rightarrow bAa \mid \lambda$$

$$(g) \quad S \rightarrow ASA \mid c \quad (h) \quad S \rightarrow AB \mid \lambda$$

$$A \rightarrow bAb \mid B \quad A \rightarrow aaA \mid aaaA \mid \lambda$$

$$B \rightarrow a \mid c \quad B \rightarrow bB \mid \lambda$$

- Legyen \mathbf{G} a következő környezetfüggetlen nyelvten:

$$S \rightarrow aB \mid bA$$

$$A \rightarrow a \mid aS \mid bAA$$

$$B \rightarrow b \mid bS \mid aBB$$

Keressünk az *aaabbabba* szóhoz egy

- a) baloldali levezetést
- b) jobboldali levezetést
- c) derivációs fát!

- Vizsgáljuk meg az alábbi környezetfüggetlen G nyelvtant:

$$S \rightarrow ABS \mid AB$$

$$A \rightarrow aA \mid a$$

$$B \rightarrow bA$$

Az alábbi szavak közül melyek vannak $L(G)$ -ben? Adjunk egy derivációt azokhoz, melyek $L(G)$ -ben vannak, illetve indokoljuk, hogy miért nincsenek $L(G)$ -ben.

- a) *aabaab*
- b) *aaaaba*
- c) *aabbaa*
- d) *abaaba*

- Mely nyelvet generálja az alábbi nyelvtan?

$$S \rightarrow bS \mid Sa \mid aSb \mid \lambda$$

Állításunkat igazoljuk!

- Határozzuk meg az alábbi CF nyelvtanok által generált nyelveket:

- a) $S \rightarrow aSa \mid bSb \mid \lambda$
- b) $S \rightarrow aSa \mid bSb \mid a \mid b$
- c) $S \rightarrow aS \mid Sb \mid a$
- d) $S \rightarrow aS \mid Sb \mid a \mid SS$
- e) $S \rightarrow aSa \mid bb$

- Keressünk olyan G környezetfüggetlen nyelvtant, melyre

a) $L(G) = \{x^m y^n \mid m, n \in N_0; n < m\}$.

b) $L(G) = \{x^m y^n \mid m, n \in N_0; n > m\}$.

- Adjunk CF nyelvtanokat, melyek az alábbi nyelveket generálják:

a) $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0 \text{ és } i = j + k\}$

b) $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0 \text{ és } j = i + k\}$

c) $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0 \text{ és } i \neq j + k\}$

d) $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0 \text{ és } j \neq i\}$

e) $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0 \text{ és } j \neq k\}$

f) $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0 \text{ és } j \neq i + k\}$

g) $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0 \text{ és } i = j \text{ vagy } j = k\}$

h) $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0 \text{ és } i = j \text{ vagy } i = k\}$

i) $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0 \text{ és } i < j \text{ vagy } j > k\}$

j) $L = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \text{ és } i \leq 2j\}$

k) $L = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \text{ és } i \leq j \leq 2i\}$

l) $L = \{a^i b^i c^j \mid i, j \geq 0\}$

m) $L = \{a^i b^i c^j d^j \mid i, j \geq 0\}$

- Alakítsuk át környezetfüggő nyelvtanokká a következő szabályok által megadott környezetfüggetlen nyelvtanokat:

<p>(a) $S \rightarrow \lambda \mid ABA \mid CSD$ $A \rightarrow a \mid ABA \mid CS$ $B \rightarrow b \mid \lambda \mid CD \mid AS$ $C \rightarrow c \mid AB \mid DS \mid SB$ $D \rightarrow d \mid SA \mid BSB \mid CA$</p>	<p>(b) $S \rightarrow AB \mid CD$ $A \rightarrow BA \mid CAD \mid a$ $B \rightarrow b \mid D \mid AA \mid SB$ $C \rightarrow a \mid DB \mid DS$ $D \rightarrow \lambda \mid S \mid ab$</p>
--	---

<p>(c) $S \rightarrow bB \mid aCD$ $A \rightarrow \lambda \mid aD$ $B \rightarrow BA \mid SD$ $C \rightarrow DA \mid Da$ $D \rightarrow AA \mid BB$</p>	<p>(d) $S \rightarrow bB \mid aC$ $A \rightarrow aA \mid SB$ $B \rightarrow C \mid aA$ $C \rightarrow \lambda \mid SBD$ $D \rightarrow CB \mid SD$</p>
--	---

- Keressünk olyan P veremautomatát, melyre
 - a) $L(P) = \{x^m y^n \mid m, n \in N_0; m \leq n \leq 2m\}$.
 - b) $L(P) = \{x^m y^n \mid m, n \in N_0; n < m \text{ vagy } 2m < n\}$.
- Legyen $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w\text{-nek van olyan kezdőszelete, melyben több a } b \text{ betű, mint az } a \text{ betű}\}$. Például $ba, abba, abbaaa \in L$, de $aab, aabbab \notin L$.
 - a) Adjunk L -et végállapottal felismerő veremautomatát.
 - b) Adjunk L -et üres veremmel felismerő veremautomatát.
- Adjuk meg azon P veremautomata állapotdiagramját, mely üres veremmel ismeri fel az $L = \{a^{2i} b^{i+j} \mid 0 \leq j \leq i\}$ nyelvet. Mi a szerepe a veremszimbólumoknak P működésében? Kövessük végig P működését az $aabb, aaaabb$ szavakon!
- Adjunk veremautomatákat, melyek az alábbi nyelveket ismerik fel:
 - a) $L = \{a^i b^j \mid 0 \leq i \leq j\}$
 - b) $L = \{a^i c^j b^i \mid i, j \geq 0\}$
 - c) $L = \{a^i b^j c^k \mid i + k = j\}$
 - d) $L = \{a^i b^i \mid i \geq 0\} \cup a^* \cup b^*$
 - e) $L = \{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ vagy } j = k\}$
 - f) $L = \{a^i b^j \mid i \neq j\}$
 - g) $L = \{a^i b^j \mid 0 \leq i \leq j \leq 2i\}$
 - h) $L = \{a^{i+j} b^i c^j \mid i, j > 0\}$
- Legyen G a következő nyelvtan:

$$S \rightarrow aS \mid aSbS \mid \lambda.$$

Bizonyítsuk be, hogy

$$L(G) = \{x \mid x \text{ minden kezdőszeletében legalább annyi } a \text{ van mint } b\}.$$

- Adjuk meg a következő nyelveket felismerő illetve generáló veremautomatákat :

- $L = \{a^{2n}b^{3n} \mid n \geq 0\}$
- $L = \{ww^{-1} \mid w \in \{a, b\}^*\}$
- $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid N_a(w) = N_b(w)\}$
- $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid 2 * N_a(w) = 3 * N_b(w)\}$

- Adjunk meg olyan $\mathbf{G} = (N, \Sigma, P, S)$ CF nyelvtant, ami a következő $\mathbf{P} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ veremautomata által üres veremmel felismert nyelvet generálja:

$$Q = \{q_0, q_1\}$$

$$\Sigma = \{a, b\}$$

$$\Gamma = \{Z_0, a, b\}$$

$$F = \emptyset$$

$$\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, aa), (q_0, b)\}$$

$$\delta(q_0, a, a) = \{(q_0, aaa)\}$$

$$\delta(q_0, a, b) = \{(q_0, b)\}$$

$$\delta(q_0, b, a) = \{(q_1, \lambda)\}$$

$$\delta(q_0, b, b) = \{(q_1, \lambda)\}$$

$$\delta(q_1, b, a) = \{(q_1, \lambda)\}$$

$$\delta(q_1, b, b) = \{(q_1, \lambda)\}$$

- Adjunk meg olyan $\mathbf{G} = (N, \Sigma, P, S)$ CF nyelvtant, ami a következő $\mathbf{P} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ veremautomata által üres veremmel felismert nyelvet generálja:

$$Q = \{q_0, q_1\}$$

$$\Sigma = \{a, b\}$$

$$\Gamma = \{Z_0, a, b\}$$

$$F = \emptyset$$

$$\delta(q_0, \lambda, Z_0) = \{(q_0, \lambda)\}$$

$$\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_1, aZ_0)\}$$

$$\delta(q_1, a, a) = \{(q_0, aaa)\}$$

$$\delta(q_0, b, a) = \{(q_0, \lambda)\}$$

- Adott a $P = (\{q_0, q_1\}, \{0, 1\}, \{Z_0, X\}, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$ veremautomata, ahol δ a következő:

$$\delta(q_0, 1, Z_0) = \{(q_0, XZ_0)\}$$

$$\begin{aligned}\delta(q_0, \lambda, Z_0) &= \{(q_0, \lambda)\} \\ \delta(q_0, 1, X) &= \{(q_0, XX)\} \\ \delta(q_1, 1, X) &= \{(q_1, \lambda)\} \\ \delta(q_0, 0, X) &= \{(q_1, X)\} \\ \delta(q_1, 0, Z_0) &= \{(q_0, Z_0)\}\end{aligned}$$

Adjunk $L(P)$ -t generáló nyelvtant!

- Készíts a következő szabályok által megadott nyelvtanhoz olyan verem-automatát, amik a nyelvtanok által generált nyelveket ismerik fel:

$$\begin{array}{lll}(a) & S \rightarrow a \mid AB & (e) \quad S \rightarrow BA \mid aC \quad (c) \quad S \rightarrow AB \mid aC \\ & A \rightarrow b \mid aC & A \rightarrow b \mid BA \quad A \rightarrow b \mid BB \\ & B \rightarrow C \mid \lambda & B \rightarrow c \mid AB \quad B \rightarrow c \mid CB \\ & C \rightarrow cS \mid AB & C \rightarrow \lambda \mid BC \quad C \rightarrow \lambda \mid AA\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}(d) & S \rightarrow AA \mid aC & (e) \quad S \rightarrow BB \mid aC \quad (f) \quad S \rightarrow \lambda \mid BC \\ & A \rightarrow b \mid CA & A \rightarrow b \mid CB \quad A \rightarrow aA \mid a \\ & B \rightarrow c \mid CA & B \rightarrow c \mid AA \quad B \rightarrow CC \mid bA \mid \lambda \\ & C \rightarrow \lambda \mid BA & C \rightarrow \lambda \mid AC \quad C \rightarrow BB \mid cA \mid \lambda\end{array}$$

- Bizonyítsuk be, hogy a következő nyelvek nem környezetfüggetlenek:

- $L = \{a^{i^2} \mid i \geq 0\}$
- $L = \{a^{2^i} \mid i \geq 0\}$
- $L = \{a^p \mid p \text{ prím}\}$
- $L = \{a^n b^m a^n \mid n \geq m\}$
- $L = \{a^n b^m a^n b^m \mid n, m \geq 0\}$
- $L = \{a^i b^{i^2} \mid i \geq 0\}$
- $L = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$
- $L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid N_a(w) = N_b(w) = N_c(w)\}$
- $L = \{a^i b^j c^k \mid i < j < k\}$

- Az alábbi nyelvek közül melyek környezetfüggetlenek? A CF nyelvekhez adjunk öt generáló CF nyelvtant, a többről pedig igazoljuk, hogy nem CF nyelv!

- a) $\{a^n b^m c^k \mid n, m, k \geq 1 \text{ és } (2n = 3k \text{ vagy } 5k = 7m)\}$
- b) $\{a^n b^m c^k \mid n, m, k \geq 1 \text{ és } (2n = 3k \text{ és } 5k = 7m)\}$
- c) $\{a^n b^m c^k \mid n, m, k \geq 1 \text{ és } (n \neq 3m \text{ vagy } n \neq 5k)\}$
- d) $\{a^n b^m c^k \mid n, m, k \geq 1 \text{ és } (n \neq 3m \text{ és } n \neq 5k)\}$
- e) $\{a^i b^j c^k d^l \mid i, j, k, l \geq 1, i = j, k = l\}$
- f) $\{a^i b^j c^k d^l \mid i, j, k, l \geq 1, i = k, j = l\}$
- g) $\{a^i b^j c^k d^l \mid i, j, k, l \geq 1, i = l, j = k\}$

- Bizonyítsuk be, hogy az

- a) $L_1 = \{a^i b^{2i} c^j \mid i, j \geq 0\}$ nyelv környezetfüggetlen!
- b) $L_2 = \{a^j b^i c^{2i} \mid i, j \geq 0\}$ nyelv környezetfüggetlen!
- c) $L_1 \cap L_2$ nyelv nem környezetfüggetlen!

- Bizonyítsuk be, hogy az

- a) $L_1 = \{a^i b^i c^j d^j \mid i, j \geq 0\}$ nyelv környezetfüggetlen!
- b) $L_2 = \{a^j b^i c^i d^k \mid i, j, k \geq 0\}$ nyelv környezetfüggetlen!
- c) $L_1 \cap L_2$ nyelv nem környezetfüggetlen!

- Legyen $L = L(\mathbf{P})$ a \mathbf{P} veremautomata által felismert környezetfüggetlen nyelv. Készíts algoritmust, amivel \mathbf{P} -ből olyan \mathbf{P}' veremautomata készíthető, ami L^* -ot ismeri fel.

- Legyen P veremautomata. Bizonyítsuk be, hogy van olyan algoritmus, mely eldönti, hogy

- a) $L(P)$ üres-e,
- b) $L(P)$ véges-e,
- c) $L(P)$ végtelen-e!