



Bizonytalanság

Bevezetés

- Eddig: logika, igaz/hamis
- Ha nem teljes a tudás...
- A világ nem figyelhető meg közvetlenül
- Részleges tudás nem reprezentálható logikai eszközökkel



Bizonytalan tudás

- Fogfájás és lyukas fog
- Nem teljes tudás:

$\forall x \text{ Tünet}(x, \text{fogfájás}) \rightarrow \text{Betegség}(x, \text{lyuk}) \vee \text{Betegség}(x, \text{gyulladás}) \vee \text{Betegség}(x, \text{tályog}) \dots$

- Egyszerűsítés:

$\forall x \text{ Tünet}(x, \text{fogfájás}) \rightarrow \text{Betegség}(x, \text{lyuk})$



Valószínűség

- **A tudás tökéletlen:**
 - Lustaság
 - A tudomány nem elég fejlett
- **Kezeljük véletlen hatásként**
- **Valószínűség**
- **A hit foka: a való világban az állítás igaz vagy hamis, csak ezt nem tudjuk pontosan (pl. 80%-os valószínűséggel hisszük, hogy igaz)**



Racionális ágens

- **Preferenciasorrend a lehetséges kimenetek között –
hasznosságelmélet: mi a legjobb nekem?**
- **Döntéselmélet = valószínűség-elmélet + hasznosságelmélet**



Alapfogalmak

- Véletlen változó: a világ egy részére vonatkozik
- Értéktartomány: valószínűségi változó értékei
 - Logikai: Lyuk = igaz; lyuk
 - Diszkrét: megszámlálható
Időjárás = <nap, eső, felhő, hó>
 - Folytonos: valós értékek



Elemi esemény

- A világ egy állapotának teljes leírása
- $\text{Lyuk} = \text{hamis} \wedge \text{Fogfájás} = \text{igaz}$
- minden lehetséges világot (tehát az aktuális világot is) pontosan egy elemi esemény írja le (modellezi)
- egy elemi esemény természetes módon minden lehetséges elemi kijelentéshez igazságértéket rendel
- minden kijelentés logikailag ekvivalens a neki nem ellentmondó elemi eseményeket leíró kijelentések halmazával



A priori valószínűség

- Feltétel nélküli valószínűség
- Bármely más információ hiányában az állításhoz kapcsolható
- Valószínűség: függvény, mely egy kijelentéshez egy valós számot rendel

$P(a)$ - valószínűség

$P(\text{Idő} = \text{nap}) = 0,5$

$P(A) = (0,2, 0,3, 0,4, 0,1)$ – eloszlás

$P(A, B)$ – együttes eloszlás (táblázat)

$P(A, B, C)$ – teljes együttes eloszlás (táblázat)





A posteriori valószínűség

- Feltételes valószínűség
- $P(a|b)$
- $P(\text{Lyuk}|\text{Fogfájás}) = 0,8$
- Definíció szerint:
- $P(a|b) = P(a \wedge b) / P(b) \quad (P(b) > 0)$
- Szorzatszabály:
 $P(a \wedge b) = P(a|b) P(b)$
- $P(A|B)$ – feltételes valószínűségek táblázata, ahol A és B összes lehetséges értékpárja szerepel

Valószínűségi axiómák

- $0 \leq P(a) \leq 1$
- $P(\text{igaz}) = 1$, $P(\text{hamis}) = 0$, ahol az igaz kijelentés egy tautológia, a hamis pedig ellentmondás.
- $P(a \vee b) = P(a) + P(b) - P(a \wedge b)$
- Igazoljuk, hogy $P(\neg a) = 1 - P(a)$





Honnan jönnek a valószínűségek?

- **Kísérletekből?**
- **Univerzum jellemzői?**
- **Ágensek rendelik hozzá az eseményekhez?**

Valószínűségi következtetés

- Teljes együttes eloszlás a kiindulópont
- Példa: 3 logikai változó (Luk, Fogfájás, Beakad)
- A valószínűségek összege 1



Luk	Fogfájás	Beakad	$P()$
nem	nem	nem	0.567
nem	nem	igen	0.144
nem	igen	nem	0.064
nem	igen	igen	0.016
igen	nem	nem	0.008
igen	nem	igen	0.072
igen	igen	nem	0.012
igen	igen	igen	0.108

$$P(\text{luk} \vee \text{fogfájás}) = 0,108 + 0,012 + 0,072 + 0,008 + 0,016 + 0,064$$

$P(\text{luk})$ = alsó négy sor összege – feltétel nélküli /peremeloszlás

Feltételfeloldás:

$$P(A) = \sum_b P(A, b), \quad P(A) = \sum_b P(A|b)P(b),$$



Következtetés

- Vannak tapasztalataink a világról
- Feltételes valószínűségek kiszámítása
- $P(\text{luk}|\text{fogfájás}) = ?$
- $P(\text{luk}|\text{fogfájás}) = P(\text{luk} \wedge \text{fogfájás}) / P(\text{fogfájás})$
- Normalizálás

$$P(\text{Luk}|\text{fogfájás}) = \frac{1}{P(\text{fogfájás})} P(\text{Luk}, \text{fogfájás}) = \left(\frac{0.12}{P(\text{fogfájás})}, \frac{0.08}{P(\text{fogfájás})} \right)$$

- $1/ P(\text{fogfájás})$ nem függ a luk értékétől



Általános következtetés

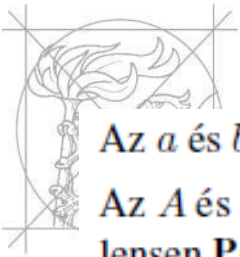
- α normalizálási konstans
- A keresés változója
- B tény változók halmaza
- b tények megfigyelt értéke
- X meg nem figyelt változók

$$P(A|b) = \alpha P(A, b) = \alpha \sum_x P(A, b, x)$$



Függetlenség

- $P(\text{Fogfájás, Luk, Beakad, Hónap})$
- Hónapot nem befolyásolja a fogászat
- $P(\text{április}|\text{fogfájás, beakadás, luk}) = P(\text{április})$
- Egyik nem tartalmaz információt a másiktól és viszont
- A változók teljes halmaza felbontható független részhalmazokra - csökken a tartományleírások mérete



Az a és b kijelentések *függetlenek* akkor és csak akkor ha $P(a \wedge b) = P(a)P(b)$.

Az A és B véletlen változók függetlenek akkor és csak akkor ha $P(A, B) = P(A)P(B)$, vagy ekvivalensen $P(A|B) = P(A)$, ill. $P(B|A) = P(B)$.

Feltételes függetlenség

- Nem közvetlenül, hanem egy másik véletlen változón keresztül függenek össze
- Közös ok (pl. beakadás és fogfájás – luk)

Az A és B véletlen változók feltételesen függetlenek C feltevésével akkor és csak akkor ha $P(A, B|C) = P(A|C)P(B|C)$, vagy ekvivalensen $P(A|B, C) = P(A|C)$, ill. $P(B|A, C) = P(B|C)$.

- Naív Bayes-modell

$$P(B_1, \dots, B_n|A) = \prod_{i=1}^n P(B_i|A)$$





A Bayes-szabály

$$P(a \wedge b) = P(a|b)P(b) = P(b|a)P(a)$$

$$P(a|b) = \frac{P(b|a)P(a)}{P(b)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Motiváció

- A „fordított” feltételes valószínűség néha könnyebben kiszámítható, mint a „rendes”
- $P(\text{Fejfájás}|\text{Influenza})$ vs. $P(\text{Influenza}|\text{Fejfájás})$
- Háttértudás: $P(\text{Fejfájás}|\text{Influenza})$
- Aktuális tapasztalat: $P(\text{Influenza})$
- A betegségre következtetünk a tünetből
- A $P(\text{Fejfájás})$ nem fontos – normalizálás

$$P(A|B) = \alpha P(B|A)P(A)$$



Wumpus világ valószínűségekkel

- Minden négyzethez 2 logikai változó: $C_{i,j}$ és $S_{i,j}$
- Négyzetek 0,2 valószínűséggel tartalmaznak csapdát
- Teljes valószínűségi eloszlás

$$P(C_{1,1}, \dots, C_{4,4}, S_{1,1}, S_{1,2}, S_{2,1}) = P(S_{1,1}, S_{1,2}, S_{2,1} | C_{1,1}, \dots, C_{4,4}) P(C_{1,1}, \dots, C_{4,4})$$



- $P(C_{1,3} | \text{ismert}, s) = ?$
- $\text{ismert} = \neg c_{11} \wedge \neg c_{21} \wedge \neg c_{12}$
- $s = \neg s_{11} \wedge s_{21} \wedge s_{12}$



$$P(C_{1,3} | ismert, s) = \alpha \sum_{ismeretlen} P(C_{1,3}, ismeretlen, ismert, s)$$

- Ismeretlen: nem ismert négyzetek
- Perem: szomszédos négyzetek
- A többi (egyéb) nem érdekes
- A megfigyelt szellők feltételesen függetlenek a többi változótól, ha az *ismert*, *perem* és *lekérdezés* adott



$$\mathbf{P}(C_{1,3}|\text{ismert},s)$$

$$= \alpha \sum_{\text{ismeretlen}} \mathbf{P}(s|C_{1,3}, \text{ismert}, \text{ismeretlen}) \mathbf{P}(C_{1,3}, \text{ismert}, \text{ismeretlen})$$

(szorzószabály)

$$= \alpha \sum_{\text{perem}} \sum_{\text{egyéb}} \mathbf{P}(s|\text{ismert}, C_{1,3}, \text{perem}, \text{egyéb}) \mathbf{P}(C_{1,3}, \text{ismert}, \text{perem}, \text{egyéb})$$

$$= \alpha \sum_{\text{perem}} \sum_{\text{egyéb}} \mathbf{P}(s|\text{ismert}, C_{1,3}, \text{perem}) \mathbf{P}(C_{1,3}, \text{ismert}, \text{perem}, \text{egyéb})$$

$$\mathbf{P}(C_{1,3}|\text{ismert},s) = \alpha \sum_{\text{perem}} \mathbf{P}(s|\text{ismert}, C_{1,3}, \text{perem}) \sum_{\text{egyéb}} \mathbf{P}(C_{1,3}, \text{ismert}, \text{perem}, \text{egyéb})$$

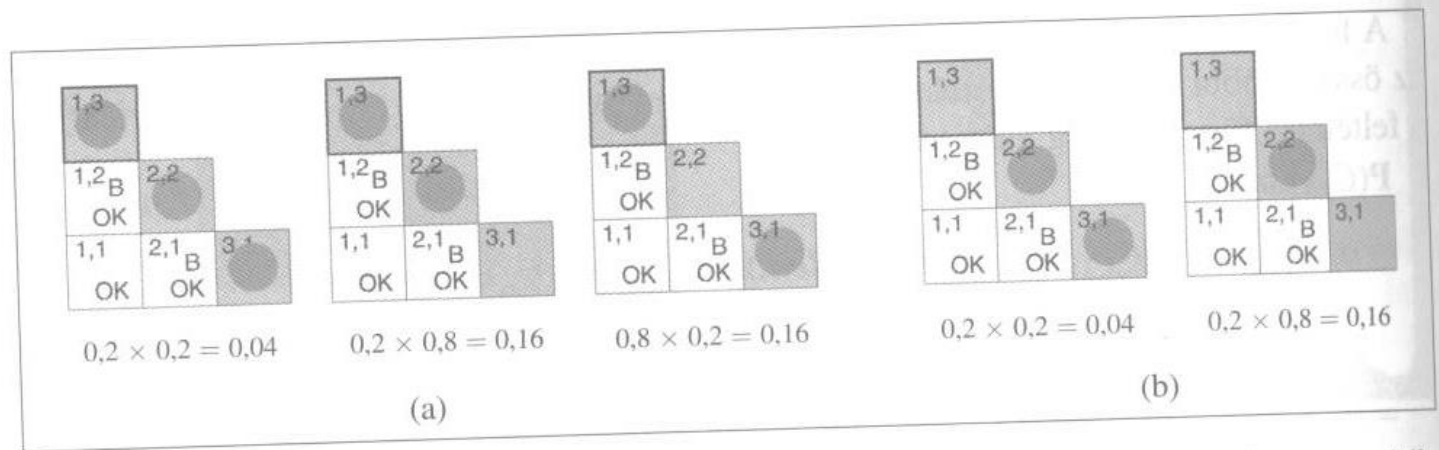
$$\mathbf{P}(C_{1,3}|\text{ismert},s)$$

$$= \alpha \sum_{\text{perem}} \mathbf{P}(s|\text{ismert}, C_{1,3}, \text{perem}) \sum_{\text{egyéb}} \mathbf{P}(C_{1,3}) C(\text{ismert}) C(\text{perem}) C(\text{egyéb})$$

$$= \alpha C(\text{ismert}) \mathbf{P}(C_{1,3}) \sum_{\text{perem}} \mathbf{P}(s|\text{ismert}, C_{1,3}, \text{perem}) C(\text{perem}) \sum_{\text{egyéb}} C(\text{egyéb}) =$$

$$= \alpha' \mathbf{P}(C_{1,3}) \sum_{\text{perem}} \mathbf{P}(s|\text{ismert}, C_{1,3}, \text{perem}) C(\text{perem})$$

$$P(C_{1,3} | \text{ismert}, s) = \alpha' \langle 0,2(0,04 + 0,16 + 0,16), 0,8(0,04 + 0,16) \rangle \approx \langle 0,31, 0,69 \rangle$$



13.7. ábra. $C_{2,2}$ és $C_{3,1}$ peremváltozók, az egyes modellek $C(\text{perem})$ értékét mutató konzisztens modelljei: (a) három, két vagy három csapdát jelző modell $C_{1,3} = \text{igaz}$ mellett, és (b) két, egy vagy két csapdát jelző modell $C_{1,3} = \text{hamis}$ mellett.

- **2,2-ben 86%-os valószínűséggel van csapda!**

